

A Poincaré és Geometrizációs sejtések Perelman munkássága után

Stipsicz András

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

2006. október 16.

Definíció

Egy X összefüggő topologikus tér n -dimenziós sokaság ha minden $x \in X$ ponthoz létezik egy olyan U_x (x -et tartalmazó) nyílt halmaz, mely $\mathbb{R}^n$ -nel homeomorf. Röviden: egy n -dimenziós sokaság lokálisan olyan, mint $\mathbb{R}^n$.

Feladat: Osztályozzuk az n -dimenziós sokaságokat! (Általánosan elfogadott könnyítések: tegyük fel, hogy X kompakt, és irányítható.)

Definíció: $\pi_1(X)$ = a sokaság *fundamentális csoportja* = X -beli, valamely x_0 rögzített pontban kezdődő és végződő hurkok / folytonos deformáció. Pl. ha $n > 1$ akkor $\pi_1(S^n)$ a triviális csoport.

Definíció

Egy X összefüggő topologikus tér n -dimenziós sokaság ha minden $x \in X$ ponthoz létezik egy olyan U_x (x -et tartalmazó) nyílt halmaz, mely $\mathbb{R}^n$ -nel homeomorf. Röviden: egy n -dimenziós sokaság lokálisan olyan, mint $\mathbb{R}^n$.

Feladat: Osztályozzuk az n -dimenziós sokaságokat! (Általánosan elfogadott könnyítések: tegyük fel, hogy X kompakt, és irányítható.)

Definíció: $\pi_1(X)$ = a sokaság *fundamentális csoportja* = X -beli, valamely x_0 rögzített pontban kezdődő és végződő hurkok / folytonos deformáció. Pl. ha $n > 1$ akkor $\pi_1(S^n)$ a triviális csoport.

Definíció

Egy X összefüggő topologikus tér n -dimenziós sokaság ha minden $x \in X$ ponthoz létezik egy olyan U_x (x -et tartalmazó) nyílt halmaz, mely $\mathbb{R}^n$ -nel homeomorf. Röviden: egy n -dimenziós sokaság lokálisan olyan, mint $\mathbb{R}^n$.

Feladat: Osztályozzuk az n -dimenziós sokaságokat! (Általánosan elfogadott könnyítések: tegyük fel, hogy X kompakt, és irányítható.)

Definíció: $\pi_1(X)$ = a sokaság *fundamentális csoportja* = X -beli, valamely x_0 rögzített pontban kezdődő és végződő hurkok / folytonos deformáció. Pl. ha $n > 1$ akkor $\pi_1(S^n)$ a triviális csoport.

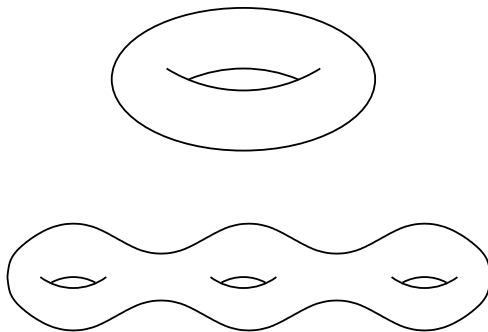
Más dimenziók

Tétel

- *Ha $n = 1$, akkor X az S^1 körvonallal homeomorf.*
- *Ha $n = 2$, akkor egy topologikus sokaság a Σ_g ún. g -nemű felületek egyikével (és pontosan egyikével) homeomorf.*
- *Ha $n \geq 4$, akkor minden G végesen prezentált csoportra létezik olyan X n -dimenziós sokaság, melynek fundamentális csoportja G -vel izomorf. Csoportok izomorfizmusa pedig nem algoritmikusan eldönthető.*

(Ha $n > 4$ akkor a fundamentális csoport trivialitását feltéve megadható az osztályozás, $n = 4$ esetben ez Freedman nevezetes eredménye.)

Felületek



A T^2 tórusz és a Σ_3 3-nemű felület.

A Poincaré és gömbi térforma sejtések

- Poincaré eredeti sejtése: Ha X kompakt 3-sokaság első *homológia-csoportja* (ami $\pi_1(X)$ kommutátor szerinti faktora) eltűnik, akkor X és S^3 homeomorfak. Ellenpélda: a Σ “Poincaré homológia gömb”, melyre $\pi_1(\Sigma)$ a 120 elemű perfekt csoport.
- Poincaré kérdése (1904): Igaz-e, hogy ha X kompakt 3-dimenziós, és $\pi_1(X)$ triviális, akkor X és S^3 homeomorfak?
Poincaré Sejtés: a válasz e kérdésre: Igen.
- Gömbi térforma-sejtés: Ha X kompakt 3-dimenziós, és π_1 véges, akkor létezik egy olyan $\Gamma \subset O(4)$ véges részcsoporthat, ami S^3 -on szabadon hat és $X = S^3/\Gamma$.

