

Halmazelmélet Gyakorlat
2013. február 27.

1. Hány különböző kezdőszelete van $(\mathbb{Q}, <)$ -nek?
2. Bizonyítsuk be, hogy minden megszámlálható rendezett halmaz izomorf $(\mathbb{Q}, <)$ egy részhalmazával. Mely megszámlálható rendezéseknek van ilyen tulajdonsága?
+ Igazoljuk, hogy egy megszámlálható sűrű végpont nélküli rendezés szükségképp izomorf $\mathbb{Q}$ -val!
3. Hány részhalmaza adható meg a természetes számoknak úgy, hogy bármely két különböző A, B és C, D párra ezek közül $A \cap B$ és $C \cap D$ különböző?
4. Igazoljuk, hogy $A \subset \mathbb{R}$ pontosan akkor megszámlálható, ha $A^2 = B \cup C$, ahol B -t minden vízszintes C -t pedig minden függőleges véges sok pontban metsz!
5. Igaz-e, hogy ha egy $A \subset \mathbb{R}^2$ halmaz bármely két pontja közti távolság racionális, akkor A megszámlálható?
+ Van-e ilyen végtelen halmaz, amely pontjai nem egy egyenesen vannak?
6. Legyen $A \subset [0, 1]$ adott. I és II játszik a következő játékot: az n -edik lépésben I mond egy x_n számjegyet, II pedig egy y_n számjegyet. II nyer $\iff 0, x_1 y_1 x_2 y_2 \dots \notin A$. Igazoljuk, hogy ha A megszámlálható, akkor II -nek van nyerő stratégiája!
7. Egy robotbolha ugrál az egész számokon, minden lépésben követve programját. A programja egy olyan algoritmus, melynek megadva a lépés számát, kimenetként egy egész számot kapunk, ez a bolha annyiadik ugrása. Mi mindegyik lépés után a nulla egy tetszőleges környezetére csaphatunk le.
 - Írhatunk-e programot a bolha elkapására?
 - El tudjuk-e kapni a bolhát?
8. Létezik-e olyan $U \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ nyílt halmaz, hogy minden $G \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ nyílt előáll szekciójaként, vagyis $(\exists x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})(G = \{y : (x, y) \in U\})$?
9. Legyen $\mathcal{A} = (A, \dots)$ tetszőleges megszámlálható algebrai struktúra. Ekkor ekvivalens:
 - $\text{Aut}(\mathcal{A})$ nem megszámlálható
 - minden véges $B \subset A$ részhalmazra van olyan nemidentikus $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{A})$ hogy $\phi|_B$ identitás
10. 6. feladathoz: bizonyítsuk be, hogy ha I -nek van nyerő stratégiája, akkor A számossága $\aleph_1$!

11. * Bizonyítsuk be minél egyszerűbben, hogy a számegyenesen megadható
c sok páronként nem homeomorf perfekt halmaz!