Négydimenziós sima sokaságok elmélete (Donaldson után)

Stipsicz András és Szabó Zoltán

Előszó

A 80-as évek eleje döntő áttörést hozott a 4-dimeziós sokaságok elméletében. Míg M. Freedman 1982-ben megjelent cikke [F] elegáns lezárását adta a topologikus 4-sokaságok elméletének, S. Donaldson 1983-ban publikált műve [D2] egy egész, sima 4-sokaságokkal foglalkozó elmélet kiindulópontjának bizonyult. A két munka, bár szinte egyidőben született és nagyon közeli kérdésköröket vizsgál, nem sok hasonlósággal bír. Freedman klasszikus topológiai eszközökkel bizonyította tételét — erről azonban a tétel kimondásán túl a továbbiakban nem fogunk szót ejteni.

Donaldson 83-as cikkének, és a később ebből kinövő elméletnek az alapja azonban meglepő módon a fizikából érkezett. Az 50-es években fizikusok tettek fel kérdéseket egy bizonyos egyenletnek, az úgynevezett Yang-Mills egyenletnek speciális megoldásaira (az instantonokra) vonatkozóan (a Yang-Mills egyenletet az "erős kölcsönhatás" leírására vezették be). Miután az instantonok elméletének analítikus kérdéseit megoldották (itt elsősorban Atiyah, Hitchin, Singer illetve Taubes és Uhlenbeck neve érdemel említést), Donaldson alkalmazta ezt az új eszközt 4-dimenziós sokaságok sima struktúrájának vizsgálatára. Első eredményeként azt látta be, hogy bizonyos topologikus 4-sokaságok nem láthatók el sima struktúrával. Ennek következményeként látható be egy nagyon meglepő, és jellegzetesen 4-dimenziós jelenség: léteznek egzotikus $\mathbb{R}^4$-ek. A kutatásoknak Donaldson 1990-es cikke [D1] adott újabb lendületet, melyben ASD konnexiók (az instantonokat időközben anti-instantonok, ASD konnexiók váltották fel) segítségével egy új, az eddigieknél érzékenyebb invariánsát definiálta sima 4-dimenziós sokaságoknak.

Jegyzetünkben ennek az elméletnek az alapjaival szeretnénk az olvasót megismertetni. Mivel az anyag több terület — analízis, differenciálgeometria és topológia — határán helyezkedik el, a rövidség és áttekinthetőség kedvéért kénytelenek voltunk a technikai nehézségek tárgyalását kihagyni. Ez a munka tehát a téma iránt érdeklődő kutatóknak és diákoknak nyújthat segítséget, keltheti fel — reményeink szerint — figyelmüket. Annak, aki ezek után jobban el szeretne mélyedni a témában, Donaldson és Kronheimer 1990-ben megjelent hosszabb lélegzetű könyvét [DK] ajánljuk figyelmébe.

A jegyzet megértéséhez feltétlenül szükségesek bizonyos algebrai topológiai és differenciálgeometriai alapismeretek. Előbbiek nagy része Milnor és Stasheff könyvében [MS], utóbbiak (röviden összefoglalva) a 2. fejezetben találhatók meg. Az analítikus problémákat (melyek a 3., 4. és 5. fejezetben ismertetett anyaghoz kapcsolódnak) csak érintőlegesen tárgyaljuk. Nagyon sok állítást közlünk bizonyítás nélkül, ezek bizonyítása általában Donaldson és Kronheimer könyvében található meg. Reméljük, hogy az elméletnek ez az aránylag rövid összefoglalása jó előiskolának bizonyul majd a "nagy könyv", [DK] elolvasásához.

Stipsicz András és Szabó Zoltán
1993.

Jelen jegyzet — mint azt a fenti előszó is mutatja — 1993-ban íródott. Az 1994-es esztendő valóságos forradalmat hozott a 4-dimenziós topológiában és gauge-elméletben. Seiberg és Witten — fizikai megfontolásokon alapuló — elmélete szerint a jegyzetünkben tárgyalt Donaldson-invariánsok egyszerűbben is megkaphatók. Egy, az $F_A^+ = 0$ egyenlethez hasonló differenciálegyenlet megoldásainak terét a 7. fejezetben ismertetett módszerhez hasonlóan kiértékelve kaphatók meg a Seiberg-Witten invariánsok. Meglepő módon azonban az új egyenlettel kapott modulusterek mindig kompaktak, így jónéhány (a jegyzetben csak vázlatosan említett) technikai probléma Seiberg-Witten invariánsokra nem lép fel. Ez a kompaktság radikálisan leegyszerűsítette és felgyorsította az invariánsok kiszámítását, és új topológiai tételeket eredményezett.

Az évek múltával azonban nem derült ki az, hogy az eredeti (az $F_A^+ = 0$ ASD egyenlettel megadott) modulustér nem-kompaktsága pusztán technikai komplikációkat okoz, vagy esetleg további fontos — a 4-dimenziós sokaság differenciáltopológiájára vonatkozó — információt hordoz. Ezenkívül a fizikusok szemében az instantonok tanulmányozása továbbra is érdekes maradt. Ezen okok alapján döntöttünk úgy a jegyzet megírása után öt évvel, hogy talán mégis érdemes lenne megjelentetni.

Stipsicz András és Szabó Zoltán
1998.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezető

1.1 Négynél alacsonyabb dimenziók

Mielőtt rátérnénk a 4-dimenziós sokaságok osztályozásában elért eredmények és a felhasznált technikák tárgyalására, idézzük fel röviden a más (tehát nem 4) dimenziós sokaságok elméletében bebizonyított legfontosabb tételeket. Először is tisztáznunk kell, mit értünk “sokaságok osztályozása” alatt.

1.1.1. definíció. (a) Egy M összefüggő, Hausdorff, megszámlálható bázisú topologikus tér n-dimenziós *topologikus sokaság*, ha minden pontjának van $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részével homeomorf környezete. Ezen $\{U_\alpha,\ \varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ (ahol tehát $U_\alpha \subset M$ nyílt és $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfizmus) környezetek halmaza a topologikus sokaság *atlasza*. $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in A'}$ ($A' \subset A$) egy *részatlasz* ha $\cup_{\alpha\in A'} U_\alpha = M$.

(b) Legyen r nem-negatív egész. Egy M n-dimenziós topologikus sokaságon C^r-struktúrának nevezünk egy olyan $\{U_\alpha,\ \varphi_\alpha\}_{\alpha\in A'}$ ($A' \subset A$) részatlaszt, melyre $\alpha, \beta \in A'$ esetén $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\colon V_\alpha \cap V_\beta \to V_\alpha \cap V_\beta$ r-szer differenciálható. M *sima* (C^∞) ha létezik olyan részatlasz, melyre a $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ *átmeneti függvények* végtelenszer deriválhatók (simák).

(c) Egy $f\colon M \to N$ C^r-sokaságok közötti függvény a $p \in M$ pontban r-szer differenciálható, ha $p \in U_\alpha^M \subset M$, $f(p) \in U_\beta^N \subset N$ térképekre a $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon V_\alpha^M \to V_\beta^N \subset \mathbb{R}^n$ függvény $\varphi_\alpha^{-1}(p)$-ben r-szer differenciálható. Az f függvény C^r, ha minden $p \in M$ pontban r-szer differenciálható, és C^r-izomorfizmus, ha bijekció és inverze is C^r-leképezés ($r = 1, 2, ..., \infty$).

A továbbiakban tegyük fel, hogy M kompakt, összefüggő, irányított C^r-sokaság. Bár r tetszőleges nemnegatív egész lehet, a következő tétel azt mutatja, hogy az $r = 0$ (topologikus) illetve az $r = \infty$ (sima) esetek az igazán érdekesek.

