# NÉGYDIMENZIÓS SOKASÁGOK TOPOLÓGIÁJA — ÁTTEKINTÉS

STIPSICZ ANDRÁS

Topologikus terek legkézenfekvőbb nemtriviális példáit adják a (topologikus és sima) *sokaságok*. Definíciójuk szerint ezek a terek lokálisan (minden pont egy kis környezetében) olyanok mint valamilyen $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér. Az ilyen topologikus tereknek a matematika más ágaiban (és a fizikában) játszott fontos szerepük miatt természetes igény merült fel osztályozásukra. Poincaré mintegy 100 évvel ezelőtt írott munkáiban már felvetődött az osztályozás kérdése — lásd pl. a Poincarénak tulajdonított sejtést egyszeresen összefüggő 3-sokaságokról (1.14 megjegyzés).

Természetesnek tűnő elvárás volt, hogy a sokaságon értelmezett különböző differenciálhatósági struktúrák (ld. 1.2 definíció) közti megkülönböztetés a lényeget nem érinti, így célként kitűzhetőnek tűnt a topologikus sokaságok teljes invariánsrendszerének (pl. homotópia- és homológia-csoportok, stb.) megtalálása majd annak belátása, hogy differenciálható struktúrák az így meghatározott topologikus sokaságokon már egyértelműen léteznek. 1- és 2-dimenziós sokaságokra a program könnyen keresztülvihetőnek bizonyult, és 3-dimenzióban is bíztatóan alakult (ld. például az 1.9 tételt). Milnor 1956-ban megjelent cikke [M1] azonban magasabb dimenziókban eloszlatta ezeket a várakozásokat: Hirzebruch egy eredményére alapozva Milnor olyan $X$ sima 7-sokaságot konstruált mely homeomorf, de nem diffeomorf az $S^7$ 7-dimenziós gömbfelülettel. A '60-as években Smale [S] (a $h$-kobordizmus tétel bebizonyításával) megvetette a négynél magasabb dimenziós sokaságok osztályozásának alapjait. A talált eredmények szerint ezekben a dimenziókban a sokaságok topológiai/differenciáltopológiai tulajdonságai döntően azok algebrai topológiai invariánsaitól (homotópia- ill. (ko)homológia-csoportok, karakterisztikus osztályok) függenek; lásd az 1.2 fejezetet. A kimaradó $n = 3, 4$ dimenziók túl "kicsik" voltak ahhoz, hogy Smale bizonyításának egyik alapköve, az ún. "Whitney trükk" elvégezhető legyen. A '70-es évek közepén Thurston híres sejtése formájában fogalmazta meg a 3-dimenziós sokaságok osztályozásának egy lehetséges megközelítését. (Erről a sejtésről a későbbiekben — vázlatosan — még lesz szó.) Eszerint $n = 3$-ra a sokaság tulajdonságai döntően annak geometriai tulajdonságaitól függnek.

A 4-dimenziós sokaságok elméletében Freedman és Donaldson '82-es eredményei hoztak döntő áttörést. Egy meglehetősen bonyolult konstrukció segítségével Freedman belátta azt, hogy a Whitney trükk *topologikusan* 4-dimenzióban is elvégezhető, amiből már a (topologikus) $h$-kobordizmus tétel illetve (egyszeresen összefüggő) topologikus 4-sokaságok osztályozása adódott (lásd 2.3 tételt). Egy, a sokaság differenciálgeometriai tulajdonságain alapuló differenciáloperátor megoldásait vizsgálva Donaldson sima struktúra létezésének új akadályát, később pedig sima struktúrák (a korábbiaknál lényegesen érzékenyebb) invariánsát találta meg. 1994-ben ezeket az invariánsokat váltották fel a Seiberg és Witten által definiált — fizikai megfontolásokon alapuló — ún. *Seiberg-Witten* invariánsok. Ezen eredmények által lehetővé vált számos topologikus 4-sokaságon végtelen sok (nem-diffeomorf) sima struktúra, illetve kontinuum sok $\mathbb{R}^4$-gyel homeomorf de vele nem-diffeomorf sima sokaság (ún. egzotikus $\mathbb{R}^4$) létezésének bizonyítása. Sima

4-sokaságok osztályozása azonban még sejtés formájában sem ismert. Bizonyos alosztályok (pl. komplex felületek vagy szimplektikus 4-sokaságok) tulajdonságainak megértésében komoly előrelépések történtek a közelmúltban, a teljes válasz megtalálása azonban reménytelenebbnek tűnik mint valaha.

Ebben a rövid áttekintésben (az $n \neq 4$ dimenziókban elért főbb eredmények felvillantása után) a sima 4-sokaságok elméletében a közelmúltban elért legfontosabb eredményeket, illetve a kutatókat napjainkban leginkább foglalkoztató kérdéseket szeretnénk bemutatni. A különböző témakörökben elmélyedni kívánó olvasó figyelmébe ajánljuk Freedman és Quinn [FQ] topologikus, Donaldson és Kronheimer [DK] sima, Friedman és Morgan [FM] komplex valamint McDuff és Salamon [MdS] szimplektikus 4-sokaságokról szóló könyvét. Morgan rövid jegyzete [Mr1] a Seiberg-Witten elméletbe nyújt bepillantást, míg Gompf és a szerző kötete [GS] több, e cikkben érintett kérdést vizsgál nagyobb alapossággal és ad további referenciákat.

## 1. Sokaságok

Előljáróban tisztázni szeretnénk azokat az objektumokat (és leképezéseket) amikkel a továbbiakban dolgozni fogunk. Egy $X$ topologikus teret *sokaságnak* nevezünk ha minden pontjának van valamely $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részhalmazával homeomorf környezete. Vagyis minden $p \in X$ pontra létezik egy $U \subset X$, $p$-t tartalmazó nyílt halmaz és egy $\varphi_U : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfizmus. (Az $(U, \varphi_U)$ párt egy $p$ körüli térképnek is nevezik.) Fel szokás tenni továbbá, hogy $X$ szeparábilis Hausdorff tér. A továbbiakban (az egyszerűség kedvéért) mi azt is fel fogjuk tenni, hogy $X$ kompakt, így jobbára csak *kompakt sokaságokról* fogunk beszélni. $X$ komponenseit külön-külön vizsgálva feltehető az is, hogy $X$ összefüggő. (Egy nevezetes tétel szerint összefüggő sokaságra a definícióban szereplő $\mathbb{R}^n$-beli $n$ állandó, ilyenkor $n$-dimenziós sokaságról beszélünk.)

**1.1. megjegyzés.** Egy $X$ topologikus teret *peremes sokaságnak* hívunk ha minden pontjának az $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots , x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ felső féltér egy nyílt részével van homeomorf környezete. Azon pontok halmaza, melyek a térképezések során az $\{(x_1, \dots , x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n_+$ altérre képződnek, alkotják $X$ *határát*; ezt a továbbiakban $\partial X$-szel jelöljük. Könnyen belátható, hogy egy $X$ $n$-dimenziós peremes sokaság $\partial X$ határa egy (határ nélküli) $(n-1)$-dimenziós sokaság. Amennyiben $X$ kompakt és perem nélküli (tehát $\partial X = \emptyset$), úgy $X$-et *zárt* sokaságnak nevezik.

Könnyen látható, hogy (az $U$ környezet és $\varphi_U$ esetleges változtatásával) a definícióban szereplő $V$-ről feltehető, hogy $\mathbb{R}^n$ egységgömbjével egyenlő. Ilymódon egy sokaság megadásához azt kell pusztán megértenünk, hogy a különböző pontok körüli egységgömbök hogyan vannak összeragasztva. Egy $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(U_\beta, \varphi_\beta)$ térképpárra képezhető a $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} = g_{\alpha\beta} : V_\alpha \cap V_\beta \to V_\alpha \cap V_\beta$ kompozíció, mely tehát $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részéről képez önmagára. Ezeket a függvényeket *áttérési függvényeknek* hívjuk. Sokaságok feltérképezése tehát nem is tűnik nehéznek: pusztán az áttérési függvények rendszerét kell megértenünk. Ezeket a függvényeket azonban nehézkes megadni, így összehasonlítani is — még nehezebbnek tűnik annak eldöntése, hogy két rendszer mikor határoz meg homeomorf topologikus teret, tehát homeomorf sokaságot.

Az osztályozás kérdése tovább finomítható úgy, hogy az áttérési függvények rendszerére feltételeket szabunk.

**1.2. definíció.** Egy $X$ topologikus tér ($n$-dimenziós) $C^r$*-sokaság*, ha létezik térképek olyan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ rendszere, hogy $\bigcup U_\alpha = X$ és a $g_{\alpha\beta}$ áttérési függvények $r$-szer folytonosan differenciálhatók. $r = 0$-ra a sokaságot *topologikus* sokaságnak, $r = \infty$ esetén pedig *sima* sokaságnak nevezzük. (Amennyiben az áttérési függvények analitikusak, úgy $X$-et $C^\omega$, másképp *valós analitikus* sokaságnak hívjuk.)

**1.3. megjegyzés.** Páros $n = 2m$ esetén $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^m$ $m$-dimenziós komplex térrel azonosítható; amennyiben található olyan térképrendszer, hogy az áttérési függvények holomorfak, úgy $X$-et (evvel a térkép-rendszerrel ellátott) *komplex* (vagy *komplex analitikus*) sokaságnak hívjuk. Ha az áttérési függvények valójában komplex polinomok, akkor $X$ egy *algebrai* sokaság. Ez utóbbi fogalmakkal csak későbbi fejezetekben fogunk (érintőlegesen) foglalkozni.

Két $C^r$-sokaságot azonosnak (vagy $C^r$*-diffeomorfnak*) tekintünk, ha létezik közöttük egy olyan homeomorfizmus, mely a térképeken $C^r$-leképezés. Vegyük észre, hogy $r > 0$ esetén egy $C^r$-sokaságon értelmezett valós értékű függvényről eldönthető, hogy differenciálható-e (a láncszabály szerint ez a tulajdonság nem függ a választott térképtől), a derivált értéke azonban a választott térképtől is függhet, ilymódon egy függvény deriváltja nem lesz a sokaságon definiált függvény. A sokaságok osztályozására korábban feltett kérdésünket tehát így finomíthatjuk: Soroljuk fel az összes $n$-dimenziós (zárt) topologikus sokaságot és mindegyikre döntsük el, ellátható-e $C^1$-struktúrával, és ha igen, hány különböző (nem $C^1$-diffeomorf) struktúrát hordoz. Ezeken a $C^1$-sokaságokon vizsgáljuk meg a különböző $C^2$-struktúrák létét, és így tovább. Első látásra a kérdés túlságosan bonyolultnak látszik, a következő tétel azonban javít a képen:

**1.4. tétel.** *Legyen $X$ adott $C^r$-sokaság és tegyük fel, hogy $r > 0$. Ekkor minden $s \geq r$ esetén ($s = \infty$-t, sőt $\omega$-t is beleértve) létezik a $C^r$-struktúrát definiáló térképrendszernek egy olyan részrendszere, mely $X$-en $C^s$-struktúrát definiál. Az ilymódon kapott $C^s$-struktúra ($C^s$-diffeomorfizmus erejéig) egyértelmű.* □

A tétel szerint tehát pusztán a topologikus sokaságokat kell felsoroljuk, majd mindegyik mellé azt kell feljegyezzük, hogy hordoz-e sima struktúrát (és ha igen, hány nem-diffeomorfat). A továbbiakban a fenti kérdésnek $n = 4$ esetére adott (részleges) válaszát szeretnénk ismertetni — ahhoz azonban, hogy a 4-dimenziós eset furcsaságait megértsük, röviden át kell tekintenünk a más dimenziókban eddig elért eredményeket. Mielőtt ezt elkezdenénk, meg kell azonban ismerkednünk két alapvető definícióval.

**1.5. definíció.** Egy $(X, \partial X)$ (esetleg peremes) $n$-dimenziós (topologikus) sokaságot *irányítható* sokaságnak nevezünk, ha $H_n(X, \partial X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. A fenti $(X, \partial X)$ egy *irányítását* $H_n(X, \partial X; \mathbb{Z})$ egy generátorának rögzítésével adjuk meg. (A választott generátort $[X]$-szel jelöljük, és az irányított sokaság *fundamentális osztályának* nevezzük.) A $-[X] \in H_n(X, \partial X; \mathbb{Z})$ generátor rögzítésével fordíthatjuk meg egy adott (irányított) $X$ sokaság irányítását; a kapott irányított sokaságot ilyenkor $\overline{X}$-szel szokás jelölni.