A Poincaré és gömbi térforma sejtések

- Poincaré eredeti sejtése: Ha X kompakt 3-sokaság első *homológia-csoportja* (ami $\pi_1(X)$ kommutátor szerinti faktora) eltűnik, akkor X és S^3 homeomorfak. Ellenpélda: a Σ “Poincaré homológia gömb”, melyre $\pi_1(\Sigma)$ a 120 elemű perfekt csoport.
- Poincaré kérdése (1904): Igaz-e, hogy ha X kompakt 3-dimenziós, és $\pi_1(X)$ triviális, akkor X és S^3 homeomorfak?
Poincaré Sejtés: a válasz e kérdésre: Igen.
- Gömbi térforma-sejtés: Ha X kompakt 3-dimenziós, és π_1 véges, akkor létezik egy olyan $\Gamma \subset O(4)$ véges részcsoporthat, ami S^3 -on szabadon hat és $X = S^3/\Gamma$.

A Poincaré és gömbi térforma sejtések

- Poincaré eredeti sejtése: Ha X kompakt 3-sokaság első *homológia-csoportja* (ami $\pi_1(X)$ kommutátor szerinti faktora) eltűnik, akkor X és S^3 homeomorfak. Ellenpélda: a Σ “Poincaré homológia gömb”, melyre $\pi_1(\Sigma)$ a 120 elemű perfekt csoport.
- Poincaré kérdése (1904): Igaz-e, hogy ha X kompakt 3-dimenziós, és $\pi_1(X)$ triviális, akkor X és S^3 homeomorfak?
Poincaré Sejtés: a válasz e kérdésre: Igen.
- Gömbi térforma-sejtés: Ha X kompakt 3-dimenziós, és π_1 véges, akkor létezik egy olyan $\Gamma \subset O(4)$ véges részcsoporthat, ami S^3 -on szabadon hat és $X = S^3/\Gamma$.

Megjegyzés

Az $O(4)$ ortogonális csoport ilyen részcsoportjait a '30-as évkeben klasszifikálták (Klein, Hopf).

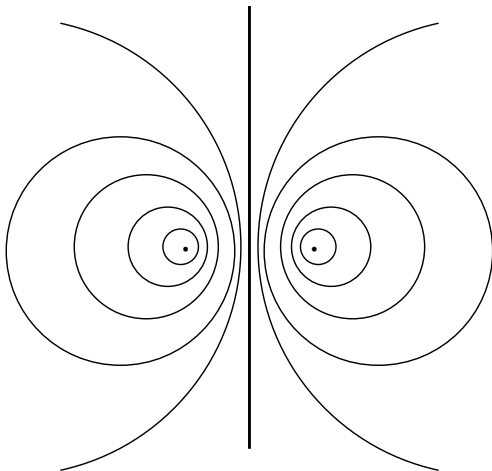
Szorzatok

Példák 3–sokaságokra:

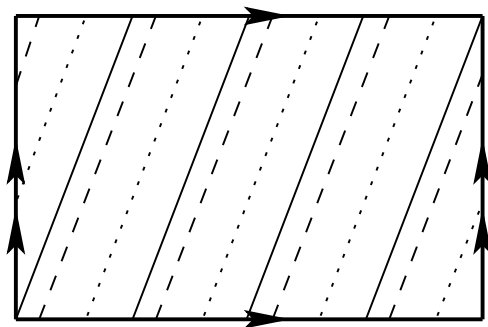
- $S^1 \times \Sigma_g$ direkt szorzat.
- 'csavart' direkt szorzat (lokálisan direkt szorzat, de globálisan nem, ilyen pl. a Möbius szalag); ezeket ' Σ_g feletti S^1 –nyaláboknak' hívjuk
- Seifert fibrált (SF) 3–sokaságok

Ez utóbbiak: M SF ha M előáll körvonalak uniójaként (és minden körvonalnak van körvonalakból álló nyílt környezete).

Például S^3 előáll tóruszok uniójaként (melyek közül kettő körvonallá 'degenerálódik'):



Egy tórusz pedig többféleképpen áll elő körvonalak egyesítéseként (ebből S^3 felbontása következik):



Két megjegyzés

1. **megjegyzés:** Hasonló felbontás tetszőleges $\frac{p}{q}$ meredekségű egyenesekkel is megadható.
2. **megjegyzés:** SF 3-sokaságokat a '30-as években Seifert osztályozta (az M/S^1 felület és a (p, q) párok adataival).