1.1.2. tétel. *Legyen M tetszőleges (kompakt) C^r-sokaság ($1 \leq r < \infty$). Ekkor M C^r-atlaszának létezik C^∞ részatlasza, és ez egy — diffeomorfizmus erejéig — egyértelmű sima struktúrát definiál M-en.* $\square$

Az $1 \leq r$ feltétel nagyon fontos, a tétel topologikus sokaságokra — mint látni fogjuk — nem igaz. Egy olyan listát szeretnénk tehát összeállítani, amely felsorolja az összes topologikus sokaságot, és mindegyikre jelzi, hogy azon van-e sima struktúra. Természetesen azt is szeretnénk tudni, hogy ha egy topologikus sokaságon vannak sima struktúrák, mennyi közülük a nem-diffeomorf. Ezt a felsorolást értjük osztályozás alatt. Vegyük először szemügyre a 4-nél kisebb dimenziós sokaságokat!

dim M=1: Ekkor az egyetlen (kompakt összefüggő) topologikus sokaság az $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ körvonal, amin — diffeomorfizmus erejéig — egyetlen sima struktúra van.

dim M=2: Az irányított, kompakt, összefüggő felületek elmélete jól ismert; akár a $\pi_1(M)$ fundamentális csoport, akár a $\mathrm{H}_1(M;\mathbb{Z})$ homológia-csoport, akár a $\chi(M)$ Euler-karakterisztika meghatározza a topologikus sokaság osztályát, és minden topologikus 2-sokaság egyetlen sima struktúrát hordoz.

dim M=3:

1.1.3. tétel. *Egy 3-dimenziós topologikus sokaság diffeomorfizmus erejéig pontosan egy sima struktúrát hordoz.* □

A topologikus 3-sokaságok elmélete azonban még nincs lezárva. A terület legfontosabb kérdése a következő, Poincaré-tól származó sejtés.

1.1.4. sejtés. *Egy M 3-dimenziós kompakt egyszeresen összefüggő sokaság homeomorf az S^3 3-dimenziós gömbfelülettel.*

Mivel a 3-dimenziós sokaságok elmélete jegyzetünk anyagához szorosan nem kapcsolódik, így csak megemlítjük, hogy bár az osztályozás még nem készült el, a válasz — Thurston nevezetes geometrizálhatósági sejtése nyomán — legalább sejtés formájában megvan.

Ha a dim M $\geq$4 eseteket akarjuk megvizsgálni, újabb feltételt kell szabnunk sokaságunkra a következő könnyen belátható tény miatt.

1.1.5. állítás. *Legyen G tetszőleges végesen prezentált csoport és $n \geq 4$. Ekkor létezik olyan M n-dimenziós kompakt összefüggő irányított sokaság, melynek fundamentális csoportja G-vel izomorf.* □

Mivel pedig a csoport-izomorfizmus eldöntése nagyon nehéz feladat (nem algoritmizálható), nem várható a sokaságok felsorolása sem. A továbbiakban tegyük fel tehát eddigi feltevéseink mellé azt is, hogy M egyszeresen összefüggő.

1.2 Egzotikus struktúrák

Az első példát homeomorf de nem diffeomorf sokaságokra Milnor adta [M2].

1.2.1. tétel. *Létezik egy olyan M 7-dimenziós sima sokaság, mely homeomorf de nem diffeomorf az S^7 7-dimenziós gömbfelülettel.* □

Mielőtt továbbmennénk, röviden tekintsük át Milnor konstrukcióját! Vegyük az S^4 feletti principális SO(4)-nyalábokat. Ezek $[S^3,\mathrm{SO}(4)] = \pi_3(\mathrm{SO}(4)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ elemeivel jellemezhetők (a fenti S^3 az S^4 "egyenlítője"). Ez a két egész nem más, mint az SO(4)-nyaláb $e \in \mathrm{H}^4(S^4;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ Euler-osztálya és $p_1 \in \mathrm{H}^4(S^4;\mathbb{Z})$ Pontrjagin-osztálya. Ismert [DW], hogy pontosan azokhoz az $(e,p_1) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ párokhoz tartozik — izomorfizmus erejéig egyértelmű — SO(4)-nyaláb, melyekre $p_1 \equiv 2e \pmod 4$. Vegyük a $P_{(e,p_1)} \to S^4$ principális SO(4)-nyalábhoz tartozó $E \to S^4$ négydimenziós vektornyaláb egységnyi hosszú vektorait, legyen ez a tér

$$E(e,p_1) = \{v \in E \mid \ \|v\| = 1\};$$

$E(e,p_1) \to S^4$ tehát egy S^3 fibrumú fibrálás. E fibrálás homotopikus egzakt sorozatát felírva azonnal kapjuk, hogy $E(e,p_1)$ 2-összefüggő tér (azaz $\pi_1(E(e,p_1)) = \pi_2(E(e,p_1)) = 0$). A Hurewicz tételből és Poincaré dualitási tételéből következik, hogy $\mathrm{H}_i(E(e,p_1);\mathbb{Z}) = 0$ ha $i = 1,2,5,6$. Tudjuk továbbá, hogy $\mathrm{H}_0(E(e,p_1);\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}_7(E(e,p_1);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Felírva a fibrálás Gysin-sorozatát,

$$\mathrm{H}_4(S^4) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}_3(S^3) \to \mathrm{H}_3(E(e,p_1)) \to \mathrm{H}_3(S^4) = 0$$

adódik, ahol $\partial\colon \mathrm{H}_4(S^4) \to \mathrm{H}_3(S^3)$ a nyaláb $e = e(E)[S^4]$ Euler-karakterisztikájával való szorzás. Tehát ha $e = \pm 1$, akkor ∂ izomorfizmus, vagyis $\mathrm{H}_3(E(\pm 1,p_1)) = 0$. Így $E(\pm 1,p_1)$ homológiája megegyezik S^7 homológiájával. Morse-elméleti eszközökkel belátható, hogy $E(\pm 1,p_1)$ homeomorf S^7-tel [M1], [MS]. Legyen $W = W(\pm 1,p_1) = \{v \in E \mid \|v\| \leq 1\}$, tehát $\partial W = E(\pm 1,p_1)$. Számolás mutatja, hogy

1.2.2. lemma. *$p_1(W) \in \mathrm{H}_4(W;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ egyenlő p_1-gyel; W szignatúrájára pedig $\sigma(W) = 1$.* □

Abból a feltevésből, hogy $E(\pm 1,p_1)$ és S^7 diffeomorfak, p_1-re fogunk feltételt kapni. Tegyük fel tehát, hogy $E(\pm 1,p_1)$ és S^7 diffeomorfak. Ekkor W-hez $\partial W = E(\pm 1,p_1)$ mentén egy $D^8 = \{v \in \mathbb{R}^8 \mid \|v\| \leq 1\}$ 8-dimenziós golyót ragaszthatunk, ezáltal egy $V = W \cup_{\partial W} D^8$ zárt 8-dimenziós sokaság definiálható.

1.2.3. tétel. (Hirzebruch Szignatúra-tétele 8-dimenziós sokaságokra) *Egy sima, kompakt, zárt, irányított 8-dimenziós M sokaságra*

$$\sigma(M) = \frac{7p_2 - p_1^2}{45},$$

ahol $p_i^{n_i} = \langle p_i^{n_i}(TM), [M] \rangle$. □

Ezt a tételt V-re alkalmazva

$$1 = \sigma(V) = \frac{7p_2 - p_1^2}{45}$$

-öt kapunk, vagyis $p_1^2 \equiv 4 \pmod 7$. Így megkaptuk a kívánt feltételt p_1-re:

1.2.4. tétel. *Ha $p_1 \equiv 2 \pmod 4$ és p_1^2 nem kongruens 4-gyel (moduló 7) — például $p_1 = 6$ — a kapott $E(\pm 1, p_1)$ 7-dimenziós sokaság homeomorf, de nem diffeomorf S^7-tel.* □

Milnor fenti példája tehát azt mutatja, hogy egy topologikus sokaságon nem várható egyértelmű sima struktúra. Négynél magasabb dimenzióban azonban igaz a következő tétel:

1.2.5. tétel. (Sullivan) *Legyen M rögzített n-dimenziós topologikus sokaság, $n \geq 5$. Ekkor létezik $X_1, ..., X_t$ M-mel homeomorf, páronként nem-diffeomorf sima sokaság, hogy minden M-mel homeomorf Y sima sokaságra található i, melyre X_i diffeomorf Y-nal. Vagyis ha $n \geq 5$, akkor egy kompakt egyszeresen összefüggő irányított n-dimenziós topologikus sokaságon legfeljebb véges sok különböző sima struktúra létezik. (A fenti t esetleg 0 is lehet, ekkor M nem látható el sima struktúrával.)* □