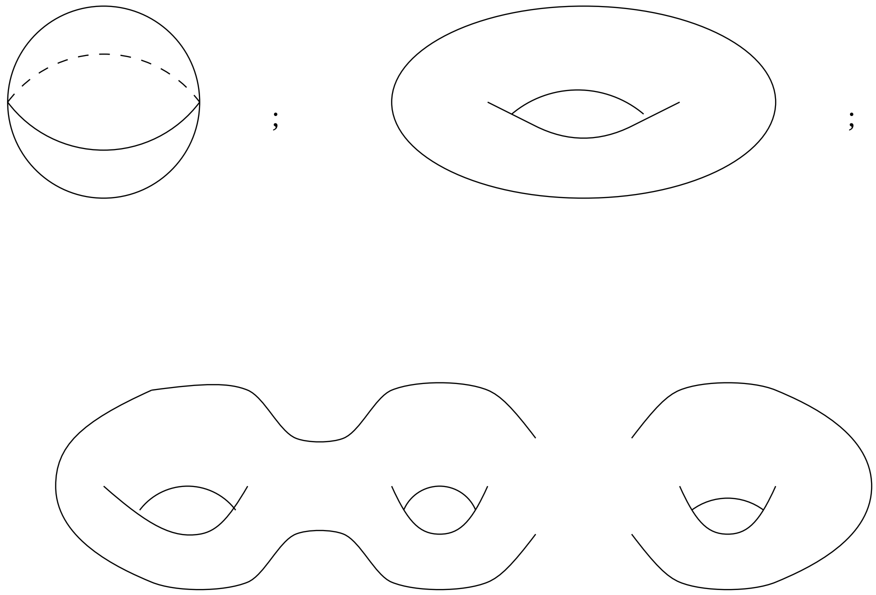
**1.6. megjegyzés.** Egy vektortér irányításán általában egy bázisában a vektorok sorrendjének (páros permutáció erejéig történő) rögzítését értjük. Egy sima sokaság irányítását pedig úgy szokás megadni, hogy minden pont érintőterét (a fenti értelemben) irányítjuk, és feltesszük, hogy közeli pontokon az irányítások kompatibilisek. Nem túl nehéz érvelés (lásd pl. [MS]) mutatja, hogy ez a fogalom és a fenti definíció valójában ekvivalensek. További érvelésünkben mi a fenti definícióban leírt megközelítést fogjuk alkalmazni; vegyük észre, hogy az a $C^0$ (topologikus) esetben is alkalmazható, (míg az érintőtér létezéséhez a sokaság simaságát szükséges feltételezni).

Legyen most $X$ irányított $n$-dimenziós sima sokaság, $Y_1, Y_2$ pedig egymást transzverzálisan metsző $k$- és $(n-k)$-dimenziós beágyazott, zárt, irányított részsokaságok $X$-ben. Ekkor egy $p \in Y_1 \cap Y_2$ metszéspontban $T_pY_1$ egy pozitív bázisát $T_pY_2$ egy pozitív bázisával összefűzve $T_pX$ egy bázisát kapjuk; $p$ pozitív metszéspont ha ez a bázis pozitív, és negatív egyébként. A metszéspontok előjeleit összeadva $Y_1$ és $Y_2$ *algebrai metszésszámát*, $Y_1 \cdot Y_2$-t kapjuk meg. (Az $Y_1 \cap Y_2$ halmaz elemszámát a két részsokaság *geometriai metszésszámának* nevezzük.) Vegyük észre, hogy $Y_1 \cdot Y_2$ és $Y_2 \cdot Y_1$ nem feltétlenül egyenlő: $k$ és $n$ paritásától függően előjelük különbözhet.

1.1. **Alacsony dimenziók.** Aránylag egyszerű feladat belátni azt, hogy egyetlen 1-dimenziós (zárt, összefüggő) topologikus sokaság létezik, mely az $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ körvonallal homeomorf. Ez a sokaság egyértelműen látható el sima struktúrával; a megfelelő térképek megtalálását az olvasóra bízzuk. A zárt 2-dimenziós felületek leírása a topológia egy klassszikusnak számító fejezete. Szorítkozzunk most arra az esetre, amikor a sokaságról feltesszük, hogy irányítható.

**1.7. tétel.** *Tegyük fel, hogy $X$ egy zárt, összefüggő, irányítható topologikus 2-sokaság. Ekkor $X$ valamilyen $g \geq 0$-ra a $g$ nemű $\Sigma_g$ Riemann felülettel homeomorf (lásd az 1. ábrát). Minden fenti sokaság egyértelműen látható el sima struktúrával.* □

(A $\Sigma_g$ Riemann felületek valójában komplex analitikus, sőt algebrai struktúrával is elláthatók.) Vegyük észre, hogy $\Sigma_g$ valójában $g$ darab $\Sigma_1 = S^1 \times S^1 = T^2$ tóruszból rakható össze a



Ábra 1. Riemann felületek

következő, *összefüggő összeg* nevű operáció segítségével.

**1.8. definíció.** Legyenek $X_1, X_2$ $n$-dimenziós sokaságok és $\varphi_i \colon D^n \to X_i$ $(i = 1, 2)$ az $n$-dimenziós $D^n$ golyó beágyazásai. Ekkor az $X_1 - \varphi_1(\text{int } D^n) \cup X_2 - \varphi_2(\text{int } D^n)/\sim$ faktort (ahol $\varphi_1(x) \sim \varphi_2(x)$ minden $x \in \partial D^n$) az $X_1$ és $X_2$ összefüggő összegének nevezzük és $X_1 \# X_2$-vel jelöljük. (Belátható, hogy összefüggő $C^r$-sokaságok esetén az összefüggő összeg egyértelműen látható el $C^r$-struktúrával.)

Könnyen látható, hogy $\Sigma_g \# \Sigma_h = \Sigma_{g+h}$, így tehát $\Sigma_g = \# g \Sigma_1$ (ahol $\# 0 \Sigma_1$ jelentse az $S^2$ gömbfelületet). Összegezve tehát, minden (zárt, irányítható) 2-dimenziós sokaság $S^1$-ből és $S^2$-ből építhető fel a direkt szorzat és az összefüggő összeg alkalmazásával.

Térjünk rá most a 3-dimenziós eset tárgyalására. A következő tétel szerint ebben a dimenzióban (hasonlóan az 1- ill. 2-dimenzióban látottakhoz) nem kell a topologikus és sima eset között különbséget tenni, hiszen

**1.9. tétel.** ([Mo]) *Minden irányított, zárt topologikus 3-sokaság egyértelműen látható el sima struktúrával.* □

**1.10. definíció.**
- Egy $M$ 3-sokaság *prím* ha minden $M = M_1 \# M_2$ összefüggő összegre bontás esetén $M_1$ vagy $M_2$ az $S^3$ gömbfelülettel azonosítható. $M$ *irreducibilis*, ha nem tartalmaz olyan beágyazott $S^2$-t, mely $M$-et két részre bontja. (Könnyen belátható, hogy egy prím 3-sokaság vagy irreducibilis vagy $S^1 \times S^2$-vel homeomorf.)
- Egy $i\colon \Sigma_g \hookrightarrow M$ beágyazás *összenyomhatatlan*, ha az indukált $i_*\colon \pi_1(\Sigma_g) \to \pi_1(M)$ homomorfizmus injektív.
- Egy $M$ zárt 3-sokaság *egyszerű*, ha nem tartalmaz összenyomhatatlan tóruszt. Egy peremes 3-sokaságot pedig akkor nevezünk egyszerűnek, ha minden összenyomhatatlan tórusz a perem egy részével izotóp.
- Legyen $S_{p,q}$ az az $S^1$-fóliázott 3-sokaság melyet $[0,1] \times D^2$ faktoraként állítunk elő úgy, hogy a $\{0\} \times D^2$ és $\{1\} \times D^2$ golyókat egy $2\pi \frac{p}{q}$ szögű forgatással azonosítjuk ($\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$). A természetesen adódó $S^1$-fóliázást $S_{p,q}$-n a következő módon kapjuk: $[0,1] \times \{0\}$ maga egy $S^1$-et, míg a $[0,1] \times \{x_i\} \subset [0,1] \times D^2$ ($i = 0, \ldots, q-1$; és $x_i = x_0 \cdot \xi^i$ egy primitív $q$-adik egységgyökre) szakaszok egyesítése további $S^1$-eket definiál az $S_{p,q}$ faktortérben. (Vegyük észre, hogy $S_{p,q}$ a $S^1 \times D^2$ 3-sokasággal diffeomorf; ez a diffeomorfizmus azonban nem feltétlenül őrzi meg a fóliázást.) Az $M$ 3-sokaság *Seifert fibrált* ha létezik rajta olyan $S^1$-fóliázás, melynek minden fibrumára létezik annak olyan környezete, mely valamely fenti $S_{p,q}$ sokasággal fibrumtartó módon diffeomorf.

**1.11. tétel.** (Kneser és Milnor) *Minden 3-sokaság (a sorrendtől eltekintve) egyértelműen bontható fel prímek összefüggő összegére.* □

A következőkben tehát minding feltesszük, hogy $M$ prím. Az alábbi tétel alapvetőnek bizonyult 3-sokaságok feltérképezésében

**1.12. tétel.** (Jaco-Shalen, Johansson) *Minden $M$ prím 3-sokaság tartalmazza beágyazott tóruszoknak egy (izotópia erejéig egyértelmű) $(T_1, \ldots, T_k)$ rendszerét úgy, hogy $M - \cup_{i=1}^k T_i$ komponenseinek lezártjai (mint peremes 3-sokaságok) vagy egyszerűek vagy Seifert fibráltak.* □

Informálisan tehát a fenti két tétel értelmében gömbök menti vágásokkal egy 3-sokaság prímekre, ezek pedig tóruszok menti vágásokkal egyszerű vagy Seifert fibrálható részekre bonthatók fel. A megfelelő $\frac{p}{q}$ paraméterek, illetve az $S^1$-hatás faktoraként kapható 2-dimenziós sokaságok ismeretében a Seifert fibrált 3-sokaságok jól áttekinthetők. 3-sokaságok teljes feltérképezéséhez tehát csak az egyszerű 3-sokaságokat kell jobban megértenünk. Erre a kérdésre Thurston adott — híres sejtése formájában — választ 1976-ban; sejtését azonban (számos speciális esetet leszámítva) azóta sem sikerült igazolni. A sejtés kimondásához két esetet kell — a sokaság fundamentális csoportja alapján — megkülönböztetnünk.

**1.13. sejtés.** *Egy véges fundamentális csoportú 3-sokaság az $S^3/G$ faktorral diffeomorf, ahol $G \subset Isom(S^3)$. (Itt $Isom(S^3)$ a 3-dimenziós gömbfelület izometriáinak csoportját jelenti, ahol $S^3$-at a természetes metrikával láttuk el.)*

**1.14. megjegyzés.** A fenti sejtés az alábbi két (híres) megoldatlan problémával ekvivalens:

1. Ha egy $M$ (zárt) 3-sokaságra $\pi_1(M) = 1$, akkor $M$ az $S^3$ gömbfelülettel diffeomorf. (*Poincaré sejtés.*)
2. Egy $G$ véges csoport $S^3$-on értelmezett szabad hatása egy lineáris csoporthatással ekvivalens, vagyis $G$ az $Isom(S^3)$ csoport részcsoportjának tekinthető.

Végtelen fundamentális csoportú egyszerű 3-sokaságokra találta Thurston nevezetes *geometrizálhatósági* sejtését:

**1.15. sejtés.** (Thurston) *Tegyük fel, hogy $M$ olyan végtelen fundamentális csoportú, egyszerű 3-sokaság, melyen nem létezik Seifert fibrálás. Ekkor $M$ a $\mathbb{H}^3/G$ faktorral diffeomorf valamely $G \subset Isom(\mathbb{H}^3)$ részcsoportra, ahol $\mathbb{H}^3$ a 3-dimenziós hiperbolikus teret jelöli.*

**1.16. megjegyzés.** A fenti sejtés tehát úgy is megfogalmazható, hogy egy egyszerű, végtelen fundamentális csoportú (nem Seifert fibrálható) 3-sokaság hiperbolikus struktúrával (vagyis konstans $-1$ görbületű Riemann metrikával) látható el. A Mostow-Prasad merevségi tétel értelmében amennyiben $M$-en létezik hiperbolikus metrika, úgy az egyértelmű. Ilymódon tehát (a sejtés értelmében) 3-sokaságok topológiáját azok geomteriai tulajdonságai határozzák meg.

Bár az eddigben csak irányítható, zárt 3-sokaságokról beszéltünk, az elmélet nagy része (kettős fedés vételével) kiterjed a nemirányítható esetre is, néhány definíció módosításával pedig az eredmények peremes 3-sokaságokra is általánosíthatóak. Könnyen belátható az is, hogy egy $\Sigma_g$ Riemann felület $g \geq 2$ esetén hiperbolikus struktúrával látható el, vagyis $\mathbb{H}^2/\pi_1(\Sigma_g)$ alakban áll elő. (Ismert az is, hogy $T^2 = \Sigma_1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.) Ilymódon tehát a 2-dimenziós sokaságok elmélete is megfogalmazható a sokaságon értelmezhető speciális görbületű metrikák segítségével. (Bővebben erről lásd [Th] illetve [N] munkákat.) Összefoglalva tehát $n \leq 3$ esetén a topologikus és sima osztályozás között semmi különbség nincs, és az osztályozásban a sokaság geometriai tulajdonságai játszanak főszerepet. Térjünk most rá az $n \geq 5$ eset tárgyalására.

1.2. **Magasabb dimenziók.** Mint ahogy azt látni fogjuk, $n \geq 5$ esetén az $n$-dimenziós sokaságok tulajdonságait alapvetően azok algebrai topológiai tulajdonságai döntik el. A továbbiak tárgyalása előtt azonban egy újabb feltételt kell kirónunk a vizsgálandó sokaságokra, mivel

**1.17. tétel.** *Tetszőleges $G$ végesen prezentált csoportra és $n \geq 4$ egészre létezik olyan zárt, irányítható $n$-dimenziós $M$ sima sokaság, melyre $\pi_1(M) \cong G$ teljesül.* $\square$

Mivel pedig a (végesen prezentálható) csoportok izomorfizmus-problémája algoritmikusan meg nem oldható feladat, tetszőleges fundamentális csoportú $n$-sokaságok teljes osztályzása sem várható $n \geq 4$ esetén. A továbbiakban tehát feltesszük majd, hogy a vizsgált sokaságokra $\pi_1 = 1$ teljesül, azaz csak zárt, irányítható, *egyszeresen összefüggő* sokaságok vizsgálatára szorítkozunk.