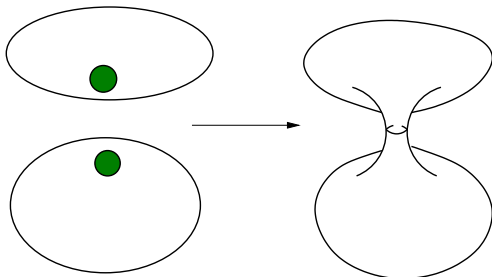
Hiperbolikus 3-sokaságok

Jelölje $\mathbb{H}^3$ a hiperbolikus teret, melynek egy modellje $\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 > 0\}$ felső féltér az $\frac{1}{x_1^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$ metrikával. Erre $Isom(\mathbb{H}^3) = PGL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*(= PSL_2(\mathbb{C}))$, és M 3-sokaság *hiperbolikus* ha létezik olyan $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^3)$ részcsoport, hogy

$$M = \mathbb{H}^3/\Gamma.$$

Prímfelbontás

Két n -dimenziós sokaság összefüggő összege:



Definíció: Az M 3-sokaság *prím*, ha $M = M_1 \# M_2$ esetén $M_1 = S^3$ vagy $M_2 = S^3$.

Kneser–Milnor felbontás

Tétel (Kneser 1929, Milnor 1960)

Egy M kompakt irányított 3-sokaság (a sorrendtől eltekintve egyértelműen) írható fel

$$M = (\#_i A_i) \# (\#_j B_j) \# (\# S^1 \times S^2)$$

alakban, ahol A_i, B_j prímekek, $\pi_1(A_i)$ véges, míg $\pi_1(B_j)$ végtelen csoportok.

A hiperbolizációs sejtés

Thurston hiperbolizációs sejtése: Egy végtelen fundamentális csoportú M prím 3-sokaságra létezik véges sok olyan $T_1, \dots, T_k$ tórusz M -ben, hogy ezek komplementumának egy komponense vagy Seifert fibrált vagy hiperbolikus.

1. megjegyzés: Egy ilyen jellegű felbontás ismert volt a '70-es évek végén (Jaco–Shalen, Johansson), amikor is a tóruszok a sokaságot Seifert fibrált és ún. “egyszerű” részekre vágták. Thurston azt sejtette, hogy az egyszerűségből következik a hiperbolikusság. A JSJ felbontásban a minimális ilyen tóruszok rendszere lényegében egyértelmű.

A hiperbolizációs sejtés

Thurston hiperbolizációs sejtése: Egy végtelen fundamentális csoportú M prím 3-sokaságra létezik véges sok olyan $T_1, \dots, T_k$ tórusz M -ben, hogy ezek komplementumának egy komponense vagy Seifert fibrált vagy hiperbolikus.

1. megjegyzés: Egy ilyen jellegű felbontás ismert volt a '70-es évek végén (Jaco–Shalen, Johansson), amikor is a tóruszok a sokaságot Seifert fibrált és ún. “egyszerű” részekre vágták. Thurston azt sejtette, hogy az egyszerűségből következik a hiperbolikusság. A JSJ felbontásban a minimális ilyen tóruszok rendszere lényegében egyértelmű.

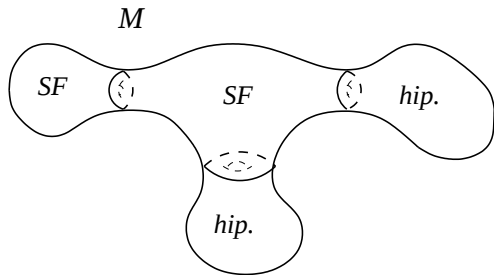
Még két megjegyzés

2. megjegyzés: Thurston belátta ezt, ha pl. a minimális tóruszrendszer nem-üres, vagy ha az “egyszerű” részekre $b_1 > 0$.

3. megjegyzés: A sejtés eredeztethető a következő tényből:
Ha Σ_g g -nemű felületre $g \geq 2$, akkor létezik az $Isom(\mathbb{H}^2)$ csoportnak egy olyan Γ részcsoportha, melyre

$$\Sigma_g = \mathbb{H}^2 / \Gamma.$$

Tehát “majdnem minden felület hiperbolikus”.



A hiperbolizációs sejtés sematikus rajza (M prím)

A Geometrizációs sejtés

Thurston Geometrizációs sejtése: Hiperbolizációs sejtés + gömbi térforma sejtés.