A különböző sima struktúrák száma is meghatározható. Például (Milnor-Kervaire), ha az S^n topologikus sokaságon lévő sima struktúrák számát $k(n)$ jelöli, akkor

$$k(6) = 1,\ k(7) = 28,\ k(8) = 2,\ k(9) = 8,\ \dots, k(16) = 1,\ \dots, k(19) = 1096523,\ \dots$$

Az 1.2.5 tétel és a fenti számolás homotópia-elméleti eredményeket, illetve a következő alapvető fontosságú tételt használja:

1.2.6. tétel. (h-kobordizmus-tétel, [Sm]) *Legyen W kompakt egyszeresen összefüggő n-dimenziós peremes sokaság, $\partial W = M_0 \bigcup M_1$, vagyis W egy kobordizmus M_0 és M_1 között. Tegyük fel, hogy az $M_i \subset W$ beágyazás homotopikus ekvivalencia ($i = 0, 1$) és $n \geq 6$. Ekkor $W \cong M_0 \times I$ (homeomorfak ha W topologikus sokaság, diffeomorfak ha sima). Speciálisan M_0 és M_1 izomorfak a megfelelő kategóriában.* □

Ennek a tételnek a bizonyítása erősen használja az $n \geq 6$ feltételt. 1982-ben M. Freedman [F] megmutatta, hogy topologikus sokaságokra a tétel igaz $n = 5$ esetén is. S. Donaldson pedig ellenpéldát talált a h-kobordizmus-tételre a sima kategóriában, vagyis egy (sima) W h-kobordizmusról megmutatta, hogy az (simán) nem direkt szorzat.

Mielőtt továbbmennénk, Freedman és Donaldson munkásságának egyik legmeghökkentőbb következményét szeretnénk idézni, nevezetesen egzotikus $\mathbb{R}^4$-ek létezését.

1.2.7. tétel. *Létezik sima 4-sokaságoknak egy $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}^2}$ családja, hogy a család minden eleme homeomorf $\mathbb{R}^4$-gyel, de a különböző α-hoz tartozó A_α-k páronként nem-diffeomorfak.* □

Megjegyezzük, hogy $n \neq 4$-re nem léteznek egzotikus $\mathbb{R}^n$-ek:

1.2.8. tétel. *Tegyük fel, hogy az X sima n-dimenziós sokaság homeomorf $\mathbb{R}^n$-nel és $n \neq 4$. Ekkor X és $\mathbb{R}^n$ diffeomorfak.* □

1.3 4-dimenziós sokaságok

Térjünk most rá a kompakt, egyszeresen összefüggő irányított 4-sokaságok tárgyalására. Mivel $\pi_1(M) = 1$, így $\mathrm{H}_1(M;\mathbb{Z}) = \mathrm{H}^3(M;\mathbb{Z}) = 0$ és $\mathrm{H}^1(M;\mathbb{Z}) = \mathrm{H}_3(M;\mathbb{Z}) = 0$. Azt is tudjuk, hogy $\mathrm{H}_0(M;\mathbb{Z}) = \mathrm{H}^0(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ és $\mathrm{H}^4(M;\mathbb{Z}) = \mathrm{H}_4(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (az izomorfizmust az irányítás adja meg). $\mathrm{H}^2(M;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}_2(M;\mathbb{Z})$ szabad Abel-csoport, melynek dimenziója b_2 (M második Betti-száma). Figyelembe véve $\mathrm{H}^*(M;\mathbb{Z})$ gyűrű-struktúráját, egy $\cup\colon \mathrm{H}^2(M;\mathbb{Z}) \times \mathrm{H}^2(M;\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^4(M;\mathbb{Z})$ leképezést kapunk, ami a

$$q(a,b) = \langle a \cup b, [M]\rangle \in \mathbb{Z}$$

szimmetrikus bilineáris formát adja meg ($[M]$ az M irányított sokaság fundamentális osztálya). A Poincaré-dualitás miatt ez egy nem-elfajuló forma. Ha M sima sokaság (a fenti definíció csak azt használja ki, hogy M topologikus sokaság), q másként is definiálható. Jelölje $PD(a) \in \mathrm{H}_2(M;\mathbb{Z})$ az $a \in \mathrm{H}^2(M;\mathbb{Z})$ kohomológia-elem Poincaré-duálisát, Σ_a pedig egy $PD(a)$-t reprezentáló M-be ágyazott kétdimenziós felületet. Σ_a és Σ_b választható úgy, hogy egymást transzverzálisan messék. Belátható, hogy $q(a,b) = \#\Sigma_a \cap \Sigma_b$ (a transzverzalitás miatt $\Sigma_a \cap \Sigma_b$ véges sok pontból áll, amikhez az irányítás előjeleket rendel, ezen ± 1-ek összegét jelöli $\#\Sigma_a \cap \Sigma_b$). Ezen azonosság miatt q-t az M sokaság *metszetformájának* hívjuk.

A továbbiak előtt röviden tekintsük át a nem-elfajuló szimmetrikus bilineáris formák osztályozását.

- A q bilineáris forma $rk(q)$ *rangja* annak az A szabad Abel-csoportnak a rangja, melyen q értelmezve van. (Egy metszetformára ez $b_2 = dim\ \mathrm{H}^2(M;\mathbb{Z})$.)
- q szignatúrájának definiálásához emlékeznünk kell arra, hogy habár q nem feltétlenül diagonalizálható A felett, a megfelelő $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ valós vektortéren q már diagonális alakra hozható, a főátlóban ± 1-ekkel (ez a q szimmetrikus forma Sylvester-féle normálalakja). Ha k darab $+1$ és l darab -1 áll a diagonalizált forma főátlójában (vagyis $q_{\mathbb{R}} \cong k\langle 1\rangle \oplus l\langle -1\rangle$), akkor q *szignatúrája*, $sign(q) = k - l$.
- A harmadik invariáns nem tűnik érdekesnek, de a klasszifikációs tételben fontos szerepe van. A q szimmetrikus bilineáris forma *páros*, ha minden $\alpha \in A$ esetén $q(\alpha,\alpha) \in \mathbb{Z}$ páros, egyébként q *páratlan*.

A egy bázisának kijelölésével q egy mátrixszal reprezentálható. Mivel q nem-elfajuló, ennek a mátrixnak a determinánsa ± 1.

1.3.1. tétel. ([HM])

(a) *Rögzített m-re az m rangú A Abel-csoporton véges sok nem-ekvivalens definit (tehát $rk(q) = |sign(q)|$ egyenlőséget teljesítő) szimmetrikus nem-elfajuló bilineáris forma létezik. (Ez a véges szám azonban nagyon nagy lehet, például $m = 40$-re kb. 10^{50}.)*

(b) *Ha q indefinit, páratlan és $n+m = rk(q)$, $n-m = sign(q)$, akkor q ekvivalens az $n\langle 1\rangle \oplus m\langle -1\rangle$ mátrixszal megadott metszetformával.*

(c) *Ha q indefinit és páros, akkor $sign(q)$ osztható nyolccal. $8l = sign(q)$ és $k = rk(q)$ jelöléssel q az $lE_8 \oplus \frac{k-8l}{2}H$ mátrixszal reprezentált metszetformával ekvivalens, ahol*

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Tehát egy indefinit metszetformát a rangja, szignatúrája és paritása meghatározza.

1.3.2. megjegyzés. Ha $sign(q) < 0$, tehát $l < 0$, akkor lE_8 úgy értendő, hogy a $(-E_8)$ mátrixot vesszük $(-l)$-szer. Vegyük észre, hogy $-H$ és H ekvivalensek, és például $E_8 \oplus (-E_8) \cong 8H$.

Fenti előkészületek után kimondhatjuk M. Freedman nevezetes tételét, mely egyszeresen összefüggő, kompakt, irányított topologikus négysokaságok teljes osztályozását adja.

1.3.3. tétel. ([F]) *Legyen q nem-elfajuló szimmetrikus bilineáris forma.*

a) Ha q páros, akkor létezik olyan M egyszeresen összefüggő, kompakt, irányított topologikus 4-sokaság, melynek metszetformája q. Bármely két ilyen sokaság homeomorf.

b) Ha q páratlan, akkor léteznek M_1, M_2 egyszeresen összefüggő, kompakt, irányított négysokaságok, melyeknek metszetformája q; M_1 és M_2 nem homeomorfak, de bármely más q metszetformájú 4-sokaság M_1-gyel vagy M_2-vel homeomorf. M_1 és M_2 közül pontosan az egyikre lehet az $M_i \times S^1$ 5-dimenziós topologikus sokaságot sima struktúrával ellátni, így M_1 és M_2 közül legfeljebb az egyiken van sima struktúra. □

Eltekintve tehát a páratlan esetbeli kettősségtől, a metszetformák a topologikus 4-sokaságokat teljesen leírják. A következő három kérdésre szeretnénk tehát — legalább részben — választ kapni:

(1) Mely metszetformák realizálhatók sima sokasággal?

