

Halmazelmélet gyakorlat

2015. február 19.

1. Egy robotbolha ugrál az egész számokon, minden lépésben követve programját. A programja egy olyan algoritmus, melynek megadva a lépés számát, kimenetként egy egész számot kapunk, ez a bolha annyiadik ugrása. Mi mindegyik lépés után egy egész számra csaphatunk le.
 - Írhatunk-e programot a bolha elkapására?
 - El tudjuk-e kapni a bolhát?
2. Van-e olyan rendezett halmaz, amelyben van legkisebb elem, a legkisebb elemnek van jobb oldali szomszédja és minden más elemnek van mindkét oldali szomszédja, a rendezés mégsem izomorf a természetes számokkal?
3. Egy rendezett halmaz *jólrendezett*, ha nincs benne végtelen csökkenő sorozat. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}$ minden jólrendezett részhalmaza megszámlálható!
4. Mutassuk meg, hogy egy megszámlálható rendezett halmaz pontosan akkor izomorf $\mathbb{Q}$ -val, ha
 - (a) végpont nélküli (azaz nincs legnagyobb vagy legkisebb pontja) és sűrű (azaz nincsenek szomszédos pontok)!
 - (b) legalább 3 pontja van és bármely két, véges részhalmaza közti izomorfizmus kiterjed a teljes halmazon értelmezett bijektív izomorfizmussá (automorfizmussá)!
5. Egy metrikus teret *szeparábilisnak* nevezünk, ha létezik megszámlálható sűrű részhalmaza. Bizonyítsuk be, hogy egy szeparábilis metrikus tér számossága $\leq \mathfrak{c}$.
6. Legyen $A \subset [0, 1]$ adott. I és II játszá a következő játékot: az n -edik lépésben I mond egy x_n számjegyet, II pedig egy y_n számjegyet. II nyer $\iff 0, x_1 y_1 x_2 y_2 \dots \notin A$. Igazoljuk, hogy ha A megszámlálható, akkor II -nek van nyerő stratégiája!
7. Megadható-e természetes számok megszámlálható sok sorozata $(t_n^k)_{k,n \in \mathbb{N}}$ úgy, hogy minden $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra
 - (a) $\{|\{n : s_n = t_n^k\}| : k \in \mathbb{N}\}$ nem korlátos ($\iff \limsup_{k \rightarrow \infty} |\{n : s_n = t_n^k\}| = \infty$)
 - (b) $\lim_{k \rightarrow \infty} |\{n : s_n = t_n^k\}| = \infty$?
8. (B) Igazoljuk, hogy minden $A \subset \mathbb{R}$ zárt halmaz vagy megszámlálható, vagy előáll mint egy perfekt és egy megszámlálható halmaz uniója!