Kevésbé precízen: Minden M 3-sokaság S^2 gömbök és T^2 tóruszok mentén szétvághatók olyan darabokra, melyek mindegyike

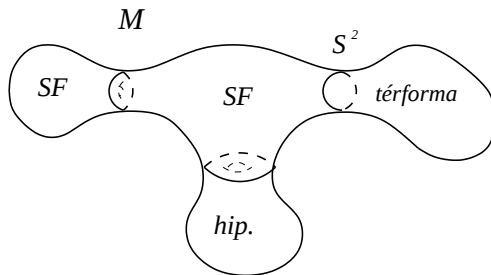
- vagy Seifert fibrált,
- vagy S^3 egy faktora,
- vagy $\mathbb{H}^3$ egy faktora.

A Geometrizációs sejtés

Thurston Geometrizációs sejtése: Hiperbolizációs sejtés + gömbi térforma sejtés.

Kevésbé precízen: Minden M 3-sokaság S^2 gömbök és T^2 tóruszok mentén szétvághatók olyan darabokra, melyek mindegyike

- vagy Seifert fibrált,
- vagy S^3 egy fakotora,
- vagy $\mathbb{H}^3$ egy faktora.



A prím és JSJ felbontások sematikus rajza

Metrikák 3-sokaságokon

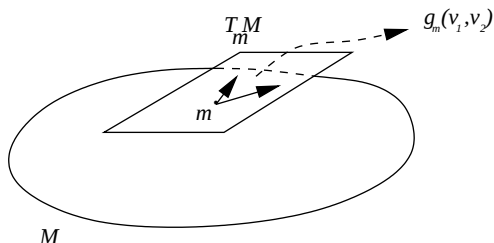
Minden M 3-dimenziós sokaságon értelmezhető egy (*Riemann*) *metrika*, vagyis az érintőterein (differentiálható módon változó) pozitív definit szimmetrikus bilineáris forma.

Ennek oka: egy 3-dimenziós sokaságon választhatók úgy a térképek, hogy az átmenő függvények differentiálhatóak, következésképpen topologikus kérdések megválaszolásához analitikus módszerek is használhatók.

Metrikák 3-sokaságokon

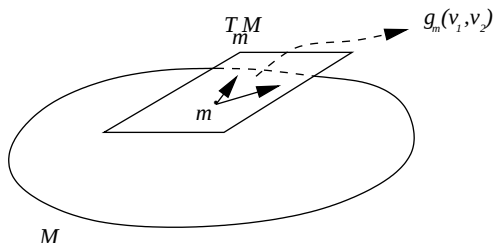
Minden M 3-dimenziós sokaságon értelmezhető egy (*Riemann*) *metrika*, vagyis az érintőterein (differentiálható módon változó) pozitív definit szimmetrikus bilineáris forma.

Ennek oka: egy 3-dimenziós sokaságon választhatók úgy a térképek, hogy az átmenő függvények differentiálhatóak, következésképpen topologikus kérdések megválaszolásához analitikus módszerek is használhatók.



Egy metrika sematikus rajza

Legyen tehát g egy ilyen Riemann metrika, vagyis minden $m \in M$ esetén g_m egy pozitív definit szimmetrikus bilineáris forma $T_m M$ -en.



Egy metrika sematikus rajza

Legyen tehát g egy ilyen Riemann metrika, vagyis minden $m \in M$ esetén g_m egy pozitív definit szimmetrikus bilineáris forma $T_m M$ -en.

Távolság

g ismeretében távolság is értelmezhető M -en: legyen $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ differenciálható leképezés, melyre $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$.

$$d(p, q) = \inf \left\{ \int_0^1 \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt \mid \gamma \text{ mint fent} \right\}$$

A Geometrizációs sejtés másképp

Minden 3-sokaság (néhány S^2 és T^2 mentén) szétvágható olyan részekre, melyeken valamilyen kitüntetett “jó” metrika létezik. (Pl. a gömbi térformákon az S^3 -ból, a hiperbolikusokon a $\mathbb{H}^3$ -ból örökölt).

Thurston belátta, hogy csak nyolc “jó” típusú metrika létezik, az S^3 -on lévő *elliptikus* és a hiperbolikus melletti hatról pedig belátták, hogy csak Seifert fibrált tereken értelmezhetők (és ott léteznek is).

A Geometrizációs sejtés másképp

Minden 3-sokaság (néhány S^2 és T^2 mentén) szétvágható olyan részekre, melyeken valamilyen kitüntetett “jó” metrika létezik. (Pl. a gömbi térformákon az S^3 -ból, a hiperbolikusokon a $\mathbb{H}^3$ -ból örökölt).

Thurston belátta, hogy csak nyolc “jó” típusú metrika létezik, az S^3 -on lévő *elliptikus* és a hiperbolikus melletti hatról pedig belátták, hogy csak Seifert fibrált tereken értelmezhetők (és ott léteznek is).