(2) Egy sima sokasággal realizálható metszetforma hány páronként nem-diffeomorf sima 4-sokaságnak a metszetformája?

(3) Egy sima sokasággal realizálható metszetformára soroljuk fel az összes azt realizáló sima sokaságot.

A következő, Rohlintól származó tétel adott először részleges választ az első kérdésre:

1.3.4. tétel. ([R]) *Ha M sima spin 4-sokaság, akkor $sign(q_M)$ osztható tizenhattal.* □

1.3.5. megjegyzés. Egy M egyszeresen összefüggő 4-sokaság pontosan akkor spin (azaz $w_2(TM) = 0$) ha q_M metszetformája páros.

Tehát például a $(2k+1)E_8 \oplus lH$-val ekvivalens metszetformák nem realizálhatóak sima sokasággal. Donaldson munkássága hozott újabb áttörést az 1) kérdés megválaszolásában.

1.3.6. tétel. ([D2]) *Legyen M olyan sima egyszeresen összefüggő, kompakt, irányított 4-sokaság, melynek q_M metszetformája definit. Ekkor q_M $\mathbb{Z}$ felett diagonalizálható, vagyis ekvivalens $\pm I$-vel (I a megfelelő dimenziójú egység-mátrixot jelöli).* □

1.3.7. tétel. ([D3])

a) Ha az M sima, egyszeresen összefüggő, kompakt, irányított 4-sokaság metszetformája $2kE_8 \oplus H$, akkor $k = 0$.

b) Ha az M egyszeresen összefüggő, kompakt, irányított 4-sokaság metszetformája $2kE_8 \oplus 2H$, akkor $k = 0$.

□

Könnyen meggondolható, hogy a szóbajövő definit ($\pm I$), illetve a páratlan indefinit metszetformák realizálhatók is sima sokasággal (lásd a 8. fejezetet). Tehát definit és páratlan indefinit metszetformák esetében az 1) kérdésre a válasz ismert. A 8. fejezetben azt is látni fogjuk, hogy H és $2(-E_8) \oplus 3H$ is realizálható sima sokasággal. Ebből egyszerűen adódik, hogy $2k(-E_8) \oplus (3k + l)H$ is realizálható (k, l pozitív egészek). Néhány páros metszetforma sima realizációjának kérdése azonban még nyitott.

Második kérdésünkre szintén csak részleges választ tudunk adni. Ez a válasz jelentősen különbözik a magasabb dimenziókban megszokott eredményektől. Mivel — egy Walltól származó tétel szerint — izomorf metszetformájú 4-sokaságok h-kobordánsak, a következő tétel azt mutatja, hogy a h-kobordizmus-tétel 4-dimenzióban nem teljesül.

1.3.8. tétel. *Az alábbi metszetformákat végtelen sok nem-diffeomorf sima sokaság realizálja:*

- $2n(-E_8) \oplus (4n-1)H$ *($n \geq 1$ egész).*
- $(2k-1)\langle 1\rangle \oplus N\langle -1\rangle$ *($k \geq 1$ és $N \geq 10k-1$).* □

A harmadik kérdésre még sejtés formájában sem ismert semmilyen válasz.

Jegyzetünk 2. fejezetében vázlatosan felidézzük azokat a differenciálgeometriai alapfogalmakat, melyekre a későbbiekben szükségünk lesz. A 3. és 4. fejezet az ASD konnexiók modulusterével foglalkozik. Az 5. fejezetet az egyik legfontosabb segédeszköz, a ragasztási konstrukció ismertetésének szenteljük. A modulustérről összegyűjtött információk már lehetővé teszik azt, hogy a 6. fejezetben (vázlatosan) belássuk Donaldson egyik nemlétezési tételét (1.3.6 tétel). A Donaldson-invariáns és a Donaldson-polinom definíciójának ismertetése (7. fejezet) után a 8. fejezetben példákat mutatunk az eddig megismert invariánsok kiszámítására. A 9. és a 10. fejezetben pedig a Donaldson-polinom két alapvető tulajdonságával, majd a polinom kiszámításában elért eredményekkel ismerkedünk meg.

2. fejezet

Egy kis differenciálgeometria

2.1 A konnexió definíciója

Ebben a fejezetben röviden felidézzük a differenciálgeometria néhány olyan alapfogalmát, melyeket a későbbiekben használni fogunk.

Legyen $P \to M$ adott principális G-nyaláb (a továbbiakban mindig feltesszük, hogy G=SU(2) vagy SO(3)), $E \to M$ pedig a hozzá asszociált vektornyaláb. A következőkben a konnexió fogalmának két egymással ekvivalens definícióját fogjuk megadni. Jelölje $\Omega^i(M;E)$ a $\Gamma(M;\Lambda^i M \otimes E)$ nyaláb-értékű i-formák terét. (Egy $\pi: E \to M$ nyalábra $\Gamma(M;E)$ a továbbiakban az $\{s: M \to E \mid s \text{ egy } C^\infty\text{-leképezés, és } \pi \circ s = \mathrm{id}_M\}$ szelések terét jelöli.)

2.1.1. definíció. Egy $\nabla: \Omega^0(M;E) \to \Omega^1(M;E)$ lineáris operátort *konnexiónak* nevezünk, ha $f \in C^\infty(M)$ esetén

$$\nabla(f \cdot s) = df \cdot s + f \cdot \nabla(s) \quad (s \in \Omega^0(M;E)).$$

∇-t szokás *kovariáns deriválásnak* is nevezni. Sok esetben hasznosabb a konnexiókat más szemszögből, sokkal inkább geometriai objektumokként kezelni. Ehhez azonban némi előkészítésre van szükségünk.

Mivel $\pi: P \to M$ principális G-nyaláb, (definícó szerint) G szabadon hat (jobbról) P-n és $P/G \cong M$. Ez a G-hatás egy ϕ_p izomorfizmust definiál $Ker\ d\pi_p \leq T_pP$ (a fibrum érintőtere avagy függőleges vektorok) és a $Lie(G)$ Lie-algebra között: egy $\eta \in Lie(G)$ elemet $\{g_t\}$ 1-paraméteres részcsoporttal reprezentálva $\phi_p(\frac{d}{dt}(p \cdot g_t)|_{t=0}) = \eta$ egy

$$\phi_p: Ker\ d\pi_p \to Lie(G)$$

izomorfizmust ad meg. Idézzük emlékezetünkbe, hogy G hat

- P-n (jobbról),
- TP-n ($g \in G$-re $dg = g^*: TP \to TP$),
- $Lie(G)$-n pedig az adjungált hatással (egy $\{g_t\}$ 1-paraméteres részcsoport képe $\{g^{-1}g_tg\}$ 1-paraméteres részcsoport lesz).

2.1.2. definíció. Egy ω P-n definiált $Lie(G)$-értékű 1-forma (tehát $\Omega^1(P;Lie(G))$ egy eleme) konnexió, ha:
(I) $\omega|_{Ker\ d\pi_p} = \phi_p$, és (II) $g \in G$ esetén $\omega_{pg}(g^*v) = g^{-1}\omega_p(v)g \in Lie(G)$.

Először is kapcsolatot szeretnénk találni a két definíció között. Belátjuk, hogy ∇ vagy ω megadása ekvivalens egy olyan szabály rögzítésével, mely lehetővé teszi M feletti vektorok (M-beli) görbe menti párhuzamos eltolását. Ezáltal — a párhuzamos eltolás közbeiktatásával — ∇ egyértelműen meghatároz egy $\omega \in \Omega^1(P;Lie(G))$ 1-formát és fordítva.