Legyen tehát $M$ egy fenti tulajdonságokkal rendelkező $n$-sokaság, és tekintsük $k \leq n$-re a $D^k \times D^{n+1-k}$ (egyébként a $D^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq 1\}$ golyóval homeomorf) $(n+1)$-*dimenziós $k$-fogantyút*. (A $k$ számot a fogantyú *indexének* fogjuk nevezni.) Egy $\varphi \colon \partial D^k \times$

$D^{n+1-k} \to M \times \{1\}$ beágyazást rögzítve a $W = M \times [0,1] \cup_\varphi D^k \times D^{n+1-k}$ peremes $(n+1)$-sokaság képezhető. ($W$ tehát úgy keletkezik, hogy $M \times [0,1]$ és $D^k \times D^{n+1-k}$ határainak egy részét $\varphi$ segítségével azonosítva képezzük a megfelelő faktorteret, mely egyértelműen látható el sokaság-struktúrával.) $W$ határának két komponense az $M = M \times \{0\}$ illetve az $M' = (M \times \{1\} - \varphi(\partial D^k \times D^{n+1-k})) \cup_{\varphi|\partial D^k \times \partial D^{n+1-k}} (D^k \times \partial D^{n+1-k})$ sokaságokkal azonosítható. A $W$ $(n+1)$-sokaságot $M$ és $M'$ közötti *elemi kobordizmusnak* nevezzük, $M'$-re pedig azt mondjuk, hogy $M$-ből $\varphi$ menti *műtéttel* kapható meg. Egy elemi kobordizmus indexén a benne szereplő fogantyú indexét értjük.

**1.18. definíció.** A $\varphi(\partial D^k \times \{0\}) \subset M$ gömböt a fogantyú *ragasztási gömbjének*, míg a $\{0\} \times \partial D^{n+1-k} \subset M'$ gömböt a fogantyú *övgömbjének* hívjuk.

Általánosabban, adott $M_1, M_2$ zárt, irányított $n$-sokaságokra a $W$ irányított, kompakt $(n+1)$-sokaság egy *kobordizmus*, ha $\partial W = M_1 \cup \overline{M}_2$; szemléletesen szólva, $W$ egy hártya $M_1$ és $M_2$ között. Vegyük észre, hogy egy $M_1$ és $M_2$ közötti $W_1$ és egy $M_2$ és $M_3$ közötti $W_2$ kobordizmus egy $f\colon M_2 \to M_2$ azonosítást rögzítve egy $W$, $M_1$ és $M_3$ közötti kobordizmussá fűzhető össze.

**1.19. tétel.** ([M2]) *Egy adott $W$ sima kobordizmusra létezik elemi kobordizmusok olyan $W_1, \dots, W_n$ sorozata, hogy $W_i$-k alkalmas összefűzésével éppen $W$-t kapjuk meg. Feltehető továbbá, hogy a $W_i$-ben szereplő fogantyú $k_i$ indexére $k_1 \leq \ldots \leq k_n$ teljesül.* □

(A fenti tétel $n > 3$-at feltételezve valójában topologikus kobordizmusokra is teljesül.) A következő (elemi úton bizonyítható) tétel a továbbiakban alapvető fontosságú lesz.

**1.20. tétel.** *Tegyük fel, hogy $W_1$ és $W_2$ (szomszédos indexű) elemi kobordizmusok $M_1$ és $M_2$ valamint $M_2$ és $M_3$ között, és $M_2$-ben $W_1$ övgömbje pontosan egy pontban (transzverzálisan) metszi $W_2$ ragasztási gömbjét. Ekkor a $W_1$ és $W_2$ összefűzésével kapott $W$ kobordizmus triviális, azaz $M \times [0,1]$-gyel diffeomorf. Speciálisan, $M_1$ és $M_3$ diffeomorf sokaságok.* □

Egy fent leírt ($W_1$ és $W_2$ elemi kobordizmusokkal megadott) fogantyúpárt *elhagyható párnak* szokás nevezni. Vegyük észre, hogy az összefűzéshez használt $f$ azonosítást $M_2$ egy izotópiájával megváltoztatva az eredményül kapott $W$ sokaság diffeomorfizmus-osztálya nem változik. Most már kimondhatjuk a magasabb dimenziós sokaságok osztályozásában használt legfontosabb tételt:

**1.21. tétel.** ($h$-kobordizmus tétel, [S], [M3]) *Legyenek $M_1, M_2$ egyszeresen összefüggő $n$-dimenziós (zárt, irányított) sokaságok és $W$ olyan kobordizmus köztük, melyre az $i_j\colon M_j \to W$ beágyazások homotopikus ekvivalenciák ($j = 1, 2$). $n \geq 5$ esetén ebből következik, hogy $W$ a triviális $M \times [0,1]$ kobordizmussal azonos, így $M_1$ és $M_2$ diffeomorfak.*

*Bizonyítás* (*vázlat*). Rögzítsük $W$-nek egy $W_1, \dots, W_n$ elemi kobordizmusok összefűzöttjeként való felbontását. Azt kell pusztán megmutatnunk, hogy az elemi kobordizmusok úgy is megválaszthatók, hogy a $W_{2i-1}, W_{2i}$ kobordizmusok fogantyúi elhagyható párokat alkossanak, így az 1.20 tétel értelmében (indukciót alkalmazva) a tétel bizonyítása könnyen adódik. Egyszerű algebrai megfontolásokat igényel csak annak megmutatása, hogy $W$-nek létezik olyan $W_1, \dots, W_n$ felbontása, melyben a $W_{2i-1}, W_{2i}$ párok megfelelő (ragasztási és öv-) gömbjei *algebrailag* egyszer metszik egymást, azaz a két gömb $\{p_0, p_1, q_1, \dots, p_t, q_t\}$ metszépontjai párokba állíthatók úgy ($p_0$ kivételével), hogy $p_i$ és $q_i$ előjele különböző. (Ezen $W_1, \dots, W_n$ sorozat megtalálásához kell felhasználnunk a $W$ kobordizmusra a tételben kirótt algebrai topológiai feltételt; az ilyen tulajdonságú kobordizmusokat *$h$-kobordizmusoknak* nevezzük.)

A $h$-kobordizmus tétel belátásához azt kell tehát belátnunk, hogy ha a $W_1, W_2$ elemi kobordizmusok ragasztó és övgömbjei algebrailag egy pontban metszik egymást, akkor alkalmas izotópiát alkalmazva a $\{p_i, q_i\}$ ellentétes előjelű metszéspont-párok eltüntethetők, így az 1.20 tétel alkalmazásával a bizonyítás meg is lenne. A fent vázolt terv $n \geq 5$ esetre való keresztülvihetőségét mutatja meg a következő lemma. (Vegyük észre, hogy a $h$-kobordizmus tétel bizonyításának ez az egyetlen lépése, ahol az $n \geq 5$ feltételt alkalmazzuk — a további lépések $n = 4$ esetén is helyesek.)

**1.22. lemma.** (Whitney-trükk) *Legyen $X$ egyszeresen összefüggő (irányított) $n$-dimenziós sokaság, az $Y_1, Y_2 \subset X$ zárt, irányított $k$- és $(n-k)$-dimenziós részsokaságokról pedig tegyük fel, hogy egymást transzverzálisan metszik, $k \geq 2$ és $n - k \geq 3$ (és $k = 2$ esetén $\pi_1(X - Y_2) = 1$). Legyenek továbbá $p, q \in Y_1 \cap Y_2$ ellentétes előjelű metszéspontok. Ekkor $n \geq 5$ esetén létezik egy olyan $\varphi\colon X \to X$ izotópia, hogy $Y_1 \cap \varphi(Y_2) = Y_1 \cap Y_2 - \{p, q\}$ — vagyis $Y_1$ és $\varphi(Y_2)$ metszetéből $p$ és $q$ eltüntethető.*

**1.23. megjegyzés.** Whitney a fenti állítást valójában egy másik nevezetes tétel bizonyításához dolgozta ki. Könnyen belátható ugyanis, hogy egy $M^n$ $n$-dimenziós sokaság $\mathbb{R}^{2n+1}$-be ágyazható. (Valójában egy generikus $M^n \to \mathbb{R}^{2n+1}$ leképezés — dimenzió okokból — beágyazás lesz.) Hasonlóan mutatható meg, hogy kompakt $M^n$ esetén egy generikus $M^n \to \mathbb{R}^{2n}$ leképezés véges sok (transzverzális) önátmetszést tartalmaz. Whitney belátta azt, hogy a fent ismertetett Whitney trükk megfelelő formáját alkalmazva ezek az önátmetszések eltüntethetők, vagyis a generikus $M^n \to \mathbb{R}^{2n}$ leképezés beágyazássá tehető. (Jóval összetettebb eszközöket igényel annak belátása, hogy ha $M^n$ irányítható, akkor az már $\mathbb{R}^{2n-1}$-be is beágyazható. Az $\mathbb{RP}^{2^k}$ $2^k$-dimenziós valós projektív terek olyan sokaságokra adnak példát, melyek nem ágyazhatók be $\mathbb{R}^{2^k-1}$-be, ld. [MS].)

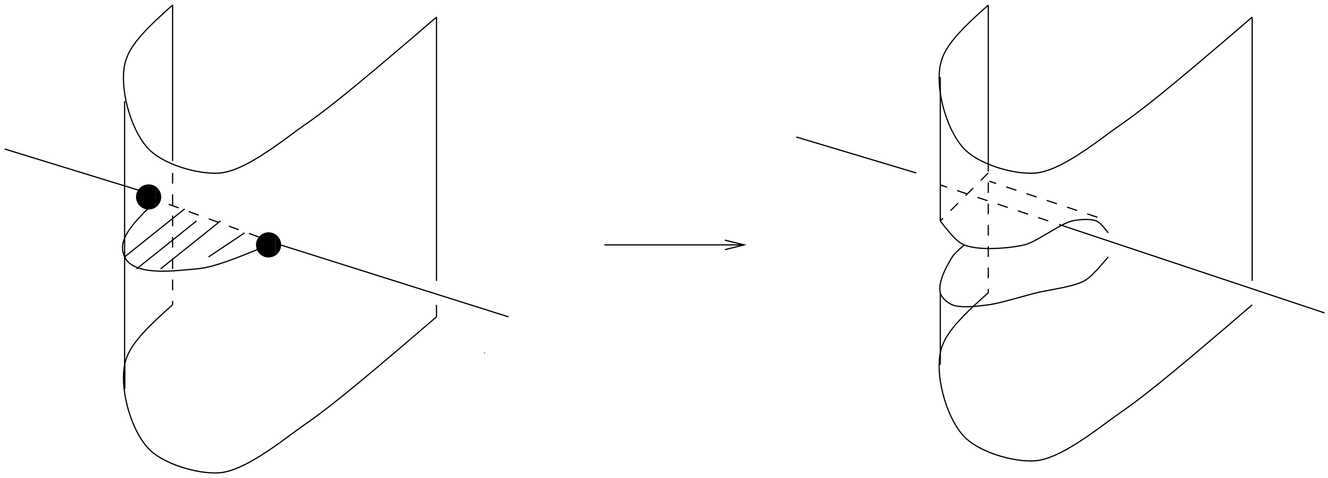
*Bizonyítás* (*vázlat*). A Whitney trükk bizonyítása vázlatosan a következő módon megy: Legyen $\gamma_1$ és $\gamma_2$ a $p$ és $q$ pontokat $Y_1$-ben és $Y_2$-ben összekötő egy-egy út. A feltételekből következik, hogy $\gamma_1 \cup \gamma_2$ egy $X - (Y_1 \cup Y_2)$-be képzett $D^2$ golyó határaként állítható elő. Mivel $X$ dimenziója legalább 5, erről a körlapról feltehető, hogy beágyazott, így környezete $D^2 \times D^{n-2}$-vel azonosítható. Ekkor pedig a megfelelő izotópia megtalálása lokális problémává redukálódik, aminek megoldása egyszerű feladat. (Az $n = 3, k = 1$ esetre lásd a 2. ábrát.) □

A Whitney trükk ismételt alkalmazásával (az $n \geq 5$ feltételt figyelembe véve, és a $k = 1$ esetet külön kezelve) a $h$-kobordizmus tétel bizonyítása most már nem túlságosan nehéz. □

A $h$-kobordizmus tétel következményeként látta be Smale az ún. *általánosított Poincaré sejtést* $n \geq 5$ esetén:

**1.24. tétel.** (Smale, [S]) *Ha $M^n$ egyszeresen összefüggő, $n$-dimenziós sima zárt sokaság, melyre $n \geq 5$ és $H_*(M^n; \mathbb{Z}) \cong H_*(S^n; \mathbb{Z})$ teljesül, akkor $M^n$ homeomorf az $S^n$ $n$-dimenziós gömbfelülettel.* □

**1.25. megjegyzés.** Freedman 2.3 tételének egy speciális esete a fenti állítás $n = 4$ esetén; az $n = 3$ eset pedig éppen a Poincaré sejtéssel azonos. Vegyük észre, hogy Milnor nevezetes eredménye [M1] alapján a tételben szereplő homeomorfizmus nem cserélhető diffeormofizmusra.