Konnexió

Mint láttuk, $\gamma'(t)$ értelmezhető, de $\gamma''(t)$ definíciójához már a különböző érintőkben lévő vektorokat kellene összehasonlítani, ehhez egy kapcsolat (konnexió) kell a különböző érintőterek között. Egy ilyen segítségével tetszőleges érintő vektormezőt “le lehet deriválni egy adott $\gamma'(0)$ irányban”.

Tétel

Adott g metrikára létezik egy kitüntetett

$$\nabla: \{\text{vektormezők}\} \times \{\text{vektormezők}\} \rightarrow \{\text{vektormezők}\}$$

konnexió (az ún. Levi-Civita konnexió).

Ekkor $\nabla(X, Y)$ -t $\nabla_X Y$ -nal jelöljük, és úgy képzeljük, hogy az Y vektormezőt deriváljuk X irányban.

Görbület

Annak mérésére pedig, hogy a metrika mennyire különbözik az $\mathbb{R}^3$ -on megadható ún. "lapos" $g = \sum_i dx_i^2$ metrikától, azt nézzük meg, mennyire nem teljesül Young tétele (a deriválások sorrendjének felcserélhetőségéről):

Definíció: Legyen

$$\overline{Rm}(X, Y)(Z) = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})(Z)$$

és ebből definiáljuk az

$$Rm(X, Y, Z, W) = g(\overline{Rm}(X, Y)(W), Z)$$

Riemann görbületi tenzort. Ez egy $\langle X_m, Y_m \rangle$ sík által meghatározott felülethez épp annak görbületét rendeli az $Rm(X, Y, X, Y)$ definícióval, és teljesíti azt, hogy $Rm = 0$ egy környezetben pontosan akkor, ha ott g olyan mint a lapos metrika.

Ricci tenzor

Mivel Rm nem hasonlítható össze a metrikával, definiáljuk

$$Ric_g(X, Y) = \sum_{Z \text{ lokális ONB}} Rm(X, Z, Y, Z)$$

Ricci tenzort (ami egy szimmetrikus, de nem feltétlenül pozitív definit forma minden érintőtéren). Intuitíven: $Ric_g(X, X)$ az X vektort tartalmazó síkokhoz tartozó felületdarabok görbületének átlaga.

Tény: Egy 3-dimenziós sokaságra Ric_g meghatározza az Rm Riemann tenzort (magasabb dimenzióban nem).

Ricci tenzor

Mivel Rm nem hasonlítható össze a metrikával, definiáljuk

$$Ric_g(X, Y) = \sum_{Z \text{ lokális ONB}} Rm(X, Z, Y, Z)$$

Ricci tenzort (ami egy szimmetrikus, de nem feltétlenül pozitív definit forma minden érintőtéren). Intuitíven: $Ric_g(X, X)$ az X vektort tartalmazó síkokhoz tartozó felületdarabok görbületének átlaga.

Tény: Egy 3-dimenziós sokaságra Ric_g meghatározza az Rm Riemann tenzort (magasabb dimenzióban nem).

Ricci áram (Ricci flow)

Hamilton '82: Rögzítsünk az M 3-sokaságon egy $g(0) = g$ metrikát, és tekintsük azt a $g(t)$ metrikasereget, melyre

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric(g(t))$$

parciális differenciálegyenlet teljesül.

Egy lokális térképen ez az egyenlet a

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \Delta g(t) + \text{alacsonyabb rendű tagok}$$

alakot veszi fel, tehát “hőegyenlet típusú” lesz, vagyis azt várhatjuk, hogy úgy oszlik el a görbület, mint a hőmérséklet. Sajnos az alacsonyabb rendű tagok “szingularitásokhoz” vezethetnek (és vezetnek is).

Hamilton eredményei

Tétel (Hamilton, 1982)

Tetszőleges (M, g) esetén létezik olyan $0 < T_{\max} \leq \infty$, és $g(t)$ ($t \in [0, T_{\max})$) metrika-sereg, mely megoldja a Ricci áram egyenletet. A megoldás és $T_{\max}$ egyértelmű.

Példa: Legyen S^2 a szokásos (kerek) $g = g(0)$ metrikájával. Erre $Ric(g(0)) = \frac{1}{2}g(0)$; keressük a Ricci áram megoldásait

$$g(t) = \lambda(t)g$$

alakban. Ekkor

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \lambda'(t)g(0) = -2Ric(g(t)) = -2Ric(g(0)) = -g(0),$$

így a $\lambda(t) = 1 - t$ függvény adja a ($t = 1$ -ben szinguláris) megoldást.

Hamilton eredményei

Tétel (Hamilton, 1982)

Tetszőleges (M, g) esetén létezik olyan $0 < T_{\max} \leq \infty$, és $g(t)$ ($t \in [0, T_{\max})$) metrika-sereg, mely megoldja a Ricci áram egyenletet. A megoldás és $T_{\max}$ egyértelmű.