Egy ∇ kovariáns deriválást rögzítve a következő módon definiálhatjuk az $s_0 \in E_{m_0}$ vektor $\gamma: [0,1] \to M$ $(\gamma(0) = m_0)$ görbe menti eltoltját: Először is $\nabla: \Gamma(E) \to \Gamma(E) \otimes \Gamma(T^*M)$ helyett ∇-t tekinthetjük egy

$\Gamma(E)\otimes\Gamma(TM)\to\Gamma(E)$ operátornak. Kiterjesztve a $\dot\gamma$ γ-menti vektormezőt egy $X\in\Gamma(TM)$ elemmé, keressük meg azt az $s\in\Gamma(E)$ szelést, melyre $\nabla(s,X)=0$ és $s(m_0)=s_0$. Az $s(\gamma(1))\in E_{\gamma(1)}$ elemet fogjuk az $s_0\in E_{\gamma(0)}$ vektor γ menti párhuzamos eltoltjának nevezni. Természetesen, ha adott egy párhuzamos eltolási szabály, vagyis minden görbére rögzítve van egy $E_{\gamma(0)}\to E_{\gamma(1)}$ izomorfizmus, ∇-t könnyen definiálhatjuk: $s\in\Gamma(E)$ és $X\in\Gamma(TM)$ esetén az $m\in M$ pontban $X(m)$-et reprezentáljuk egy $\gamma\colon(-\epsilon,\epsilon)\to M$ $\gamma(0)=m,\ \dot\gamma(0)=X(m)$ görbével, majd az $s(\gamma(t))\in E_{\gamma(t)}$ vektorokat toljuk párhuzamosan az $E_{\gamma(0)}$ fibrumba. Ezáltal $E_{\gamma(0)}$-ban kapunk egy $\bar s_t$ görbét, ennek $t=0$-ban vett deriváltját fogjuk a $\nabla(s,X)$ szelés $m\in M$ pontbeli értékeként definiálni. A fenti gondolatmenet tehát azt mutatja, hogy egy kovariáns deriválás egyértelműen meghatároz egy párhuzamos eltolási szabályt és fordítva. Lássuk mi a kapcsolat a konnexió 1-forma (ω), és a párhuzamos eltolás között! Az $\omega\in\Omega^1(P;Lie(G))$ 1-forma egy $\{Ker\ \omega_p\}$ altérmezőt (disztribúciót) definiál P-n, melyről könnyű látni, hogy a $\{Ker\ d\pi_p\}$ függőleges vektorok egy direkt kiegészítője, vagyis $Ker\ \omega_p\oplus Ker\ d\pi_p=T_pP$. Ezért $Ker\ \omega_p$ elemeit az ω konnexió *vízszintes vektorainak* is nevezik. Egy $\gamma\colon[0,1]\to M$ görbe felemeltjének nevezzük azt a $\Gamma\colon[0,1]\to P$ görbét, melyre $\pi\circ\Gamma=\gamma$ (π a $P\to M$ nyaláb projekciója). Könnyű meggondolás mutatja, hogy $\Gamma(0)\in P_{\gamma(0)}$ rögzítésével egyetlen olyan Γ felemelése létezik γ-nak, melyre

$$\dot\Gamma(t)=d\Gamma(t)\in Ker\ \omega,$$

vagyis a felemelt Γ görbe érintői vízszintesek. A $\Gamma(0)\to\Gamma(1)$ függvény egy $P_{\gamma(0)}\to P_{\gamma(1)}$ izomorfizmust ad meg, ami az asszociált vektornyalábon éppen egy párhuzamos eltolási szabályt jelent. Visszafelé egyszerű gondolatmenet mutatja, hogy a párhuzamos eltolási szabály kijelöli a vízszintes vektorokat ($Ker\ \omega$ elemeit), hiszen a párhuzamos eltolási szabály megadja a Γ "vízszintes" felemeléseket, ezek érintőit véve kapjuk $Ker\ \omega$ elemeit. Mivel $Ker\ d\pi$-n egy ω konnexió 1-forma (a 2.1.2 definíció (I) pontja értelmében) rögzített, $Ker\ \omega$ megadásával már az ω 1-forma is definiált. Megmutattuk tehát, hogy a konnexió két definíciója (∇ és ω) ekvivalens. Ezentúl egy konnexiót A-val fogunk jelölni, és mindig az előnyösebb realizációját (kovariáns deriválás vagy 1-forma) fogjuk használni.

A továbbiak előtt néhány jelölést rögzítünk. Jelölje $\mathcal{A}_P$ a $P\to M$ nyalábon lévő konnexiók terét. Mindkét definícióból látszik, hogy $A_1,A_2\in\mathcal{A}_P$ esetén A_1+A_2 nem konnexió. ω_1,ω_2 konnexió 1-formákra azonban $\omega_1-\omega_2$ különbség $Ker\ d\pi$-n eltűnik, így $\omega_1-\omega_2$ egy M-en lévő 1-forma P-re való visszahúzásával egyenlő. A P-hez az adjungált hatással asszociált $Lie(G)$ fibrumú nyalábot adP-vel jelölve a következő állítás teljesül:

2.1.3. állítás. *$\omega_1,\omega_2\in\mathcal{A}_P$-re pontosan egy olyan $\eta\in\Omega^1(M;adP)$ elem létezik, melyre $\omega_1-\omega_2=\pi^*\eta$.* □

Tehát bár $\omega\in\mathcal{A}_P$ értékét a triviális $P\times Lie(G)$ nyalábban veszi fel, η már adP-értékű 1-forma lesz M-en. Vagyis $\mathcal{A}_P$ egy $\Omega^1(M;adP)$-re nézve affin végtelen dimenziós tér. Legyen $\mathcal{G}_P$ az a csoport, melynek elemei olyan $g\colon P\to P$ nyaláb-automorfizmusok, melyek a bázison az identitást indukálják, vagyis $g(P_m)=P_m$ minden $m\in M$-re. A $\mathcal{G}_P$ csoportot szokás *mérce-csoportnak* (gauge group) nevezni.

2.1.4. megjegyzések.

- Rövid megfontolás mutatja, hogy $\mathcal{G}_P$ elemei annak az $AdP\to M$ G-fibrumú nyalábnak a széléseivel azonosíthatók, melyet úgy kapunk, hogy $P\to M$-hez a konjugált hatással G-t asszociáljuk (vagyis $AdP=P\times_G G$, ahol $g\in G$ a $h\in G$ elemen a $h\mapsto g^{-1}hg$ konjugált hatással hat). AdP tehát egy G-fibrumú de nem principális nyaláb! A $P\to M$ nyalábhoz tehát az Ad-hatással G-t asszociálva az $AdP\to M$, az ad-hatással $Lie(G)$-t asszociálva pedig az $adP\to M$ nyalábot kapjuk.
- A fenti definícióból jól látható, hogy $\Omega^0(M;AdP)=\Gamma(M;AdP)$ csoport-struktúrával, $\Omega^0(M;adP)=\Gamma(M;adP)$ pedig Lie-algebra struktúrával rendelkezik, és természetesen a $\mathcal{G}_P=\Omega^0(M;AdP)$ csoport Lie-algebrája éppen $\Omega^0(M;adP)$ lesz.
- Mivel $G=$SO(3) (illetve $G=$SU(2)) esetén a $Lie(G)$ Lie-algebra részalgebrája $\mathbb{R}^3$ (illetve $\mathbb{C}^2$) endomorfizmus-algebrájának, ha $EndE\to M$ jelöli az $E\to M$ nyaláb endomorfizmusainak nyalábját, akkor

$$\Omega^0(M;adP)\le\Omega^0(M;EndE)$$

áll fenn.

Mint láttuk, a $P \to M$ nyalábon lévő A konnexióhoz a P-hez asszociált $E \to M$ vektornyalábon egy ∇_A kovariáns deriválási operátor tartozik. (Itt $E \to M$-et a G csoport természetes — SO(3) esetén a 3-dimenziós valós, SU(2) esetén a 2-dimenziós komplex — reprezentációját használva kapjuk meg $P \to M$-ből.) Természetesen minden asszociált vektornyalábon definiálható az A konnexióhoz tartozó kovariáns deriválási operátor. Ezek közül számunkra a továbbiakban a d_A-val jelzett, $adP \to M$ szelésein ható operátor lesz különösen fontos.