ÁBRA 2. Whitney trükk

Az általános (tehát nem csak gömbbel homotóp ekvivalens sokaságokat vizsgáló) eset tárgyalásához néhány fogalom (vázlatos) tisztázására van szükségünk. Rögzítsünk tehát egy (zárt, irányított, egyszeresen összefüggő) $M$ $n$-sokaságot, és vegyük azon $(N, f)$ párok terét, melyekre $N$ egy topologikus (ill. sima) $n$-sokaság és $f\colon N \to M$ egy homotóp ekvivalencia. Két ilyen $(N_1, f_1)$, $(N_2, f_2)$ párt ekvivalensnek mondunk, ha létezik egy olyan $g\colon N_1 \to N_2$ homeomorfizmus (ill. diffeomorfizmus), melyre $f_1$ homotóp $f_2 \circ g$-vel. Az ekvivalencia-osztályok $\mathfrak{St}_{top}$ (ill. $\mathfrak{St}_{diff}$) terét *homotóp topologikus struktúráknak* (illetve *homotóp sima struktúráknak*) nevezzük. Hasonlóan, egy $M$ topologikus $n$-sokaságra vehető azon $(N, f)$ párok tere, melyekre $N$ sima sokaság és $f\colon N \to M$ egy homeomorfizmus. (Az $(N_1, f_1)$ és $(N_2, f_2)$ párok ekvivalensek, ha létezik olyan $g\colon N_1 \to N_2$ diffeomorfizmus, melyre $f_1$ és $f_2 \circ g$ topologikusan izotópak.) Az ekvivalencia-osztályok $Sm(M)$ terét $M$ *simításainak* hívjuk.

Egy (topologikus vagy sima) $N$ $n$-sokaságra annak *racionális Pontrjagin osztálya*, $L(N) \in H^*(N; \mathbb{Q})$ definiálható. (Ezek a kohomológia-osztályok a differenciáltopológiából jól ismert megfelelő *karakterisztikus osztályok* általánosításai; ez utóbbiakba nyújt bevezetést [MS].) Egy $(N, f) \in \mathfrak{St}_{top}(M)$ (ill. $\mathfrak{St}_{diff}(M)$) párra vegyük az $(f^*)^{-1}(L(N))L(M)^{-1} \in H^*(M; \mathbb{Q})$ kohomológia elemet. Ilymódon egy $\mathfrak{L}_{top}\colon \mathfrak{St}_{top}(M) \to H^*(M; \mathbb{Q})$ és egy $\mathfrak{L}_{diff}\colon \mathfrak{St}_{diff}(M) \to H^*(M; \mathbb{Q})$ függvényt kapunk. A fent ismertetett $h$-kobordizmus tétel segítségével igazolható a következő

**1.26. tétel.** *Legyen $M$ (zárt, irányított, egyszeresen összefüggő) $n$-dimenziós sokaság, és tegyük fel, hogy $n \geq 5$. Ekkor minden $x \in H^*(M; \mathbb{Q})$ elemre az $\mathfrak{L}_{top}^{-1}(x)$ és $\mathfrak{L}_{diff}^{-1}(x)$ fibrumok, valamint az $Sm(M)$ halmaz végesek.* □

A tétel szerint tehát $n \geq 5$ esetén $M$ homotópia típusa (amit homotópia- és homológiacsoporjaival határozhatunk meg) valamint egy $H^*(M; \mathbb{Q})$-beli elem — véges sok lehetőség erejéig — meghatározza $M$ topologikus (illetve sima) struktúráját. Továbbá, egy $M$ (zárt, irányított, egyszeresen összefüggő) topologikus $n$-sokaságon ($n \geq 5$ esetén) véges sok különböző sima struktúra létezhet csak.

**1.27. megjegyzés.** $\mathfrak{L}_{top}$ és $\mathfrak{L}_{diff}$ képeinek meghatározása, illetve az $\mathfrak{L}_{top}^{-1}(x)$, $\mathfrak{L}_{diff}^{-1}(x)$ (és az $Sm(M)$) véges halmazok elemszámainak kiszámítása algebrai topológiai (és számelméleti) eszközöket igénylő feladat. Ismert például, hogy $|Sm(S^6)| = 1$, $|Sm(S^7)| = 28$, stb. Ebben az értelemben mondhatjuk tehát, hogy magas ($n \geq 5$) dimenziós sokaságok osztályozásának elmélete algebrai topológiai eszközöket igénylő, és lényegében megoldott feladat.

Nem nehéz belátni azt, hogy egy zárt (tehát kompakt) topologikus sokaság legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok nem-diffeomorf sima struktúrát hordozhat csak. A fentiek szerint $n \geq 5$-re ez a szám valójában véges ($n \leq 3$-ra pedig 1); mint majd látni fogjuk, léteznek olyan zárt (egyszeresen összefüggő) topologikus 4-sokaságok, melyek megszámlálhatóan végtelen sok sima struktúrát hordoznak. (A nem-kompakt eset még furcsább: a legtöbb nyílt 4-sokaság — köztük a standard euklideszi tér, $\mathbb{R}^4$ is — kontinuum sok különböző sima struktúrával látható el.)

## 2. Négy-dimenziós sokaságok

Az előző fejezetbeli előkészítések után most rátérünk a 4-dimenziós eset tárgyalására. Legyen tehát $X$ egy (zárt, irányított, egyszeresen összefüggő) topologikus 4-sokaság. A $Q_X\colon H^2(X;\mathbb{Z})\times H^2(X;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, $Q_X(a,b) = \langle a\cup b, [X]\rangle \in \mathbb{Z}$ formulával definiált szimmetrikus bilineáris formát $X$ *metszetformájának* nevezzük.

**2.1. megjegyzés.** $X$ simaságát feltételezve $Q_X$ a következő alternatív definícióval adható meg: Poincaré dualitást alkalmazva kapjuk, hogy $H^2(X;\mathbb{Z}) \cong H_2(X;\mathbb{Z})$; belátható továbbá, hogy minden $\alpha \in H_2(X;\mathbb{Z})$-re létezik egy olyan beágyazott (zárt, irányított) $\Sigma_\alpha$ 2-sokaság, hogy annak fundamentális osztálya éppen $\alpha$-val egyenlő. Az $a, b \in H^2(X;\mathbb{Z})$ elemek Poincaré duálisait $\alpha, \beta$-val jelölve mármost belátható az, hogy $Q_X(a,b)$ egyenlő a $\Sigma_\alpha$ és $\Sigma_\beta$ beágyazott részsokaságok algebrai metszetével. Ez az egyenlőség megmagyarázza $Q_X$ elnevezését is.

Poincaré dualitást alkalmazva könnyen belátható, hogy $Q_X$ *unimoduláris*, vagyis tetszőleges bázisban felírva mátrixának determinánsa $\pm 1$. Vegyük észre, hogy (mivel feltettük, hogy $X$ egyszeresen összefüggő) $Q_X$ valójában leírja $X$ kohomológia-gyűrűjét, ilymódon $X$ minden "homotopikus adatát" tárolja. Whitehead következő tétele szerint $Q_X$ meg is határozza $X$ homotópia-típusát:

**2.2. tétel.** *Az $X_1, X_2$ (zárt, irányított, egyszeresen összefüggő) topologikus 4-sokaságok pontosan akkor homotóp ekvivalensek, ha metszetformáik izomorfak.* $\square$

Metszetformája alapján egy topologikus 4-sokasághoz 3 alapvető invariánst rendelhetünk. Jelölje $b_2(X)$ a $H^2(X;\mathbb{Z})$ kohomológia-csoport rangját. Ekkor $X$ egyszeres összefüggősége miatt $X$ *Euler karakterisztikája*, $\chi(X)$ egyenlő $b_2(X) + 2$-vel. (A $b_2(X)$ második Betti számot $Q_X$ rangjának is szokás hívni, amit $rk(Q_X)$-szel jelölünk.) $Q_X$ fenti definícióját általánosítva a metszetformát terjesszük ki a $H^2(X;\mathbb{R})$ valós vektortérre és diagonalizáljuk ezt a szimmetrikus (valós értékű) bilineáris formát $\mathbb{R}$ felett. A főátlóban álló $+1$-ek számát jelöljük $b_2^+(X)$-szel, a $-1$-ek számát pedig $b_2^-(X)$-szel. $X$ *szignatúrája* definíció szerint a $\sigma(X) = b_2^+(X) - b_2^-(X)$ különbséggel egyenlő. Végezetül $X$ *páros*, ha minden $a \in H^2(X;\mathbb{Z})$ esetén $Q_X(a,a) \in \mathbb{Z}$ egy páros szám és *páratlan* egyébként. Whitehead fent idézett homotopikus klasszifikációjának topologikus változataként fogható fel Freedman nevezetes eredménye:

**2.3. tétel.** (Freedman, [F], [FQ]) *Legyen $Q$ páros, szimmetrikus bilineáris forma. Ekkor (homeomorfizmus erejéig) egyetlen olyan topologikus (zárt, irányított, egyszeresen összefüggő)*

*$X$ 4-sokaság létezik, melyre $Q \cong Q_X$. Páratlan $Q$ esetén pontosan két, egymással nem homeomorf olyan topologikus 4-sokaság létezik, melynek metszetformája az adott $Q$-val egyenlő. (E két sokaság közül legfeljebb az egyik látható el sima struktúrával.)* □

A tétel (meglehetősen bonyolult) bizonyítása azon az észrevételen alapul, hogy bár a Whitney trükk csak $n \geq 5$-re végezhető el simán, topologikus izotópiát megengedve már $n = 4$-re is igaz lesz. (Erről még a 4. fejezetben szó lesz.) Ilymódon a topologikus (egyszeresen összefüggő) 4-sokaságok elmélete (a magasabb dimenzióban tapasztaltakhoz hasonlóan) a metszetforma — vagyis a sokaság egy homotopikus invariánsa — megértésére redukálódik.

**2.4. megjegyzés.** Freedman fenti tételének bizonyítása a következő, Walltól származó eredményen alapszik: Két sima (zárt, egyszeresen összefüggő) 4-sokaság pontosan akkor $h$-kobordáns, ha metszetformáik izomorfak. (Az már korábban ismert volt, hogy két sima zárt 4-sokaság pontosan akkor kobordáns, ha szignatúrájuk megegyezik.) Mivel a $h$-kobordizmus tétel bizonyításának — a Whitney trükköt leszámítva — minden lépése alkalmazható $n = 4$ esetén is, a Whitney trükk topologikus bizonyítása $n = 4$-re azt adja, hogy izomorf metszetformájú sima 4-sokaságok homeomorfak. $X$ simasága helyett $X - \{\text{egy pont}\}$ simaságát feltételezve Freedman végigvitte a fent vázolt programot, majd (Quinn egy eredményét alkalmazva) belátta, hogy minden $X$ topologikus 4-sokaságra teljesül az, hogy $X - \{\text{egy pont}\}$ sima. Végül (a fogantyú ragasztás korábban ismertetett módszerét alkalmazva) megfelelő topologikus 4-sokaságokat konstruálva fejezte be fent ismertetett tételének bizonyítását.

Klasszikus algebrai eredmények szerint egy *indefinit* formát $rk$ rangja, $\sigma$ szignatúrája és paritása már meghatározza. Pontosabban: egy $Q$ páratlan, indefinit forma alkalmas bázisban az $n\langle 1\rangle \oplus m\langle -1\rangle$ diagonális mátrixszal adható meg (itt $n = \frac{rk(Q)+\sigma(Q)}{2}$ és $m = \frac{rk(Q)-\sigma(Q)}{2}$). Egy páros, indefinit $Q$ forma pedig alkalmas bázisban $aE_8 \oplus bH$-val írható le; itt $a = \frac{\sigma(Q)}{8}$, $b = \frac{rk(Q)-|\sigma(Q)|}{2}$ továbbá $H = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ és

$$E_8 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(A definit formák osztályozása nem ilyen elegáns, az idevonatkozó eredményekről lásd [MH].) Donaldson nevezetes tétele alapján azonban *sima* 4-sokaság metszetformája csak akkor lehet definit, ha az diagonalizálható, pontosabban:

**2.5. tétel.** (Donaldson, [D1]) *Ha egy $X$ egyszeresen összefüggő (zárt, irányított) sima 4-sokaság $Q_X$ metszetformája negatív (vagy pozitív) definit, akkor ez az $n\langle -1\rangle$ (illetve az $n\langle 1\rangle$) diagonális mátrixszal reprezentálható.* □

Összefoglalva tehát, egy egyszeresen összefüggő topologikus 4-sokaságot annak metszetformája (a 2.3 tételben leírt értelemben) lényegében meghatározza. Donaldson fenti tétele szerint egy adott topologikus 4-sokaság csak akkor hordozhat sima struktúrát, ha metszetformája indefinit, vagy ha definit és diagonális. (Például az $E_8$ vagy $2E_8$ páros, negatív definit metszetformák által meghatározott topologikus 4-sokaságok nem láthatók el sima struktúrával.) A fent leírt lehetőségekben a formát meghatározza annak rangja, szignatúrája és paritása. Nem minden indefinit bilineáris forma állítható elő azonban sima sokaság metszetformájaként:

**2.6. tétel.** (Rohlin, [R]) *Ha $X$ egy egyszeresen összefüggő sima sokaság páros metszetformával (vagyis $Q_X = kE_8 \oplus lH$), akkor $X$ szignatúrája 16-tal osztható, vagyis a fenti felírásban $k$ páros.* □

**2.7. tétel.** (Furuta, [Fu]) *Egy $X$ egyszeresen összefüggő sima, $Q_X = 2kE_8 \oplus lH$ páros metszetformájú 4-sokaságra $l \geq 2|k| + 1$.* □

Mint azt rövidesen látni fogjuk, minden páratlan indefinit (továbbá minden, Donaldson 2.5 tétele által megengedett definit) metszetformához tartozó topologikus sokaság hordoz sima struktúrát. A példák azt is mutatni fogják, hogy $l \geq 3|k|$ esetén a $2kE_8 \oplus lH$ formához tartozó (egyszeresen összefüggő) topologikus 4-sokaság is ellátható sima struktúrával. Összefoglalva tehát a 2.3 tétel az egyszeresen összefüggő topologikus 4-sokaságok felsorolását egy algebrai problémára (metszetformák osztályozására) vezeti vissza, annak eldöntése pedig, hogy egy adott (egyszeresen összefüggő) topologikus 4-sokaság hordoz-e sima struktúrát, a fenti tételek és a következő fejezet példái alapján (a $Q = 2kE_8 \oplus lH$, $2|k| + 1 < l < 3|k|$ eseteket leszámítva) könnyen eldönthető feladat.