Példa: Legyen S^2 a szokásos (kerek) $g = g(0)$ metrikájával. Erre $Ric(g(0)) = \frac{1}{2}g(0)$; keressük a Ricci áram megoldásait

$$g(t) = \lambda(t)g$$

alakban. Ekkor

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \lambda'(t)g(0) = -2Ric(g(t)) = -2Ric(g(0)) = -g(0),$$

így a $\lambda(t) = 1 - t$ függvény adja a ($t = 1$ -ben szinguláris) megoldást.

Tétel (Hamilton, 1982)

Ha $(M, g(0))$ -ra $Ric(g(0))$ pozitív definit, akkor M egy gömbi térforma.

Ötlet: Belátható, hogy T ebben az esetben véges, de tekintve a

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric(g(t)) + \frac{2}{3}r(t)g(t)$$

ún. *normalizált Ricci áramot*, $g(t)$ metrikák egy olyan családját kapjuk ($t \in [0, \infty)$), melyek egy konstans pozitív görbületű metrikához tartanak, ebből pedig a tétel ismert eredmények alapján következik. ($r(t)$ az átlagos skalárgörbület.)

Tétel (Hamilton, 1982)

Ha $(M, g(0))$ -ra $Ric(g(0))$ pozitív definit, akkor M egy gömbi térforma.

Ötlet: Belátható, hogy T ebben az esetben véges, de tekintve a

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric(g(t)) + \frac{2}{3}r(t)g(t)$$

ún. *normalizált Ricci áramot*, $g(t)$ metrikák egy olyan családját kapjuk ($t \in [0, \infty)$), melyek egy konstans pozitív görbületű metrikához tartanak, ebből pedig a tétel ismert eredmények alapján következik. ($r(t)$ az átlagos skalárgörbület.)

Tétel (Hamilton, 1998)

Ha létezik a normalizált Ricci áramnak minden $t \in [0, \infty)$ időben megoldása, akkor M -re teljesül a Geometrizációs sejtés.

Ötlet: Belátja, hogy a $g(t)$ metrika-család egy nyílt, T^2 -k által határolt részen egy hiperbolikus metrikához tart, e rész komplementumán pedig "összeroskad", vagyis egyre rövidebb geodetikus hurkok keletkeznek. Az ilyen terekről viszont belátható, hogy Seifert fibráltak T^2 -k menti összeragasztásával keletkeznek (Gromov, Burago, Perelman).

Baj: a normalizált Ricci áramnak is felléphetnek szingularitásai.

Tétel (Hamilton, 1998)

Ha létezik a normalizált Ricci áramnak minden $t \in [0, \infty)$ időben megoldása, akkor M -re teljesül a Geometrizációs sejtés.

Ötlet: Belátja, hogy a $g(t)$ metrika-család egy nyílt, T^2 -k által határolt részen egy hiperbolikus metrikához tart, e rész komplementumán pedig “összeroskad”, vagyis egyre rövidebb geodetikus hurkok keletkeznek. Az ilyen terekről viszont belátható, hogy Seifert fibráltak T^2 -k menti összeragasztásával keletkeznek (Gromov, Burago, Perelman).

Baj: a normalizált Ricci áramnak is felléphetnek szingularitásai.

Tétel (Hamilton, 1998)

Ha létezik a normalizált Ricci áramnak minden $t \in [0, \infty)$ időben megoldása, akkor M -re teljesül a Geometrizációs sejtés.

Ötlet: Belátja, hogy a $g(t)$ metrika-család egy nyílt, T^2 -k által határolt részen egy hiperbolikus metrikához tart, e rész komplementumán pedig “összeroskad”, vagyis egyre rövidebb geodetikus hurkok keletkeznek. Az ilyen terekről viszont belátható, hogy Seifert fibráltak T^2 -k menti összeragasztásával keletkeznek (Gromov, Burago, Perelman).

Baj: a normalizált Ricci áramnak is felléphetnek szingularitásai.

Szingularitások

Tétel (Hamilton, 1999)

A szingularitások

- S^3 egy faktorával,
- $S^2 \times \mathbb{R}$ -rel, vagy
- $\Sigma \times \mathbb{R}$ -rel modellezhetők, ahol $\Sigma = (\mathbb{R}^2, ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1+x^2+y^2})$ a nevezetes "szivar" (cigar) megoldás.

Perelman eredményei a Ricci áramra vonatkozóan

Tétel (Perelman, 2002)

Ha M kompakt, akkor $\Sigma \times \mathbb{R}$ nem lép fel.