2.1.5. feladat. Lássuk be, hogy a $d_A\colon \Omega^0(M; adP) \to \Omega^1(M; adP)$ operátor egy $\omega \in \Omega^0(M; adP)$ elemen a következő módon hat: egy $s \in \Omega^0(M; E) = \Gamma(E)$ szelésre

$$(d_A\omega)(s) = \nabla_A(\omega(s)) - \omega(\nabla_A(s)).$$

(Ne feledjük, hogy az $\omega \in \Omega^0(M; adP) \leq \Omega^0(M; EndE)$ elem hat az $E \to M$ nyalábon, és így az $\Omega^i(M; E)$ tereken is.)

$\mathcal{G}_P$ a visszahúzással természetesen hat az $\mathcal{A}_P$ téren. A $\mathcal{B}_P = \mathcal{A}_P/\mathcal{G}_P$ faktortérnek a későbbiekben nagyon fontos szerep jut majd.

2.2 Görbület

Egy adott ∇ konnexió F_∇ görbületét a következő módon adhatjuk meg. A $\Gamma(M; E \otimes \Lambda^i M) = \Omega^i(M; E)$ teret röviden $\Omega^i(E)$-vel jelölve legyen $\nabla^{(1)}\colon \Omega^1(E) \to \Omega^2(E)$ az a lineáris operátor, melyre

$$\nabla^{(1)}(s \cdot \omega) = \nabla(s)\omega - s \cdot d\omega \quad (\omega \text{ 1-forma, } s \in \Gamma(E)).$$

Ez a Leibnitz-típusú szabály egyértelműen definiálja $\nabla^{(1)}$-t ∇ ismeretében (hasonló módon tetszőleges i-re kiterjesztve a definíciót $\nabla^{(i)}\colon \Omega^i(E) \to \Omega^{i+1}(E)$ operátort kaphatunk). Bár ∇ nem $C^\infty(M)$-lineáris — hiszen $\nabla(fs) \neq f \cdot \nabla(s)$ $(f \in C^\infty(M), s \in \Gamma(E))$ —, könnyű számolás mutatja, hogy $\nabla^{(1)} \circ \nabla\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E \otimes \Lambda^2 M)$ már igen. Másszóval a $\nabla^{(1)} \circ \nabla$ operátor $s \in \Gamma(E)$ elemen felvett értéke az $m \in M$ pontban csak az $s(m) \in E_m$ értéktől, nem pedig s-nek az m pont egy környezetén való viselkedésétől függ. Ez azt jelenti, hogy létezik egy olyan $F_\nabla\colon E \to E \otimes \Lambda^2 M$ nyalábleképezés, melyre

$$\nabla^{(1)} \circ \nabla(s)(m) = F_\nabla(s(m));$$

ezt a leképezést *görbületnek* nevezzük. F_∇ tehát a $Hom(E, E \otimes \Lambda^2 M)$ nyaláb egy szelése. $Hom(E, E \otimes \Lambda^2 M)$ természetesen izomorf az $E \otimes \Lambda^2 M \otimes E^*$ nyalábbal, és könnyen belátható, hogy $adP \cong E \otimes E^*$. Végeredményben tehát a ∇ konnexió F_∇ görbülete $\Gamma(adP \otimes \Lambda^2 M) = \Omega^2(M; adP)$ egy eleme.

Mivel a konnexiónak is két (egymással ekvivalens) definícióját adtuk, a teljesség kedvéért megadjuk az F görbületet arra az esetre is, amikor a konnexiót egy $\omega \in \Omega^1(P; Lie(G))$ 1-forma reprezentálja.

Tekintsük az $\bar{F}_\omega = d\omega + \omega \wedge \omega \in \Omega^2(P; Lie(G))$ Lie-algebra értékű 2-formát. $\omega \wedge \omega$ egy kis magyarázatot igényel: $\omega(\tau)$ Lie-algebra elemet reprezentálhatjuk egy mátrixszal, melyben a mátrix-elemek számértékű 1-formák ($\tau \in T_pP$ egy $p \in P$ pontban). $\omega(\tau_1) \wedge \omega(\tau_2)$ legyen a két mátrix kommutátora úgy, hogy az 1-formákat az ék-szorzással ($\wedge$) szorozzuk össze.

2.2.1. állítás. *Az $\bar{F}_\omega$ 2-forma megszorítása a $\pi\colon P \to M$ fibrálás fibrumainak érintőterére azonosan nulla, sőt $p \in P$ és $\tau_1, \tau_2 \in T_pP$ esetén ha legalább az egyik τ_i érinti a fibrumot ($\tau_i \in Ker\ d\pi_p$), akkor $\bar{F}_\omega(\tau_1, \tau_2) = 0$.* $\square$

Ez másszóval azt jelenti, hogy létezik egy olyan $F_\omega \in \Omega^2(M; adP)$ 2-forma, melyre $\pi^* F_\omega = \bar{F}_\omega$. Az így kapott F_ω lesz a görbületi kettő-forma, mely megegyezik az előző definíció $F_\nabla \in \Omega^2(M; adP)$ szelésével.

2.2.2. megjegyzések.

- Vegyük észre, hogy bár $\bar{F}_\omega \in \Omega^2(P; Lie(G))$ a triviális $P \times Lie(G)$ nyalábban veszi fel értékeit, F_ω már — a nem feltétlenül triviális — adP nyalábba mutat.
- Jelölje ∇_g az (M, g) Riemann-sokaság Levi-Civita konnexióját. Ekkor pontosan $F_\nabla(m) = 0$ esetén található $m \in M$ körül olyan lokális $\{x_1, ..., x_n\}$ koordináta-rendszer, melyre $g = \sum dx_i^2$, vagyis m körül M olyan, mint $\mathbb{R}^n$ a kanonikus metrikával. Ez az észrevétel indokolja a görbület fenti definícióját.

2.2.3. definíció. Egy A konnexiót *laposnak* (flat) nevezünk, ha F_A=0.

Megmutatjuk, hogy rögzített sokaság feletti nyalábon megadható lapos konnexiók a sokaság fundamentális csoportjának reprezentációival azonosíthatók. E kapcsolat megadása előtt azonban szükségünk van a következő definícióra.

2.2.4. definíció. Egy A konnexióra a $\gamma: [0,1] \to M$, $\gamma(0) = \gamma(1) = m_0$ hurok menti párhuzamos eltolással kapott $g: E_{m_0} \to E_{m_0}$ lineáris transzformációt, vagyis $Hol_\gamma(A) \in Aut(E_{m_0})$ elemet az A konnexió γ menti *holonómiájának* nevezzük. Bár $Aut(E_{m_0}) \cong G$ (G a nyaláb struktúra-csoportja), ez az izomorfizmus csak konjugálás erejéig meghatározott, így $Hol_\gamma(A)$ a G csoportnak egy konjugálás erejéig meghatározott eleme.

Ha az A konnexió görbülete 0, vagyis A lapos, homotóp görbékre A holonómiája azonos lesz, tehát A egy $\bar{\phi}: \pi_1(M, m_0) \to Aut(E_{m_0})$ homomorfizmust definiál, ami egy — konjugálás erejéig egyértelmű — $\phi: \pi_1(M) \to G$ reprezentációt ad meg. Jelöljük a továbbiakban $\mathcal{R}_G(M)$-mel a $Hom(\pi_1(M), G)$ teret, $\chi_G(M)$-mel pedig ennek $Hom(\pi_1(M), G)/adG$ faktorát (G konjugálással hat a homomorfizmusok terén, ezt a hatást jelöltük adG-vel). A fentiek szerint a holonómia egy lapos konnexióhoz $\chi_G(M)$ egy elemét rendeli. A $P \to M$ nyalábon lévő lapos konnexiók és a fundamentális csoport reprezentációi közötti kapcsolat megértéséhez a következő konstrukcióval kell megismerkednünk. Adott $\rho: \pi_1(M) \to G$ reprezentációhoz egy $R_\rho \to M$ principális G-nyaláb és A lapos konnexió asszociálható a következő módon: legyen $\bar{M} \to M$ az M univerzális fedése, ami tehát egy principális $\pi_1(M)$-nyaláb. A ρ reprezentáció segítégével ehhez egy $R_\rho \to M$ principális G-nyalábot asszociálhatunk:

$$R_\rho = \bar{M} \times_{\pi_1(M)} G = \bar{M} \times G/\cong,$$

ahol $(m \cdot \gamma, g) \cong (m, \rho(\gamma)g)$ $\quad (m \in \bar{M},\ g \in G,\ \gamma \in \pi_1(M))$. R_ρ tehát nem más mint az $\bar{M}$ feletti triviális G-nyaláb faktora a $\gamma(m, g) = (m\gamma, \rho(\gamma^{-1})g)$ $\pi_1(M)$-hatással. Véve $\bar{M} \times G$-n a triviális konnexiót, a fenti faktorizálás egy A konnexiót definiál $R_\rho \to M$-en. Mivel A lokálisan olyan, mint a triviális konnexió $\bar{M}$-en, $F_A = 0$ teljesül, vagyis A lapos. Azt is könnyű belátni, hogy valójában minden lapos konnexió megkapható evvel a konstrukcióval. Legyen tehát $\chi_G(M, P) = \{\rho \in \mathcal{R}_G(M) \mid R_\rho \cong P\}/adG$, $\mathcal{F}_P = \{A \in \mathcal{A}_P \mid F_A = 0\}/\mathcal{G}_P$; ekkor