**2.8. megjegyzés.** Az ún. $\frac{11}{8}$*-sejtés* értelmében a 2.7 tételben valójában $l \geq 3|k|$ lenne a helyes következtetés[1] — így a sima struktúra létezésére vonatkozó kérdés teljes választ nyerne az egyszeresen összefüggő esetben. Ez a sejtés azonban még nyitott.

## 3. Sima 4-sokaságok

3.1. **Példák.** A legegyszerűbb példát (zárt, irányított) 4-sokaságra az $S^4$ gömbfelület adja. Könnyen látható, hogy a $Q_{S^4}$ metszetforma (mely a $H^2(S^4;\mathbb{Z}) = 0$ csoporton van definiálva) az $\emptyset$ formával egyenlő. További példákat kapunk alacsonyabb dimenziós sokaságok összeszorzásával; így adódik az $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1 = T^4$ 4-dimenziós tórusz, $\Sigma_g \times \Sigma_h$ (mint két Riemann felület szorzata) és $S^1 \times M$ egy tetszőleges (zárt, irányított) $M$ 3-sokaságra. Könnyen látható, hogy ezen sokaságok közül egyedül az $S^2 \times S^2$ szorzat egyszeresen összefüggő; ennek $Q_{S^2\times S^2}$ metszetformája (alkalmas bázisban) a $H = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ mátrixszal reprezentálható. Egy további példát ad a $\mathbb{CP}^2$ *komplex projektív sík*, melyet $\mathbb{C}^3 - \{0\}$-ból állíthatunk elő a koordinátánkénti $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ hatás faktoraként. (Ebből a szempontból $\mathbb{CP}^2$ az $S^2 = \mathbb{CP}^1 = (\mathbb{C}^2 - \{0\})/\mathbb{C}^*$ projektív egyenes 4-dimenziós változataként is felfogható.) Nem túl nehéz belátni azt, hogy $H_2(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z})$-t a komplex projektív sík egy projektív egyenese generálja, így $H_2(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ és $Q_{\mathbb{CP}^2} = \langle 1 \rangle$ (hiszen két különböző egyenes egymást egy pontban metszi). Vegyük észre, hogy $\mathbb{CP}^2$ valójában egy komplex sokaság (sőt, komplex algebrai struktúrával is ellátható). Mint ilyen, természetes irányítást hordoz — ez a komplex érintőtér egy $\{v_1, v_2\}$ komplex bázisát a $\{v_1, iv_1, v_2, iv_2\}$ valós bázissá kiegészítve kapható meg. $\mathbb{CP}^2$-t a fentivel ellentétes irányítással ellátva a $\overline{\mathbb{CP}^2}$ sokaság adódik. Egyszerűen látható, hogy $\pi_1(\mathbb{CP}^2) = 1$ (és természetesen $\pi_1(\overline{\mathbb{CP}^2}) = 1$), illetve hogy

[1] Ezt a sejtést azért nevezik $\frac{11}{8}$-sejtésnek, mert ekvivalens avval, hogy a fenti tulajdonságú $X$ sokaság $b_2(X)$ Betti számára és $\sigma(X)$ szignatúrájára fennáll a $b_2(X) \geq \frac{11}{8}|\sigma(X)|$ egyenlőtlenség.

$Q_{\overline{\mathbb{CP}^2}} = \langle -1 \rangle$. Valamivel nehezebb annak igazolása, hogy az

$$S_4 = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{CP}^3 \mid \sum_{i=0}^{3} z_i^4 = 0\} \subset \mathbb{CP}^3$$

definícióval megadott komplex (sőt komplex algebrai) 4-sokaság — melyet $K3$-felületnek is szokás nevezni — egyszeresen összefüggő és $Q_{S_4} = 2E_8 \oplus 3H$ (lásd [GS]). Egyszerűen bizonyítható azonban a következő

**3.1. lemma.** *Legyenek az $X_1, X_2$ (zárt, irányított) 4-sokaságok metszetformái $Q_{X_1}$ és $Q_{X_2}$. Ekkor az $X_1 \# X_2$ összefüggő összeg metszetformája $Q_{X_1} \oplus Q_{X_2}$-vel egyenlő.* □

Ilymódon tetszőleges, Donaldson tétele alapján szóbajövő, páratlan bilineáris forma (mely így az $n\langle 1 \rangle \oplus m\langle -1 \rangle$ formával ekvivalens) előáll mint az $\# n\mathbb{CP}^2 \# m\overline{\mathbb{CP}^2}$ (többszörös) összefüggő összeg metszetformája. Hasonlóan, a $\# kS_4 \# (l-3k) S^2 \times S^2$ sokaságok minden, a 2.5, 2.6 tételek és a $\frac{11}{8}$-sejtés által megengedett bilineáris formát előállítanak sima (egyszeresen összefüggő, zárt, irányított) 4-sokaság metszetformájaként. Következésképp a sima struktúra létezésének kérdése — az egyszeresen összefüggő esetben, és a 2.7 tétel valamint a $\frac{11}{8}$-sejtés közti különbségtől eltekintve — lényegében meg lett válaszolva. A továbbiakban tehát arra a kérdésre összpontosítunk majd, hogy egy topologikus 4-sokaságon hány nem-diffeormorf sima struktúra létezhet.

3.2. **Sima invariánsok.** A különböző konstrukciókkal megadott sokaságok között azok *invariánsaival* tehetünk különbséget. Mint ismeretes, a homotópia- és homológia-csoportok (és hasonlóan a kohomológia-csoportok vagy a metszetforma) *homotopikus* invariánsok, vagyis homotóp sokaságokra ezek az invariánsok azonosak. Mint láttuk (legalábbis az egyszeresen összefüggő esetben) ezek az invariánsok 4-dimenzióban meghatározzák a sokaság topologikus struktúráját — tehát *teljes (topologikus) invariánsrendszert* alkotnak. Mivel homeomorf sima 4-sokaságok $h$-kobordánsak — a magasabb dimenziókban tapasztaltakat alapul véve — azt várnánk, hogy a $h$-kobordizmus diffeomorfizmust eredményez, vagyis hogy egy topologikus 4-sokaság legfeljebb egy módon látható el sima struktúrával. Ez azonban távolról sem igaz. A homeomorf, de esetleg nem diffeomorf sokaságok megkülönböztetéséhez *sima invariánsok* bevezetésére van szükségünk.

**3.2. megjegyzés.** Az első mérce-elméleti (gauge-elméleti) invariánsok definíciója és alapvető tulajdonságainak belátása Donaldson nevéhez fűződik [D1], [DK]. Egy bizonyos, a sokaságon rögzített metrikától függő differenciálegyenlet — az ún. *Yang-Mills* vagy *anti-öndualitási* egyenlet — megoldásainak számáról látta be Donaldson, hogy (néhány jól megértett esetet kivéve) az a választott metrikától nem, csak a sokaság sima struktúrájától függ, így sima invariáns. (Ugyanennek a differenciálegyenletnek a megoldásterét vizsgálva kapta meg Donaldson nevezetes, 2.5 tételben korábban már idézett eredményét.) Ezeket a *Donaldson polinomokat* váltották fel 1994-ben a hasonló elvek alapján definiált, de egyszerűbben számolható és így sokkal hatékonyabb Seiberg-Witten invariánsok [Wi], [Mr1]. A továbbiakban mi ez utóbbi invariánsokat fogjuk — nagyon vázlatosan — bemutatni. (A szigorú definícióhoz olyan differenciálgeometriai alapfogalmak, mint spin és spin$^c$ struktúrák, Dirac operátorok tárgyalása lenne szükséges, melyekre ehelyt a rövidség kedvéért csak utalni fogunk.)

Minden sima sokaság ellátható valamilyen Riemann metrikával — a sokaság érintőterén értelmezett pozitív definit skaláris szorzással. (Bizonyos speciális — pl. hiperbolikus vagy pozitív skalárgörbületű — metrika létezésének általában fontos topológiai következményei is vannak.) Sok esetben hasznos azonban egy további, nem minden sokaságon létező struktúra létezését feltételezni. Egy sokaság *spin struktúrával* látható el (vagy röviden *spin sokaság*), ha áttérési függvényeinek deriváltjaiból konzisztens módon "négyzetgyököt lehet vonni". (Minden 4-sokaságnak — ha ő maga nem spin — létezik egy olyan kétrétű elágazó fedése, melyre már az áttérési függvények deriváltjából négyzetgyök vonható, tehát spin. A helyzet hasonló ahhoz, ahogy a $\sqrt{z}$ függvény a $\mathbb{C}$ komplex síkon nem, csak saját Riemann felületén értelmezhető egyértelműen.) Egy $X$ sokaságon értelmezhető spin struktúrák $\mathfrak{S}(X)$ tere — amennyiben nem üres — a $H^1(X;\mathbb{Z}_2)$ kohomológiacsoporttal paraméterezhető, mégpedig nem természetes módon: $\mathfrak{S}(X)$ valójában egy $H^1(X;\mathbb{Z}_2)$ feletti affin struktúrával látható el. Egy egyszeresen összefüggő 4-sokaságon például pontosan akkor létezik spin struktúra, ha metszetformája páros. (Spin struktúrák részletes tárgyalása megtalálható pl. [LM] vagy [GS] könyvekben.) Rohlin korábban idézett 2.6 tétele például a nem egyszeresen összefüggő esetre is általánosítható, a metszetforma paritása helyett egy spin struktúra meglétét követelve meg. A spin struktúra komplex általánosításaként kapjuk a *spin$^c$ struktúra* fogalmát (lásd [Mr1] vagy [Mr2]-ben).

**3.3. tétel.** *Minden irányítható 4-sokaságon létezik spin$^c$ struktúra. Az $X$ sokaságon megadható spin$^c$ struktúrák $\mathfrak{S}^c(X)$ tere a $H^2(X;\mathbb{Z})$ kohomológiacsoporttal paraméterezhető (nem természetes módon) — pontosabban, $\mathfrak{S}^c(X)$ a $H^2(X;\mathbb{Z})$ csoport feletti affin struktúrával látható el.* □

Egy $X$ 4-dimenziós Riemann sokaságon rögzített $\mathfrak{s}$ spin$^c$ struktúra segítségével egy, a metrikától függő differenciáloperátor, az ún. *Seiberg-Witten operátor,* $\mathfrak{SW}$ adható meg. (Az operátor definíciója ismét hosszas előkészítést — konnexiók, kovariáns deriválások ill. (csavart) Dirac operátorok elméletének ismertetését — igényel, így erre ehelyt nem térünk ki. Az érdekődő olvasó figyelmébe ajánljuk [Mr1], [GS] (illetve a magyar nyelvű [St1]) munkákat.) Az $\mathfrak{SW}$ Seiberg-Witten operátor megoldástere (vagyis $\mathfrak{SW}^{-1}(0)$) vagy üres vagy egy végtelen dimenziós tér. Ez utóbbi jelenség abból fakad, hogy az operátor szimmetria-csoporja (vagyis az értelmezési tartományul szolgáló függvénytér automorfizmus-csoportjának azon részcsoportja, melyre nézve $\mathfrak{SW}$ invariáns) végtelen dimenziós Lie-csoport. (Ezt a csoportot szokás *mérce-* avagy *gauge-csoportnak* nevezni, és innen kapta az elmélet is a nevét.) A megoldások terének ezen csoporttal vett faktora azonban már egy véges dimenziós (kompakt, irányítható) $\mathfrak{M}_X(\mathfrak{s})$ sokaság lesz, melyet az $X$ sokaság ($\mathfrak{s}$ spin$^c$ struktúrához tartozó) *Seiberg-Witten modulusterének* nevezünk. $\mathfrak{M}_X(\mathfrak{s})$ természetes módon ágyazható be egy végtelen dimenziós $\mathfrak{B}_X(\mathfrak{s})$ sokaságba (melyet *konfigurációs térnek* szokás nevezni). Amennyiben $X$ egyszeresen összefüggő, úgy $\mathfrak{B}_X(\mathfrak{s})$-ről belátható, hogy a $\mathbb{CP}^\infty$ végtelen dimenziós projektív térrel homotóp ekvivalens. Ilymódon $\dim \mathfrak{M}_X(\mathfrak{s}) = d$ esetén az $[\mathfrak{M}_X(\mathfrak{s})]$ fundamentális osztály $H_d(\mathbb{CP}^\infty;\mathbb{Z})$ egy elemét reprezentálja. Könnyen belátható, hogy $H_d(\mathbb{CP}^\infty;\mathbb{Z})$ páros $d$-re $\mathbb{Z}$-vel, páratlan $d$-re 0-val izomorf, $d$ paritása pedig pusztán $b_2^+(X)$ paritásától függ. Ilymódon az $X$ sokaság *Seiberg-Witten invariánsa* az $\mathfrak{s}$ spin$^c$ struktúrán $[\mathfrak{M}_X(\mathfrak{s})] \in \mathbb{Z}$ (ill. páratlan $d$-re 0) értékekkel definiálható. Végeredményül tehát egy

$$SW_X \colon \mathfrak{S}^c(X) \to \mathbb{Z}$$

függvényt, $X$ *Seiberg-Witten függvényét* kapjuk. Mind a spin$^c$ struktúra definíciója, mind az $\mathfrak{SW}$ operátor megadása egy Riemann metrika jelenlétét feltételezi. A kapott $SW_X(\mathfrak{s})$ értékről belátható azonban, hogy $b_2^+(X) > 1$ esetén az csak $X$ sima struktúrájától függ (tehát a metrikától független), vagyis