Az új módszer: egy olyan mennyiséget talált, mely a Ricci áram mentén monoton. (Ez a Perelman által bevezetett *redukált térfogat*.) Evvel erősebb geometrikus tulajdonságot látott be a szinguláris halmazra.

Ricci áram műtéttel

A szingularitások jobb megértéséből adódik tehát:
ha $g(t)$ egy Ricci áram $[t_{k-1}, t_k)$ -n, és tovább nem folytatható,
akkor ahogy t tart t_k -hoz, vagy

- van egy S^3/Γ komponens, vagy
- M egy komponensében egyre vékonyabb $S^2 \times [-C, C]$ alakú rész keletkezik. (Esetleg mindkét szingularitás fellép.)

Perelman műtéti eljárása: dobjuk el az S^3/Γ alakú részeket,
hajtsunk végre műtétet S^2 mentén (mely éppen az összefüggő
összeg ellentettje lesz), és az eredménnyel indítsuk újra a Ricci
áramot t_k -ban.

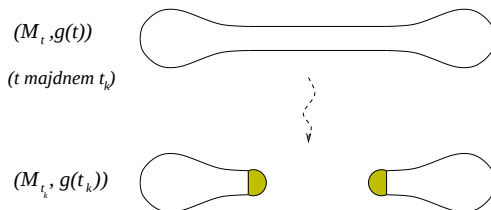
Ricci áram műtéttel

A szingularitások jobb megértéséből adódik tehát:
ha $g(t)$ egy Ricci áram $[t_{k-1}, t_k)$ -n, és tovább nem folytatható,
akkor ahogy t tart t_k -hoz, vagy

- van egy S^3/Γ komponens, vagy
- M egy komponensében egyre vékonyabb $S^2 \times [-C, C]$ alakú rész keletkezik. (Esetleg mindkét szingularitás fellép.)

Perelman műtéti eljárása: dobjuk el az S^3/Γ alakú részeket,
hajtsunk végre műtétet S^2 mentén (mely éppen az összefüggő
összeg ellentettje lesz), és az eredménnyel indítsuk újra a Ricci
áramot t_k -ban.

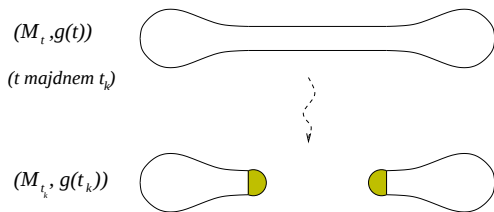
A műtét sematikus rajza



Egy műtét rajza

Nehéz: a sapkákat úgy rátenni a levágott részekre, hogy a becslések továbbra is megmaradjanak, és a műtési időpontok ne torlódjanak.

A műtét sematikus rajza



Egy műtét rajza

Nehéz: a sapkákat úgy rátenni a levágott részekre, hogy a becslések továbbra is megmaradjanak, és a műteti időpontok ne torlódjanak.

Perelman fő tétele

Tétel (Perelman, 2003)

Tetszőleges (M, g) Riemann 3-sokaságra létezik egy olyan $(M_t, g(t))$ műtétes Ricci áram, mely

- *egy $t_1 < \dots < t_k < \dots$ diszkrét részhalmazon kívül egy Ricci áram,*
- *a t_k pontokban egy Perelman-féle műtét történik, és*
- *∞ -ben a metrika egy, a Hamilton-tételben fellépő limeszhez tart.*

Emlékeztető: Hamilton tétele

Tétel (Hamilton, 1998)

Ha létezik a normalizált Ricci áramnak minden $t \in [0, \infty)$ időben megoldása, akkor M -re teljesül a Geometrizációs sejtés.

A $g(t)$ metrika-család egy nyílt, T^2 -k által határolt részen egy hiperbolikus metrikához tartott, e rész komplementumán pedig “összeroskad”, vagyis egyre rövidebb geodetikus hurkok keletkeznek; ilyen terekről ismert volt, hogy Seifert fibráltak T^2 -k menti összeragasztásával keletkeznek.

Rövidítés: gömbi térformákra

Egyszerűsítés:

Tétel (Perelman, Colding-Minicozzi)

Ha $\pi_1(M)$ véges, akkor létezik olyan T , hogy $t > T$ esetén a műtétes Ricci áramban $M_t = \emptyset$.

Ebből természetesen a gömbi térforma-sejtés és a Poincaré sejtés azonnal következik.

Rövidítés: gömbi térformákra

Egyszerűsítés:

Tétel (Perelman, Colding-Minicozzi)

Ha $\pi_1(M)$ véges, akkor létezik olyan T , hogy $t > T$ esetén a műtétes Ricci áramban $M_t = \emptyset$.