2.2.5. állítás. *A $H: \mathcal{F}_P \to \chi_G(M, P)$ holonómia-függvény bijekciót ad meg a P-n lévő lapos konnexiók és $\pi_1(M)$ azon ρ reprezentációi között, melyekre $R_\rho = P$.* □

Az eddig definiált terek — $\mathcal{A}_P$, $\mathcal{B}_P$, $\mathcal{F}_P$ — nem nyújtanak információt M sima struktúrájára vonatkozóan. $\mathcal{A}_P$ végtelen dimenziós affin tér, $\mathcal{F}_P$ a $\pi_1(M)$ ismeretében meghatározható, és $\mathcal{B}_P$-ről is belátható, hogy M-nek csak a homotópia-típusától függ. Egy új — ezúttal egy Riemann-metrikától függő — operátor bevezetésével a helyzet gyökeresen megváltozik.

2.3 A modulustér

Legyen V^n n-dimenziós irányított vektortér, $\langle\ ,\ \rangle$ pozitív definit skaláris szorzás V-n, $\Lambda^i V$ pedig V i-edik külső hatványa. Ha $\{x_1, ..., x_n\}$ V-nek egy ortonormált irányított bázisa, akkor definíció szerint $\{dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_i} \mid j_1 < ... < j_i\}$ $\Lambda^i V^*$-nak legyen egy ortonormált bázisa. (A fenti elemek nyilván bázist alkotnak — az ortonormáltság feltevésével $\Lambda^i V^*$-on egy metrikát is kapunk.)

2.3.1. definíció. A $*: \Lambda^i V^* \to \Lambda^{n-i} V^*$ Hodge-féle csillag-operátort a következő módon definiáljuk:

$$*(dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_i}) = dx_{j_{i+1}} \wedge ... \wedge dx_{j_n}$$

úgy, hogy $\{j_1, ... j_n\}$ az $\{1, ..., n\}$-nek páros permutációja. A bázisról lineárisan kiterjesztve kapjuk meg a $*: \Lambda^i V^* \to \Lambda^{n-i} V^*$ leképezést.

Fibrumonként definiálva ilymódon egy $*: \Gamma(\Lambda^i M) \to \Gamma(\Lambda^{n-i} M)$ operátort kapunk, ami természetesen függeni fog az M-en rögzített Riemann-metrikától. Sokszor fogunk nyaláb-értékű formákkal dolgozni, $*$ definíciója ezekre is természetes módon kiterjeszthető. Ha $dim\ M = 4$, vagyis 4-dimenziós sima sokaságról van szó, és $i = 2$, akkor $*\colon \Gamma(\Lambda^2 M) \to \Gamma(\Lambda^2 M)$, és adP-értékű formákra való természetes kiterjesztéssel

$$*\colon \Omega^2(M; adP) \to \Omega^2(M; adP).$$

Könnyű számolás mutatja, hogy a fenti speciális esetben $*^2$ =Id. Ezért az $\Omega^2(M; adP)$ 2-formák tere felbomlik a $*$ operátor $+1$ és -1 sajátértékhez tartozó sajátalterének direkt összegére:

$$\Omega^2(M; adP) = \Omega^2_+(M; adP) \oplus \Omega^2_-(M; adP).$$

($s \in \Omega^2(M; adP)$-re az $s^+ = \frac{s+*s}{2}$ és $s^- = \frac{s-*s}{2}$ elemek olyanok, hogy $*s^+ = s^+$, $*s^- = -s^-$ és $s = s^+ + s^-$.) Emlékezzünk vissza arra, hogy egy A konnexió F_A görbülete éppen az $\Omega^2(M; adP)$ vektortér egy eleme.

2.3.2. definíció. Egy A konnexió anti-önduális (az angol anti-self-dual szóból ASD), ha $F_A \in \Omega^2_-(M; adP)$ (vagyis $*F_A = -F_A$, vagy másképp $F_A = F_A^+ + F_A^-$ felírással $F_A^+ = 0$). Az A konnexió önduális (SD), ha $F_A \in \Omega^2_+(M; adP)$.

Tehát egy konnexió ASD tulajdonsága függ a $*$-operátortól, amit pedig a választott g metrika definiál. Ha a g metrikától való függést hangsúlyozni akarjuk, g-ASD konnexiókról beszélünk.

2.3.3. definíció.
- A $P \to M$ nyalábon értelmezett g-ASD konnexiók terét (vagyis $\{A \in \mathcal{A}_P \mid A\ g\text{-ASD konnexió}\}$-t) jelölje $\mathcal{ASD}_P(g)$.
- Az $\mathcal{M}_{M,P}(g) = \mathcal{ASD}_P(g)/\mathcal{G}_P$ faktorteret a $P \to M$ nyalábon lévő g-ASD konnexiók modulusterének nevezzük. (Itt impliciten felhasználjuk azt a tényt, hogy az ASD tulajdonság mérce-invariáns, vagyis $\mathcal{G}_P$ hat az $\mathcal{ASD}_P(g)$ téren.)

Miután az ASD tulajdonság és az ASD konnexiók modulustere a továbbiakban központi jelentőségű lesz, a definíció után álljunk meg egy pillanatra. A konnexió és a görbület fogalma ugyan tetszőleges dimenziójú sokaságra értelmezhető, az ASD tulajdonság azonban csak 4-dimenziós sokaságok feletti konnexiókra értelmes. Látni fogjuk, hogy a $\mathcal{B}_P$ tér az M sima sokaság homotópia-típusából már meghatározható (lásd pl. a 7.2.4. tételt), mi viszont M sima struktúráját szeretnénk vizsgálni. A későbbiekben ki fog derülni, hogy az $\mathcal{M}_{M,P}(g) \subset \mathcal{B}_P$ részhalmaz már a sima struktúráról is hordoz magában információt. $\mathcal{M}_{M,P}(g)$ definíciója ugyan egy Riemann-metrika rögzítését is megköveteli, ez azonban nem olyan lényeges; mint $\mathcal{B}_P$-beli "homológia-elem" $\mathcal{M}_{M,P}(g)$ nem fog a g metrikától függeni.

Természetesen ahhoz, hogy $\mathcal{M}_{M,P}(g)$-t $\mathcal{B}_P$-beli homológia-elemként tudjuk szemlélni, néhány további tulajdonságot kell belátnunk róla. A 3. fejezetben tárgyalt struktúra-tétel szerint $b_M^+ > 0$ esetén majdnem minden metrikára $\mathcal{M}_{M,P}(g) \subset \mathcal{B}_P$ sima véges dimenziós sokaság lesz (a $b_M^+ = 0$ esetet külön kell tárgyalnunk, ennek nagy hasznát vesszük majd a 6. fejezetben). Ahhoz, hogy $\mathcal{M}_{M,P}(g)$ homológia-elemként legyen felfogható, be kell látnunk hogy kompakt, és egy irányítást kell rajta rögzítenünk. Az irányítás kérdésére – nagyon érintőlegesen – a 7. fejezetben fogunk kitérni, a kompaktság vizsgálatára pedig a 4. fejezetben kerül majd sor. Látni fogjuk, hogy $\mathcal{M}_{M,P}(g)$ általában nem kompakt, de mivel $b_M^+ > 0$ esetén sokaság, $\mathrm{H}^*(\mathcal{B}_P; \mathbb{Q})$ kompakt tartójú $dim\ \mathcal{M}_{M,P}(g)$ fokú elemei rajta kiértékelhetők. Az így kapott függvény (melynek részletes definícióját a 7.1 fejezetben fogjuk megadni) az eddigi leghatékonyabb eszköznek bizonyult 4-dimenziós sokaságok sima struktúrájának vizsgálatában. Ennek a függvénynek (a Donaldson-polinomnak) néhány érdekes tulajdonságával fogunk a 8., 9. és a 10. fejezetben megismerkedni. Mielőtt azonban továbbmennénk, ejtsünk néhány szót principális G-nyalábokról.