**3.4. tétel.** *Tegyük fel, hogy $b_2^+(X_1) = b_2^+(X_2) > 1$. Ha $f\colon X_1 \to X_2$ egy diffemorfizmus, akkor az természetes módon egy $f^*\colon \mathfrak{S}^c(X_2) \to \mathfrak{S}^c(X_1)$ azonosítást ad meg, melyre*

$$SW_{X_2}(\mathfrak{s}) = \pm SW_{X_1}(f^*(\mathfrak{s}))$$

*teljesül minden $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}^c(X_2)$-re. Tehát az $SW_X$ Seiberg-Witten függvény (előjelétől eltekintve) $b_2^+(X) > 1$ esetén egy sima invariáns.* □

**3.5. megjegyzés.** A fent vázolt sima invariánsok csak 4-dimenziós sokaságokra definiálhatók. Ennek oka abban rejlik, hogy a — fent nem részletezett, és mind a Donaldson polinom mind a Seiberg-Witten invariáns definíciójában központi szerepet játszó — anti-öndualitási operátor csak ebben a dimenzióban definiálható. Ennek okaként pedig azt lehet felhozni, hogy csak 4-dimenzióban fordul elő az, hogy a standard $n$-dimenziós eulideszi tér $SO(n)$ szimmetria-csoporja két részre hasad, értelmet adva így egy öndualitási és egy anti-öndualitási operátornak. Az $SO(n)$ Lie-csoport minden $n \neq 4$ esetén egyszerű, $n = 4$-re azonban, legalábbis az univerzális fedések — vagy Lie-algebrák — szintjén $SO(3) \times SO(3)$ szorzatra bomlik, és a két komponensre vetítés adja (természetesen meglehetősen komplikált definíciók és tételek sorának ismeretében) az öndualitási és anti-öndualitási operátorokat. Bővebben erről lásd [FU] vagy [Mr1] munkákat.

3.3. **Szimplektikus 4-sokaságok.** Sima invariánsokat egyszerűen definiálhatunk — pl. rendeljük minden sima 4-sokasághoz a 17-es számot. Olyan invariáns találása azonban, mely információt hordoz az adott sokaság sima struktúrájáról, már nehéz feladat. A fent vázlatosan ismertetett Seiberg-Witten invariáns két alapvető fontosságú tulajdonságát foglalja össze a következő tétel. Ennek ismertetéséhez azonban tisztáznunk kell a szimplektikus sokaság fogalmát.

**3.6. definíció.** Az $X$ 4-sokaságon egy $\omega$ differenciálható 2-formát *szimplektikus struktúrának* nevezünk, ha $\omega$ zárt ($d\omega = 0$) és nem-elfajuló ($\omega \wedge \omega \neq 0$). Az $X$ 4-sokaságot szimplektikusnak nevezzük, ha létezik rajta szimplektikus struktúra.

**3.7. tétel.**
1. (Eltűnési tétel) *Ha $X$ előáll úgy $X = X_1 \# X_2$ összefüggő összegként, hogy $b_2^+(X_i) > 0$ ($i = 1, 2$), akkor minden $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}^c(X)$ spin$^c$ struktúrára $SW_X(\mathfrak{s}) = 0$.*
2. (Nem-eltűnési tétel) *Ha $X$-en létezik szimplektikus struktúra, akkor létezik olyan $\mathfrak{s}_0 \in \mathfrak{S}^c(X)$ spin$^c$ struktúra, melyre $SW_X(\mathfrak{s}_0) = \pm 1$.*

**3.8. megjegyzés.** Egy $\omega$ szimplektikus struktúra természetesen jelöl ki egy spin$^c$ struktúrát; a fenti nem-eltűnési tételben szereplő $\mathfrak{s}_0$ spin$^c$ struktúra éppen a (feltétel szerint létező) szimplektikus struktúra által kijelölt struktúrának választható. Ezt a spin$^c$ struktúrát a $0 \in H^2(X; \mathbb{Z})$ elemnek megfeleltetve ilymódon egy szimplektikus struktúra egyben egy $\mathfrak{S}^c(X) \sim H^2(X; \mathbb{Z})$ azonosítást is megad. Megjegyzendő, hogy a komplex 4-dimenziós sokaságok osztályozása alapján ismert, hogy minden komplex (egyszeresen összefüggő) 4-sokaság ellátható szimplektikus struktúrával.

Egy (részben a fenti tétel átal sugallt) sejtés szerint minden $X$ egyszeresen összefüggő sima 4-sokaság szimplektikus sokaságok összefüggő összegeként állt volna elő — hasonlóan a 3-dimenzióban érvényes 1.11 tétel által mutatott képhez. A sejtésre ellenpéldát Szabó [Sz] talált; ezt követően Fintushel és Stern adott egy általánosabb (a fenti sejtésre további ellenpéldákat szolgáltató) konstrukciót [FS]. A továbbiakban ez utóbbi konstrukciót ismertetjük.

**3.9. megjegyzés.** A 3-dimenziós esethez hasonlóan, a 4-dimenziós sokaságok elméletében is centrális probléma az *irreducibilis* sokaságok megtalálása. ($X$-et irreducibilisnek nevezzük, ha minden $X = X_1 \# X_2$ összefüggő összegre bontásban $X_1$ vagy $X_2$ az $S^4$ gömbfelülettel homeomorf.) Hosszú ideig úgy tűnt, hogy egy irreducibilis (egyszeresen összefüggő, $S^4$-től különböző) 4-sokaság komplex struktúrával látható el. Az első ellenpéldák [GM] megtalálása után a komplex struktúra szerepét a szimplektikus struktúra vette át. Szabó (majd Fintushel és Stern) ellenpéldái irreducibilis, de szimplektikus struktúrát nem hordozó (a 3.7 tétel 2. pontját nem teljesítő) sokaságok voltak. Pillanatnyilag egy sokaság irreducibilitására nem ismert ekvivalens, a sokaság geometriája alapján megfogalmazható feltétel. Itt jegyezzük meg, hogy bár könnyen látható módon minden 4-sokaság felbontható irreducibilisek összefüggő összegére, ez a felírás távolról sem egyértelmű — ellentétben a 3-dimenziós esettel. Az $X = S^2 \times S^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$ összefüggő összegről nem nehéz megmutatni, hogy $\mathbb{CP}^2 \# 2\overline{\mathbb{CP}^2}$-vel diffeomorf, így tehát $X$-nek két lényegesen különböző irreducibilis faktorokra bontása létezik. (Irreducibilis 4-sokaságokról ld. még [St2].)

Legyen tehát $X$ egyszeresen összefüggő (zárt, irányított) 4-sokaság és $T^2 \subset X$ beágyazott tórusz, melyre $Q_X([T^2],[T^2]) = 0$ (de $[T^2]$ a $H_2(X;\mathbb{Z})$ homológia-csoportban nem-nulla). Ekkor $X - \nu T^2$ egy $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ peremű sokaság lesz (itt $\nu T^2$ a tórusz nyílt csőszerű környezetét jelöli). Legyen továbbá $K \subset S^3$ egy adott csomó, és vegyük a (szintén $T^3$ peremű) $Y_K = S^1 \times (S^3 - \nu K)$ peremes 4-sokaságot. $X - \nu T^2$ és $Y_K$ határaik mentén való összeragasztásával egy $X_K$ (zárt, irányítható) 4-sokaságot kapunk, mely alkalmas $T^2 \hookrightarrow X$ beágyazást választva $X$-szel lesz homeomorf.

**3.10. tétel.** (Fintushel és Stern, [FS]) *Legyen $X$ egyszeresen összefüggő (zárt, irányított) szimplektikus 4-sokaság, $T^2 \subset X$ alkalmas beágyazott tórusz, $K \subset S^3$ pedig olyan csomó, melynek Alexander polinomjában a főegyüttható $\neq \pm 1$. Ekkor $X_K$ nem írható fel szimplektikus sokaságok összefüggő összegeként.* □

A következő sejtés pedig azt mutatja, hogy egy adott topologikus sokaságon az összes sima struktúra feltérképezése legalább olyan nehéz feladat, mint az $S^3$-beli csomók osztályozása. (Ez utóbbi pedig a matematika egyik legnagyobb múltra visszatekintő, és látványos fejlődése ellenére kevéssé értett fejezete.) A sejtés ismertetése előtt megadjuk azt az eredményt, melyre a sejtés is támaszkodik.

**3.11. tétel.** ([FS]) *Legyen $X$ szimplektikus 4-sokaság, $T^2 \subset X$ alkalmas beágyazott tórusz, $K_1$ és $K_2$ pedig két olyan $S^3$-beli csomó, melyek Alexander polinomja különbözik. Ekkor az $X_{K_1}$ és $X_{K_2}$ egymással (és $X$-szel) homeomorf 4-sokaságok nem diffeomorfak.* □

**3.12. sejtés.** *Egy fenti $X$ szimplektikus 4-sokaságra és $K_1, K_2$ csomókra $X_{K_1}$ és $X_{K_2}$ pontosan akkor diffeomorfak, ha a $K_1$ és $K_2$ csomók $S^3$-ban ekvivalensek (izotópak).*

Fintushel és Stern a fenti tételeket $X_K$ Seiberg-Witten invariánsainak kiszámításával látta be — bebizonyították, hogy $SW_X$ és $K$ Alexander polinomja egyértelműen megadják $SW_{X_K}$-t. További operációk (pl. logaritmikus transzformáció) alkalmazásával $X$-ből olyan (vele homeomorf) 4-sokaság állítható elő, mely semelyik fenti $X_K$-val sem diffeomorf, így a 3.12 sejtés igaz volta esetén azt találjuk, hogy bizonyos (enyhe) feltételeknek eleget tevő (vagyis megfelelő tóruszt tartalmazó, szimplektikus) 4-sokaságokra a sima struktúrák feltérképezése nehezebb feladat mint $S^3$-ban a csomók osztályozása.

**3.13. megjegyzés.** A fenti tételek bizonyítása az ún. "vágj és ragassz" módszerrel történt. Ez a módszer akkor alkalmazható, ha egy 4-sokaságot olyan részekből rakunk össze, melyekre a $\mathfrak{SW}$ operátor megoldásai (többé-kevésbé) jól leírhatók. Ekkor a különböző részeken kapott megoldásokat az egész sokaságon lévő megoldássá próbáljuk összeragasztani, majd megvizsgáljuk, hogy vajon ilymódon előállítottunk-e minden megoldást. A részsokaságokon pedig úgy próbáljuk a megoldásteret megkapni, hogy a részeket valamely jólismert sokaságba ágyazva a fenti eljárás megfordításával, a megoldások kivágásával próbálkozunk. Ilymódon (szerencsés esetben) az invariánsok számítása (a Mayer-Vietoris tételben megismert séma szerinti) egyszerű algebrára redukálható. A módszer alkalmazhatósága azonban nagyban függ a konstrukcióban szereplő részek illetve azok 3-dimenziós határainak topológiájától.

