

Harnack egyenlőtlenségek

Tóth Árpád

ELTE, Matematikai Intézet

2006. okt. 27.

A hő-mag

A hővezetés egyenlete:

$u(\mathbf{x}, t)$ = hőmérséklet az $\mathbf{x}$ pontban a t időpillanatban.

$$\partial_t u = \Delta u$$

Ha $u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$ szép, a megoldás

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) H(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) d\mathbf{y}$$

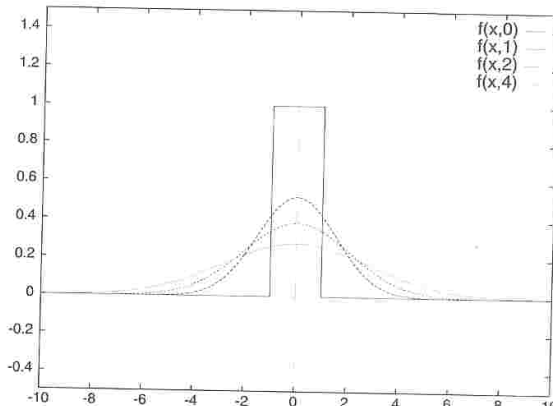
ahol $H(\mathbf{x}, t)$ az ú.n. hő-mag: $H(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/4t}$.

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 t \|\xi\|^2} e^{2\pi i \langle \xi, \mathbf{x} \rangle} d\xi.$$

Simitás

9.4. Partial Differential Equations

303



A továbbiakban nem vizsgáljuk mikor oldható meg a hőegyenlet, illetve, hogyan található meg a megoldás. Azt vizsgáljuk milyen tulajdonságaik vannak azoknak a függvényeknek amik kielégítik a hő-egyenletet.

Maximum/minimum elv: alapeset

Tétel

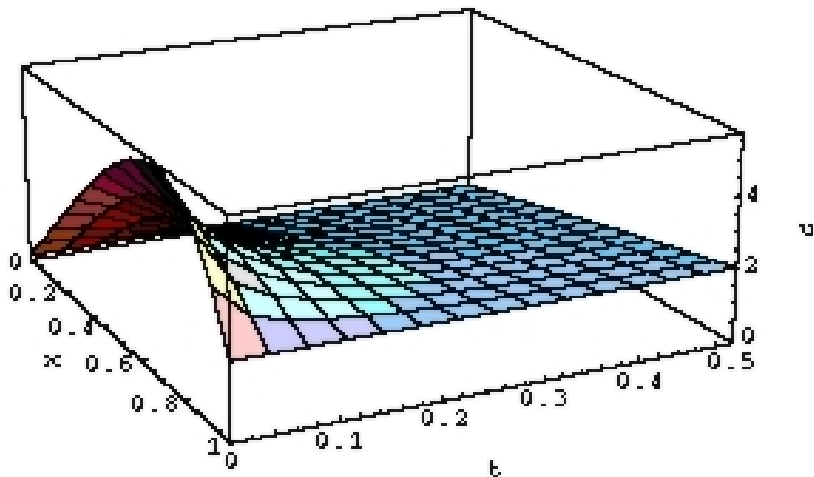
Legyen $L \subset \mathbf{R}^n$ nyílt, $u : L \times [0, S) \rightarrow \mathbf{R}$ megoldása a hőegyenletnek. Minden $K \subset L$ kompakt és $T \in [0, S)$ -re

$$\min_{(\mathbf{x}, t) \in K \times [0, T]} u(\mathbf{x}, t) = \min_{(\mathbf{x}, t) \in \partial K \times [0, T] \cup K \times \{0\}} u(\mathbf{x}, t).$$

Ugyanez fennáll max-ra, és az

$$u_t = \Delta u + \langle \text{grad } u, X \rangle$$

típusú egyenletekre.



Maximum/minimum-elv: biz.

Elég a következőt belátni, hogy ha

1. $u_t \geq \Delta u + \langle \text{grad } u, X \rangle$, és
2. $u(\mathbf{x}, 0) \geq 0$, $u(\mathbf{x}, t) \geq 0 \ \forall (\mathbf{x}, t) \in \partial K \times [0, T]$,
akkor $u(\mathbf{x}, t) \geq 0 \ \forall (\mathbf{x}, t) \in K \times [0, T]$.

Ötlet: Ha $(\mathbf{x}_0, t_0)$ -ban minimum, akkor $\partial_t u(\mathbf{x}_0, t_0) = 0$, $\text{grad } u = 0$
és $\text{Hess } u \geq 0$. Ezért $\Delta u \geq 0$.