Ebből természetesen a gömbi térforma-sejtés és a Poincaré sejtés azonnal következik.

Az ötlet

Egyszerűen belátható, hogy ha $\pi_1(M)$ véges, akkor $\pi_3(M) \neq 0$, tehát van nem-triviális $S^3 \rightarrow M$ leképezés. Ez (az S^3 -at “felszeletelve”) megadja $S^2 \rightarrow M$ leképezések egy hurkát. Rögzítsük t -t (és így a $g(t)$ metrikát) és vegyünk a maximális felszínt ezekre a gömbökre. Legyen $w_2(t)$ az ilyen maximális felszínnek minimuma.

Tétel

$$\frac{dw_2(t)}{dt} \leq -4\pi + \frac{3}{4(t+C)} w_2(t).$$

Ebből viszont standard technika adja, hogy $w_2(t) < 0$ ha t elég nagy, ami nyilvánvaló ellentmondás.

Az ötlet

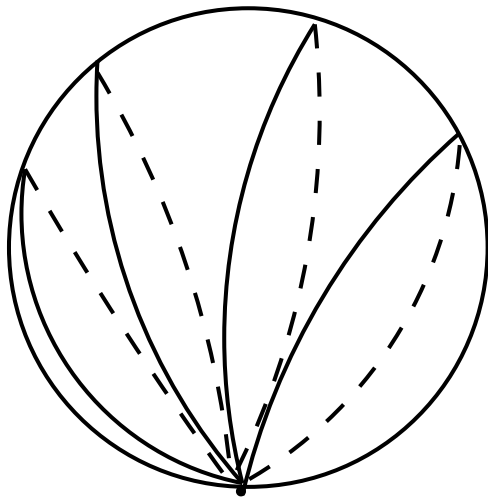
Egyszerűen belátható, hogy ha $\pi_1(M)$ véges, akkor $\pi_3(M) \neq 0$, tehát van nem-triviális $S^3 \rightarrow M$ leképezés. Ez (az S^3 -at “felszeletelve”) megadja $S^2 \rightarrow M$ leképezések egy hurkát. Rögzítsük t -t (és így a $g(t)$ metrikát) és vegyünk a maximális felszínt ezekre a gömbökre. Legyen $w_2(t)$ az ilyen maximális felszínnek minimuma.

Tétel

$$\frac{dw_2(t)}{dt} \leq -4\pi + \frac{3}{4(t+C)} w_2(t).$$

Ebből viszont standard technika adja, hogy $w_2(t) < 0$ ha t elég nagy, ami nyilvánvaló ellentmondás.

A gömb "felszeletelése"



Irodalom

- H.D. Cao és B. Chow: *Recent developments on the Ricci flow*, Bulletin of the American Mathematical Society **36** (1999) 59–74.
- J. Morgan: *Recent progress on the Poincaré Conjecture and the classification of 3-manifolds*, Bulletin of the American Mathematical Society **42** (2004) 57–78.
- J. Milnor: *Towards the Poincaré Conjecture and the classification of 3-manifolds*, Notices of the American Mathematical Society **50** (2003) 1226–1233.
- M. Anderson: *Geometrization of 3-manifolds via the Ricci flow*, Notices of the American Mathematical Society **51** (2004) 184–193.

Cikkek

- J. Morgan és G. Tian: *Ricci flow and the Poincaré Conjecture*, arXiv:math.DG/0607607.
- H.D. Cao és Z.P. Zhu: *A complete proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures — Application of the Hamilton–Perelman theory of Ricci flow*, Asian Journal of Mathematics **10** (2006) 165–492.

És persze ott vannak Perelman cikkei (az ArXiv-on), mellettük B. Kleiner és J. Lott “szövegmagyarázatával”.

Cikkek

- J. Morgan és G. Tian: *Ricci flow and the Poincaré Conjecture*, arXiv:math.DG/0607607.
- H.D. Cao és Z.P. Zhu: *A complete proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures — Application of the Hamilton–Perelman theory of Ricci flow*, Asian Journal of Mathematics **10** (2006) 165–492.

És persze ott vannak Perelman cikkei (az ArXiv-on), mellettük B. Kleiner és J. Lott “szövegmagyarázatával”.

A sztori/pletykák

- A. Jackson: *Conjecture no more? Consensus forming on the proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures*, Notices of the American Mathematical Society **53** (2006) 897–901.
- Sylvia Nasar és David Gruber: *Manifold destiny; a legendary problem and the battle over who solved it*,
http://www.newyorker.com/fact/content/artciles/060828fa_fact2
- <http://www.doctoryau.com>

Az előadás pedig a

<http://www.renyi.hu/stipsicz/perelman/osszintezeti.pdf>
címen megtalálható.