A 3.11 tételből könnyen bizonyítható például a következő

**3.14. tétel.** *A $2kE_8 \oplus (4k-1)H$ ($k \in \mathbb{N}$) és a $(2n-1)\langle 1\rangle \oplus m\langle -1\rangle$ ($n \geq 2, m \geq 10n-1$) formákhoz tartozó egyszeresen összefüggő (zárt, irányítható) topologikus 4-sokaságok végtelen sok nem-diffeomorf sima struktúrát hordoznak.* $\square$

Amennyiben $X$ egy szimplektikus 4-sokaság, a beágyazott $T^2$ tórusz szimplektikus részsokaság és $K \subset S^3$ *fibrált csomó* (vagyis létezik egy $f\colon S^3 - K \to S^1$ fibrálás), úgy $X_K$ is ellátható szimplektikus struktúrával. Tehát az $X$-szel homeomorf szimplektikus 4-sokaságok (valószínűleg) az $S^3$-beli fibrált csomók elméleténél összetettebbek. Egy más megközelítés azonban némi reményt nyújt szimplektikus 4-sokaságok megértésére. Legyen először $X \subset \mathbb{CP}^n$ egy ún. *projektív felület* (vagyis valamely $n$-re $\mathbb{CP}^n$ egy komplex 2-dimenziós — így valós 4-dimenziós — részsokasága). Legyen továbbá $A \cong \mathbb{CP}^{n-2} \subset \mathbb{CP}^n$ rögzített két komplex kodimenziós altér. Az $A$-t tartalmazó $\mathbb{CP}^n$-beli hipersíkok (egy komplex kodimenziós alterek) tere könnyen látható módon $\mathbb{CP}^1$-gyel paraméterezhető, és azt sem nehéz megmutatni, hogy minden $x \in X - A$ pontra pontosan egy olyan $H_t$ (a $t \in \mathbb{CP}^1$ paraméter-értékhez tartozó) $A$-t tartalmazó altér található, melyre $x \in H_t$. Ilymódon egy $f\colon X - A \to \mathbb{CP}^1$ függvény kapható (legyen $f(x) = t$ azon $t \in \mathbb{CP}^1$-re, melyre $x \in H_t$) mely generikus $A$-t választva egy ún. *Lefschetz vonalazás* (vagy komplex Morse függvény) lesz, vagyis $f$ minden kritikus pontja környezetében (lokálisan) $z_1^2 + z_2^2$ alakú. Az $X \cap A$-beli (véges sok) pontot felfújva (vagyis minden pontot egy-egy $\mathbb{CP}^1$ gömbbel helyettesítve) pedig a fenti $f$ a kapott $\widetilde{X}$ komplex felületre egy $\widetilde{f}\colon \widetilde{X} \to \mathbb{CP}^1$ *Lefschetz fibrálássá* (vagyis az egész $\widetilde{X}$ sokaságon értelmezett Lefschetz vonalazássá) terjeszthető ki. Vegyük észre, hogy $\widetilde{f}$ egy fibruma egy komplex 1-dimenziós zárt sokaság, vagyis valamilyen $g$-re egy $\Sigma_g$ Riemann felület lesz.

**3.15. megjegyzés.** Kodaira munkássága nyomán ismert, hogy minden egyszeresen összefüggő $X$ komplex 4-sokaságra meg lehet $X$ komplex struktúráját úgy változtatni, hogy sima struktúrája ne vátozzék, de az eredményül kapott (ún. deformált) $X'$ sokaság már valamely $\mathbb{CP}^n$-be komplex módon beágyazható legyen. Ezekre a deformált sokaságokra pedig a fenti módon Lefschetz vonalazás, illetve felfújtjukra Lefschetz fibrálás található.

Kodaira kutatásai alapján (legalábbis az egyszeresen összefüggő esetben) komplex 4-sokaságok topológiája és differenciáltopológiája a sokaságok elméletének egy jól feldolgozott fejezete. E-szerint egy egyszeresen összefüggő komplex 4-sokaság $\mathbb{CP}^2$-vel, $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$-gyel, $S_4$-gyel, egy elliptikus felülettel, vagy egy általános típusú felülettel (illetve ezek felfújtjaival) azonosítható. (Egy $S$ komplex 4-sokaság *elliptikus felület*, ha létezik egy olyan $f\colon S \to \mathbb{CP}^1$ holomorf függvény, melynek általános fibruma egy tórusszal diffeomorf. Általános típusú felületek definíciója nagyobb előkészítést igényelne, így ehhez [FM] könyvet ajánljuk az olvasó figyelmébe.) Egy $X$ (egyszeresen összefüggő) elliptikus felületről (mely nem felfújtja más komplex felületnek, tehát *minimális*) ismert, hogy $\sigma(X) = -8n$ és $\chi(X) = 12n$ valamely $n \in \mathbb{N}$ egészre. (Itt $\chi(X)$ az $X$ sokaság Euler karakterisztikáját jelöli.) Általános típusú felületekre pedig belátható, hogy $3\sigma(X) \leq \chi(X)$ és $0 \leq 5\sigma(X) + 3\chi(X) + 12$ — a 2.3 tétel értelmében ezek topológiája a $\chi(X)$ és $\sigma(X)$ algebrai topológiai invariánsok által lényegében meghatározott.

A fent vázoltaknál összetettebb analitikus megfontolásokat alkalmazva Donaldson belátta azt, hogy a fenti eredmények minden szimplektikus 4-sokaságra kiterjeszthetők, vagyis

**3.16. tétel.** (Donaldson, [D2]) *Legyen $X$ egy (zárt) szimplektikus 4-sokaság. Ekkor létezik $X$-nek egy véges $B \subset X$ részhalmaza és annak $X - B$ komplementumán egy olyan $f : X - B \to \mathbb{CP}^1$ függvény, mely Lefschetz vonalazás. $B$ pontjait felfújva így a kapott $\widetilde{X}$ szimplektikus sokaság Lefschetz fibrálással látható el.* □

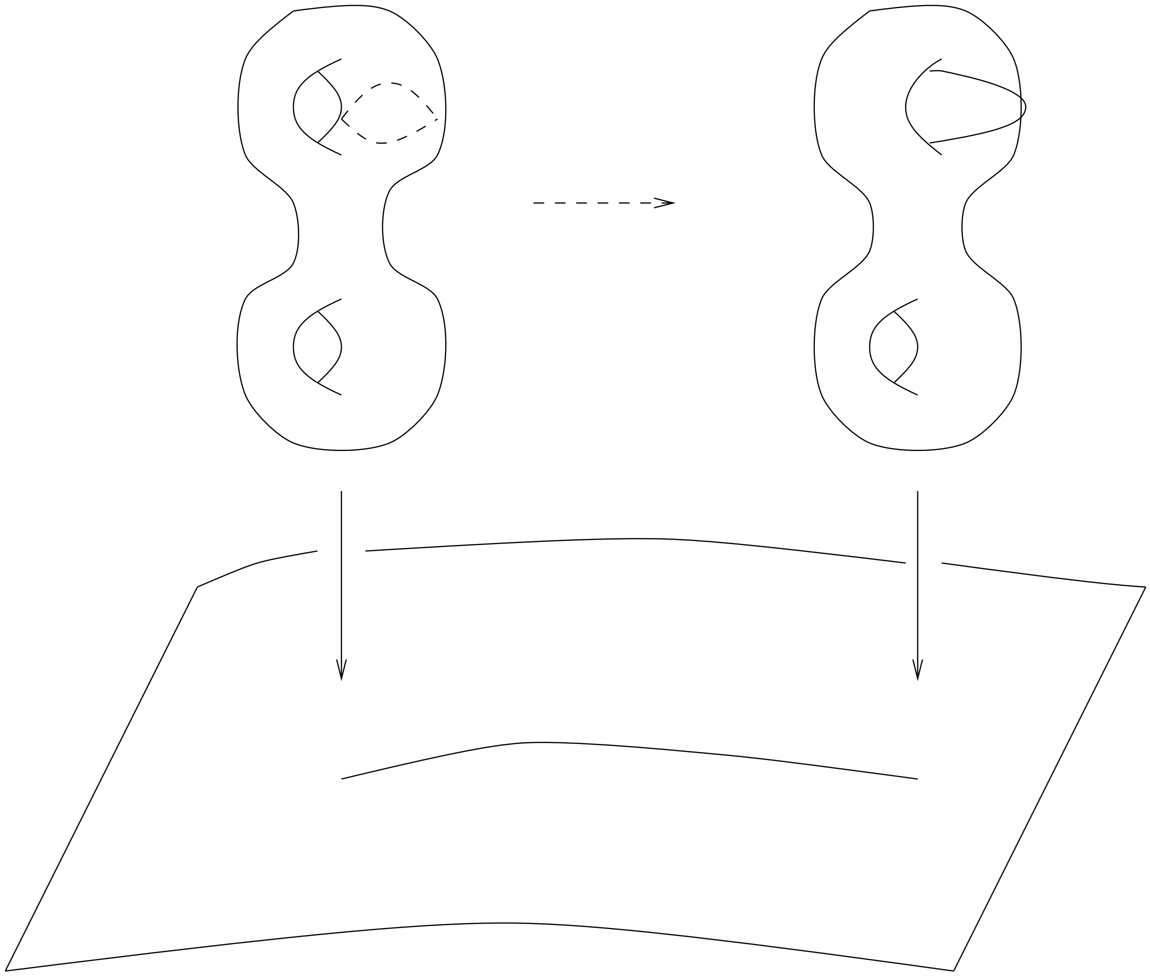
**3.17. megjegyzés.** A tétel (Gompf nevéhez fűződő) megfordítása is igaz [G2]: néhány (jól megértett) speciális esetet leszámítva egy Lefschetz vonalazás (illetve Lefschetz fibrálás) a sokaságot szimplektikus struktúrával látja el. Informálisan egy $f : X \to \mathbb{CP}^1$ Lefschetz fibrálás a valós (és minden sima sokaságon létező) Morse függvény fogalmát terjeszti ki a komplex esetre, így tehát szimplektikus struktúra pontosan akkor létezik egy sima 4-sokaságon, ha valamely felfújtján van komplex Morse függvény.

Egy $f : X \to \mathbb{CP}^1 = S^2$ Lefschetz fibrálást generikus $f^{-1}(t) \cong \Sigma_g$ fibruma bizonyos köreinek kijelölésével lehet leírni. Ezen körök $f$ kritikus pontjaihoz kapcsolódnak, és általában *eltűnési ciklusoknak* hívják őket. Legyen tehát $t_0 \in S^2$ rögzített reguláris érték, és tegyük fel, hogy $f$ injektív $C = \{p_1, \dots , p_k\}$ kritikus pontjainak halmazán. (Ez a tulajdonság kis perturbálással minden $f$ Lefschetz fibrálás esetén elérhető.) Egy $t_i = f(p_i)$ kritikus értékhez és $\gamma_i : [0, 1] \to S^2$, a $t_0$ rögzített pontot $f(p_i)$-vel összekötő úthoz a $v_i \subset f^{-1}(t_0)$ egyszerű zárt görbe rendelhető avval a tulajdonsággal, hogy $t_0$-ból $\gamma_i$ mentén $t_i$-be utazva $v_i$ a fibrumban egy pontra húzódik (lásd a 3. ábrát). Az eltűnési ciklusok lehetséges számának illetve elhelyezkedésének vizsgálata Lefschetz fibrálások — és így szimplektikus 4-sokaságok — jobb megértését tette a közelmúltban lehetővé.

**3.18. példa.** Egy $X \to S^2$ Lefschetz fibrálás $\pi_1(X)$ fundamentális csoporja például a $\pi_1(f^{-1}(t_0))/\langle v_1, \dots ,$ faktorral azonosítható.

**3.19. megjegyzés.** Vegyük észre, hogy a $v_i$ eltűnési ciklus nemcsak a szinguláris fibrumtól, hanem a választott $\gamma_i$ úttól is függ. Fel szokás tételezni, hogy a szinguláris fibrumok egy $t_0$ középpontú egységkör pereme felett helyezkednek el, és a választott $\gamma_i$-k éppen ennek a körnek megfelelő sugarai. A szinguláris fibrumok körvonal menti sorrendjének megváltoztatása az eltűnési ciklusok megváltoztatásával jár — ezeket a transzformációkat nem nehéz megérteni, ld. például [GS].

A $v_i$ eltűnési ciklus izotópia-osztályát valójában egy hozzá asszociált algebrai invariáns, a $v_i$-hez rendelt (jobbkezes) *Dehn csavar* meghatározza. Legyen $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ a fibrálás generikus $f^{-1}(t) = \Sigma$ fibrumának (irányítható) diffeomorfizmus-csoportja, $\mathrm{Diff}^+_0(\Sigma)$ pedig ennek



ÁBRA 3. Eltűnési ciklus

egységkomponense. Az $\mathfrak{M}_g = \mathrm{Diff}^+(\Sigma)/\mathrm{Diff}_0^+(\Sigma)$ faktorcsoportot a $\Sigma$ Riemann felület *leképezés-osztály csoportjának* nevezik (itt $g$ a $\Sigma$ Riemann felület nemét jelöli). $\Sigma$-n egy $\gamma$ egyszerű zárt görbe (vagyis $S^1$ egy beágyazása) egy $D(\gamma) \in \mathfrak{M}_g$ elemet definiál a következő módon.

**3.20. definíció.** A $\gamma \subset \Sigma$ egyszerű zárt görbe által meghatározott $f_\gamma \colon \Sigma \to \Sigma$ (jobbkezes) Dehn csavart úgy kapjuk meg, hogy $\Sigma$-t $\gamma$ mentén felvágjuk, majd a keletkező két határkomponenst egy 360°-os (jobbra) forgatás után ismét összeragasztjuk. (Formálisan, a $\nu\gamma \subset \Sigma$ tubuláris környezetet $S^1 \times (0,1)$-gyel azonosítva azon legyen $f_\gamma(\theta, t) = (\theta + 2\pi t, t)$ majd ezt simán identitásként terjesszük ki $\nu\gamma$ komplementumára.) Az $f_\gamma$ által meghatározott $\mathfrak{M}_g$-beli elemet $D(\gamma)$-val jelöljük.

**3.21. tétel.** *Egy $D(\gamma)$ Dehn csavar izotópia erejéig meghatározza az őt definiáló egyszerű zárt görbét.* □

Ilymódon tehát az $f \colon X \to S^2$ Lefschetz fibrálást a $D(v_1)D(v_2)\cdots D(v_k)$, $\mathfrak{M}_g$-beli szó határozza meg. Vagyis egy Lefschetz fibrálás (így áttételesen egy szimplektikus 4-sokaság) egy algebai invariánssal — az eltűnési ciklusok által adott Dehn csavarokból alkotott $\mathfrak{M}_g$-beli szóval

— adható meg. $\mathfrak{M}_g$ összetett viselkedése miatt azonban szimplektikus sokaságok ilyen jellegű leírása még kiaknázásra vár.