Legyen

$$v(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) + \varepsilon(t + 1)$$

Legyen t_0 a legkisebb t amire $\exists \mathbf{x}_0$, $v(\mathbf{x}_0, t_0) = 0$. Ekkor $\mathbf{x}_0$ belső pont, és a fenti gondolatmenet alapján

$$v_t = u_t + \varepsilon \geq \Delta u + \langle \text{grad } u, X \rangle + \varepsilon \geq \varepsilon.$$

Max/min-elv sokaságra

Általánosabban

Tétel

Legyen M egy kompakt sokaság, $X(\mathbf{x}, t)$ vektormező, u megoldása
 a

$$\partial_t u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u + \langle X, \operatorname{grad} u \rangle$$

egyenletnek. $\min_{(x,t) \in M \times [0,\infty)} u(x, t) = \min_{x \in M} u(x, 0)$.

Bizonyítás ugyanaz.

Maximum-elv: hő-egyenlet + reakció

$u : M \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, X, F sima, M kompakt.

$$u_t = \Delta u + \langle \text{grad } u, X \rangle + F(u)$$

Legyen $u_{\min}(t) = \min_{x \in M} u(x, t)$. Ekkor

$$u_{\min}(t) \geq \phi(t)$$

ahol ϕ megoldása a

$$\phi' = F(\phi), \quad \phi(0) = u_{\min}(0)$$

diff. egyenletnek.

Maximum-elv: bizonyítás vázlata

Legyen T fix. β olyan, hogy

$$|F(u(x, t)) - \phi(t)| \leq \beta |u(x, t) - \phi_1(t)| \quad \forall (x, t) \in M \times [0, T].$$

Ekkor fennáll

$$\partial_t(u - \phi) \geq \Delta(u - \phi) + \langle \text{grad}(u - \phi), X \rangle - \beta(u - \phi)$$

$e^{-\beta t}$ integráló faktort használva, $v = e^{-\beta t}(u - \phi)$ -re $v(x, 0) \geq 0$ és

$$v_t \geq \Delta v + \langle \text{grad } v, X \rangle.$$

Görbület fejlődése

Felületen a Ricci áram szögtartó. Legyen $r = \frac{\int_M R d\mu}{\text{vol}(M)}$, R görbület.

$$\partial_t g = (r - R)g$$

$$\Rightarrow g(t) = e^{f(t,x)} g$$

$$\partial_t R = \Delta R + R(R - r)$$

Maximum-elv

Tegyük föl hogy $r < 0$. Legyen $\rho = \min_{x \in M} R(x)$, tehát $r - \rho \geq 0$

Tétel

$$R(x, t) \geq r - (r - \rho)e^{rt}.$$

Bizonyítás:

$$y' = y(y - r), \quad y(0) = \rho$$

megoldása

$$y(t) = \frac{r}{1 - (1 - r/\rho)e^{rt}}$$

C^1 becslés

Legyen $u(x, t) = \|\nabla R\|^2$, ha t elég nagy,

$$\partial_t u \leq \Delta u + \frac{r}{2} u$$

Biz.:

$$\partial_t \|\nabla R\|^2 = \Delta \|\nabla R\|^2 - 2 \|\nabla \nabla R\|^2 + (4R - 3r) \|\nabla R\|^2$$

Következmény: $\|\nabla R\|^2 \leq C e^{rt/2}$.

Harnack-egyenlőtlenség: Elliptikus

Legyen $u \geq 0$ és $\Delta u = 0$ $\overline{B(x, R)}$ -en. Ha $y \in B(x, R)$, akkor

$$u(y) \leq \left(\frac{R}{R-d(x,y)} \right)^n u(x)$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} u(y) &= \frac{1}{\text{vol}(B(y, R-d(x,y)))} \int_{B(y, R-d(x,y))} u(\xi) d\xi \\ &\leq \frac{1}{\text{vol}(B(y, R-d(x,y)))} \int_{B(x,R)} u(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Li-Yau

Tétel

M teljes Riemann sokaság, nem-negatív Ricci $u : M \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$,

$$u_t = \Delta u$$

Ha $u > 0$ akkor $\Delta \log u \geq -\frac{n}{2t}$

Megj. $\mathbf{R}^n$. Hőmagra éles:

$$\Delta \log H(x, t) = \Delta(-n \log(4\pi t)/2 - \|x\|^2/4t)$$

Sokaságon

Bochner azonosság

$$\Delta \nabla_i f = \nabla_i \Delta f + \sum_j R_{ij} \nabla_j f$$

Emiatt $Q = \Delta \log u$ kielégíti a

$$\begin{aligned} \partial_t Q = \Delta Q + \langle \nabla \log u, \nabla Q \rangle \\ + 2Rc(\nabla \log u, \nabla \log u) + 2 \sum_{i,j} |\nabla_i \nabla_j \log u|^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Mivel $\langle A, B \rangle = \text{tr } AB^t$ egy skalár szorzat, $(\text{tr } A)^2 \leq n \text{tr } AA^t$. Ha még $Rc \geq 0$, akkor

$$\partial_t Q \geq \Delta Q + \langle \nabla \log u, \nabla Q \rangle + \frac{2}{n} Q^2.$$