## 4. Függelék: Egzotikus $\mathbb{R}^4$-ek

A 4-dimenziós differenciáltopológia talán legmeghökkentőbb eredménye *egzotikus* $\mathbb{R}^4$*-ek* létezésének belátása volt. (Egy $X$ sima sokaságot akkor nevezünk egzotikus $\mathbb{R}^4$-nek, ha homeomorf de nem diffeomorf a standard 4-dimenziós euklideszi térrel, $\mathbb{R}^4$-gyel.) Ez az eredmény különösen a következő tétel fényében furcsa:

**4.1. tétel.** *Legyen $X$ olyan sima $n$-sokaság mely $\mathbb{R}^n$-nel homeomorf és tegyük fel, hogy $n \neq 4$. Ekkor $X$ és $\mathbb{R}^n$ diffeomorfak.* □

Vagyis egzotikus euklideszi terek csak 4-dimenzióban létezhetnek, ott azonban rögtön elég sok található:

**4.2. tétel.** *Minden $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ paraméter-értékre megkonstruálható egy olyan $X_{s,t}$ egzotikus $\mathbb{R}^4$, hogy $X_{s,t}$ pontosan akkor diffeomorf $X_{s',t'}$-vel ha $(s,t) = (s',t')$.* □

Az első egzotikus $\mathbb{R}^4$ létezésének belátásához (Casson egy korábbi ötlete nyomán) Freedman és Donaldson korábban tárgyalt eredményeit használták fel. Freedman tétele szerint az $S_4$ (3.1 pontban definiált) $K3$-felület *topologikusan* felbontható egy olyan $S_4 = X_1 \# X_2$ összefüggő összegre, hogy $Q_{X_1} = 2E_8$ és $Q_{X_2} = 3H$. (Ez következik abból, hogy a fenti tulajdonságú $X_1$, $X_2$ topologikus sokaságok a 2.3 tétel szerint léteznek, és — ismét a 2.3 tétel szerint — $X_1 \# X_2$ összefüggő összegük az $S_4$ sokasággal homeomorf.) Az $X_1$ sokaság azonban Donaldson 2.5 tétele értelmében nem látható el sima struktúrával, így a fenti (topologikus) összefüggő összegre bontás simán nem hajtható végre. Azon pontok környezetének vizsgálata, melyekben az összefüggő összeg vétetett, vezet el végülis egy egzotikus $\mathbb{R}^4$ létezésének belátásához. Erről az egzotikus $\mathbb{R}^4$-ről belátható például, hogy simán nem ágyazható be a standard euklideszi $\mathbb{R}^4$-be. (A fenti érvelés további részleteiről lásd [FU].)

A Donaldson majd Seiberg-Witten invariánsok megtalálása egzotikus $\mathbb{R}^4$-ek egy másik fajtájának felfedezéséhez vezetett. Ezen egzotikus $\mathbb{R}^4$-ek a standard 4-dimenziós euklideszi tér nyílt részhalmazaiként is előállíthatók; a továbbiakban ezek konstrukcióját fogjuk (vázlatosan) megadni. Vegyünk tehát két egyszeresen összefüggő, homeomorf de nem diffeomorf zárt 4-sokaságot, legyenek ezek $X_0$ és $X_1$. (Ilyen példát kapunk $S_4$ és $(S_4)_K$ választással minden olyan $K$ csomóra melynek Alexander polinomja $\neq 1$.) Wall korábban (a 2.4 megjegyzésben) idézett tétele szerint ekkor $X_0$ és $X_1$ között létezik egy $W$ $h$-kobordizmus. Nem túl nehéz belátni azt, hogy $W$-t az $X_0 \times [0,1]$ 5-sokaságra pusztán 2- és 3-indexű fogantyúk ragasztásával is elő lehet állítani. Ha csak a 2-fogantyúkat ragasztjuk oda $X_0 \times [0,1]$-hez, akkor egy ($X_{\frac{1}{2}}$ felső peremű) $W_1$ kobordizmust kapunk. Az $X_{\frac{1}{2}}$ 4-sokaságban találhatók meg $W$ 2-fogantyúinak $A_1, \ldots, A_n$ öv- és 3-fogantyúinak $B_1, \ldots, B_n$ ragasztó gömbjei. Mivel $W$ egy $h$-kobordizmus, (esetleg izotópia alkalmazása után) feltehető, hogy az $A_i \cdot B_j$ algebrai metszési szám $\delta_{ij}$-vel egyenlő. Amennyiben ez az algebrai metszet egyenlővé tehető lenne a geometriaival, úgy a 3.7 lemma alkalmazhatóvá válna, ami végülis $W$ trivialitását és így egy $X_0 \cong X_1$ diffeomorfizmust eredményezne — ellentétben $X_0$ és $X_1$ választásával. Az algebrai és geometriai metszésszám a szokásos (korábban tárgyalt) módon azért nem tehető egyenlővé, mert a Whitney trükk nem alkalmazható 4-dimenzióban. Az ellentétes előjelű pontpárokat $A_i$-ben és $B_j$-ben összekötő görbékből összefűzött hurok ugyan pontrahúzható lesz $X_{\frac{1}{2}} - \cup A_i \cup B_j$-ben (ehhez esetleg izotópiával a gömböket változtatni kell), az így kapott $D^2$-k azonban nem feltétlenül lesznek beágyazottak, így nem találjuk meg a korábban látott lokális modellt. Dimenzió-okokból feltehető, hogy $D^2$ képének véges sok (transzverzális) önátmetszése van. Egy ilyen önátmetszést a Whitney trükk ismételt alkalmazásával próbálhatunk meg eltüntetni: az önátmetszés által definiált hurkot $X_{\frac{1}{2}}$-ben pontrahúzva ismét egy immertált (véges sok transzverzális önátmetszéssel rendelkező) $D^2$-t kapunk. Ezt a processzust végtelen sokszor elismételve határértékben egy $CH \subset X_{\frac{1}{2}}$ alteret, egy ún. *Casson fogantyút* kapunk. Véve az összes $A_i$, $B_j$ gömbök csőszerű környezeteinek illetve az ellentétes előjelű pontpárokhoz tartozó Casson fogantyúknak az unióját, $X_{\frac{1}{2}}$ egy nyílt $U$ részét kapjuk. $U$-ból $B_j$-k menti műtéttel (vagyis $U\times[0,1]$-hez 3-fogantyúk ragasztásával) $V_1 \subset X_1$, míg $A_i$-k menti műtéttel $V_0 \subset X_0$ nyílt részeket kaphatunk meg. Freedman korábban idézett 2.3 tételének bizonyításában a központi (és legnehezebb) lépés annak belátása, hogy a fent definiált Casson fogantyúk a $D^2 \times D^2$ szokásos fogantyúval homeomorfak. (Ilymódon tehát a magasabb dimenziókban megismert műtéti eljárások véghezvihetők.) Ebből adódóan azonban az is látszik, hogy topologikusan a Whitney trükk véghezvihető, vagyis topologikusan $V_i$ valójában $\mathbb{R}^4$-gyel azonos (tehát homeomorf vele). Könnyen ellenőrizhető az is, hogy $X_0 - V_0$ és $X_1 - V_1$ diffeomorfak, hiszen a $W$ kobordizmust ezekre a peremes sokaságokra megszorítva triviális koborizmust kapunk, mivel minden fogantyú-ragasztás $V_0$-en belül történt. Ilymódon tehát $V_0$ és $V_1$ egy-egy $\mathbb{R}^4$-gyel homeomorf nyílt sokaság. Amennyiben ezek a standard $\mathbb{R}^4$-gyel diffeomorfak lennének, úgy az $U$ részsokaságot $V_0\times[0,1]$-re cserélve ($V_0 \cong V_1 \cong \mathbb{R}^4$ miatt) $X_0$ és $X_1$ között egy triviális kobordizmust, végeredményben tehát egy $X_0 \cong X_1$ diffeomorfizmust kapnánk, ami azonban ellentmond $X_0$ és $X_1$ választásának. Evvel tehát beláttuk, hogy a fent megkapott $V_0 \subset X_0$ részsokaság egy egzotikus $\mathbb{R}^4$.

Az ilyen, ún. $h$-kobordizmusos konstrukcióval talált egzotikus $\mathbb{R}^4$-ekről belátható, hogy a standard eukideszi tér nyílt részhalmazaival diffeomorfak; egy bonyolultabb érvelést alkalmazva valójában kontinuum sok, fenti konstrukcióval adott (tehát a standard $\mathbb{R}^4$-be ágyazható), egymással nem diffeomorf egzotikus $\mathbb{R}^4$ található. (Egzotikus $\mathbb{R}^4$-ek különböző konstrukcióiról és további furcsaságairól [G1] cikkben illetve [GS] könyvben olvashatunk.)

## Irodalomjegyzék


[D1] S. Donaldson, *An application of gauge theory to four dimensional topology*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 279–315.

[D2] S. Donaldson, *Lefschetz fibrations in symplectic geometry*, Proc. Internat. Cong. Math. (Berlin, 1998), Vol II, Doc. Math. Extra Volume ICMII (1998), 309–314.

[DK] S. Donaldson és P. Kronheimer, *Geometry of four-manifolds*, Oxford Univ. Press, 1990.

[FS] R. Fintushel és R. Stern, *Knots, links and 4-manifolds*, Invent. Math. **134** (1998), 363–400.

[FU] D. Freed és K. Uhlenbeck, *Instantons and 4-manifolds*, Springer-Verlag, 1984.

[F] M. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom. **17** (1982), 357–453.

[FQ] M. Freedman és F. Quinn, *Topology of 4-manifolds*, Princeton Mathematical Series **39**, Princeton University Press, 1990.

[FM] R. Friedman és J. Morgan, *Smooth 4-manifolds and complex surfaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb. vol. 27, Springer-Verlag, 1994.

[Fu] M. Furuta, *Monopole equation and the $\frac{11}{8}$-conjecture*, preprint.

[G1] R. Gompf, *An exotic menagerie*, J. Diff. Geom. **37** (1993), 199–223.

[G2] R. Gompf, *A topological characterization of symplectic manifolds*, előkészületben.

[GM] R. Gompf és T. Mrowka, *Irreducible 4-manifolds need not be complex*, Ann. of Math. **138** (1993), 61–111.

[GS] R. Gompf és A. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, AMS Graduate Studies in Math. vol. 20, 1999.

[K] R. Kirby, *Problems in low-dimensional topology*, in Geometric Topology (W. Kazez ed.), AMS/IP Stud. Adv. Math. vol. 2.2, Amer. Math. Soc., 1997, pp. 35–473.

[LM] B. Lawson és M. Michelson, *Spin geometry*, Princeton Math. Series vol. **39**, 1989.

[MdS] D. McDuff és D. Salamon, *Introduction to symplectic topology*, Oxford University Press, 1995.

[M1] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. Math. **64** (1956), 399–405.

[M2] J. Milnor, *Morse theory*, Ann. Math. Studies **51**, Princeton University Press, 1963.

[M3] J. Milnor, *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, notes by L. Siebenmann and J. Sondow, Princeton University Press, 1965.

[MH] J. Milnor és D. Husemoller, *Symmetric bilinear forms*, Springer-Verlag, 1973.

[MS] J. Milnor és J. Stasheff, *Characteristic classes*, Ann. Math. Studies **76**, Princeton University Press, 1974.

[Mo] E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds V. The triangulation theorem and Hauptvermutung*, Ann. Math. **56** (1952), 96–114.

[Mr1] J. Morgan, *The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds*, Math. Notes **44**, Princeton University Press, Princeton NJ, 1996.

[Mr2] J. Morgan, *Smooth invariants of 4-manifolds*, in "Low Dimensional Topology (Summer School in Budapest, 1998)" (ed. K. Böröczky, A. Stipsicz and W. Neumann), megjelenés előtt.

[N] W. Neumann, *Notes on geometry and 3-manifolds* in "Low Dimensional Topology (Summer School in Budapest, 1998)" (ed. K. Böröczky, A. Stipsicz and W. Neumann), megjelenés előtt.

[R] V. Rohlin, *New results in the theory of four dimensional manifolds*, Dokl. Akad. Nauk. USSR **84** (1952), 221–224.

[S] S. Smale, *The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 373–375.

[St1] A. Stipsicz, *Négydimenziós topológia*, egyetemi jegyzet.

[St2] A. Stipsicz, *Geography of irreducible 4-manifolds*, ECM2 (Budapest, 1996) 221–233, Prog. Math. **169**, Birkhäuser, Basel, 1998.

[Sz] Z. Szabó, *Simply connected irreducible 4-manifolds with no symplectic structures*, Invent. Math. **132** (1998), 457–466.

[Th] W. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology, vol. I*, Princeton Math. Series **35**, Princeton University Press, Princeton NJ 1997.

[Wa] C.T.C. Wall, *On simply-connected 4-manifolds*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 141–149.

[Wi] E. Witten, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 769–796.

ELTE TTK, Analízis Tanszék, 1088. Múzeum krt. 6-8., Budapest, Hungary
*E-mail cím*: stipsicz@cs.elte.hu