2.4 SU(2)- és SO(3)-nyalábok

Az egyszerűség kedvéért feltettük, hogy G =SU(2) vagy SO(3). Emlékeztetőül

$$\mathrm{SU}(2) = \{A\ 2\times 2\text{-es komplex mátrix} \mid A\bar{A}^T = AA^* = I \text{ és } detA = 1\},$$

$$\mathrm{SO}(3) = \{A\ 3\times 3\text{-as valós mátrix} \mid AA^T = I \text{ és } detA = 1\}.$$

Topologikusan SU(2) az $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid ||x|| = 1\}$ 3-dimenziós gömbfelülettel azonosítható, SO(3) pedig az $\mathbb{RP}^3$ projektív térrel. A $\{\pm I\} \subset \mathrm{SU}(2)$ normálosztóval faktorizálva kapjuk az $\mathrm{SU}(2)/\{\pm I\} \to \mathrm{SO}(3)$ izomorfizmust.

2.4.1. tétel. ([DW])

(a) *Egy M 4-dimenziós sokaságra a $P \to M$ principális SU(2)-nyaláb egyetlen invariánsa P második Chern-osztálya ($c_2(P) \in \mathrm{H}^4(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$); vagyis P_1 és P_2 pontosan akkor izomorfak, ha $c_2(P_1) = c_2(P_2)$; valamint tetszőleges $\alpha \in \mathrm{H}^4(M;\mathbb{Z})$-re létezik olyan $P_\alpha \to M$, melyre $c_2(P_\alpha) = \alpha$.*

(b) *Ismét egy 4-dimenziós M sokaság feletti $P \to M$ principális SO(3)-nyalábra $p_1(P) \in \mathrm{H}^4(M;\mathbb{Z})$ első Pontrjagin-osztály és $w_2(P) \in \mathrm{H}^2(M;Z_2)$ második Stiefel-Whitney osztály teljes invariáns rendszer, vagyis P_1 és P_2 pontosan akkor izomorfak, ha $p_1(P_1) = p_1(P_2)$ és $w_2(P_1) = w_2(P_2)$. Egy $P \to M$ nyaláb ezen két invariánsára mindig fennáll, hogy $w_2^2(P) \equiv p_1(P) \pmod 4$; és minden olyan $(p,w) \in \mathrm{H}^4(M;\mathbb{Z}) \times \mathrm{H}^2(M;Z_2)$ párra, melyre $w^2 \equiv p \pmod 4$ teljesül, létezik egy olyan $P_{p,w} \to M$ SO(3)-nyaláb, melyre $p_1(P_{p,w}) = p$ és $w_2(P_{p,w}) = w$.* □

2.4.2. megjegyzés. A $w_2^2(P) \equiv p_1(P) \pmod 4$ reláció némi magyarázatot igényel; $w_2^2(P)$ a $w_2(P) \in \mathrm{H}^2(M;Z_2)$ kohomológia-osztálynak nem a csészeszorzással vett négyzete — az ugyanis a $\mathrm{H}^4(M;Z_2)$ csoportnak lenne eleme —, hanem $w_2(P)$ Pontrjagin-négyzete, amit a következő módon definiálhatunk egy egyszeresen összefüggő 4-sokaságra: létezik (végtelen sok) olyan $c \in \mathrm{H}^2(M;\mathbb{Z})$, melynek *mod* 2 redukciója éppen $w_2(P)$ (ez könnyen belátható egyszeresen összefüggő M-re). A $c^2 = c \cup c \in \mathrm{H}^4(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ érték ugyan függ c választásától, *mod* 4 redukciója (vagyis $c^2 \in \mathrm{H}^4(M;Z_4)$) azonban már csak $w_2(P)$-től függ. Ezt az értéket jelöltük — kicsit pongyolán — $w_2^2(P)$-vel.

Mielőtt néhány egyszerű példát mutatnánk ASD konnexiókra, nyaláb-elméleti részünk zárásaként tekintsük át, milyen kapcsolat van a nyalábok algebrai topológiai (karakterisztikus osztályok) és differenciálgeometriai (konnexiók) tulajdonságai között (ezt a kapcsolatot Chern-Weil elméletnek is szokás nevezni).

2.4.3. állítás. *Legyen A egy konnexió a $P \to M$ principális SU(2)-nyalábon. Ekkor $8\pi^2 c_2(P)[M] = \int_M Tr(F_A \wedge F_A)$.* □

Emlékezzünk arra, hogy mit jelent két Lie-algebra értékű forma ékszorzata. A korábban tárgyalt konvenciót alkalmazva $F_A \wedge F_A$ Lie-algebra értékű 4-forma, melynek nyomát — egy számértékű 4-formát — már integrálhatjuk M-en. A 4-sokaságon egy Riemann-metrikát, a $Lie(\mathrm{SU}(2)) = su(2)$ Lie-algebrán pedig a $|\eta| = -Tr(\eta^2)$ normát véve

$$Tr(F_A \wedge F_A) = -(|F_A^+|^2 - |F_A^-|^2)d\mu$$

azonosságot kapjuk ($d\mu$ a metrika térfogati formája). Tehát $8\pi^2 c_2(P)[M] = \int_M |F_A^-|^2 d\mu - \int_M |F_A^+|^2 d\mu$. Másrészt $||F_A||^2 = \int_M |F_A|^2 d\mu = \int_M |F_A^+|^2 d\mu + \int_M |F_A^-|^2 d\mu$. Ezeket összevetve $8\pi^2 c_2(P)[M] \leq ||F_A||^2$ adódik, és a minimumot éppen az ASD konnexiók adják, vagyis egy A ASD konnexióra $8\pi^2 c_2(P)[M] = \int_M Tr(F_A \wedge F_A) = \int_M |F_A|^2 d\mu = ||F_A||^2$.

2.4.4. megjegyzés.

- A $\mathcal{YM}: \mathcal{B}_P \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{YM}(A) = \int_M |F_A|^2 d\mu = ||F_A||^2$$

Yang-Mills funkcionál variációs egyenletének, a

$$d_A^* F_A = 0$$

másodrendű parciális differenciálegyenletnek a vizsgálata indította a fizikusokat instantonok, vagyis a fenti egyenlet speciális megoldásainak keresésére. (d_A az A konnexió kovariáns deriválásának $\Omega^2(M; adP)$ nyalábértékű 2-formákra való kiterjesztését jelöli, d_A^* pedig a d_A operátor adjungáltja.) A variációs egyenletnek a $\mathcal{YM}$ funkcionál kritikus pontjai lesznek a megoldásai, ezek közül a minimumok (az *instantonok*) egy elsőrendű egyenlet,

$$F_A^- = 0$$

megoldásai. Természetesen először csak az S^4 4-dimenziós gömbfelület esetére keresték az egyenlet megoldásait (lásd még [AHS]). Később — algebrai geometriai hatásra — $F_A^- = 0$ helyett a vele szimmetrikus $F_A^+ = 0$ egyenletet vizsgálták.

- G=SO(3) esetén hasonló formula adja meg a $P \to M$ nyaláb első Pontrjagin-osztályát:
$$p_1(P) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_M Tr(F_A \wedge F_A).$$
- Az $\frac{1}{8\pi^2}\int_M Tr(F_A \wedge F_A)$ értéket a konnexió energiájának is nevezik. Egy ASD konnexió energiája tehát a nyaláb $c_2(P)[M]$ (vagy $-\frac{1}{4}p_1(P)[M]$) karakterisztikus számával egyezik meg. A k energiájú g-ASD konnexiók terét $\mathcal{M}_M^k(g)$-vel fogjuk jelölni (az SO(3)-esetben az energia még nem határozza meg a nyalábot, így itt megtartjuk P-t a jelölésben).

2.5 A modulustér S^4-en

Legyen $M = S^4$ a standard ($\mathbb{R}^5$-ből örökölt) metrikával, és vegyük azt a $P \to M$ SU(2)-nyalábot, melyre $c_2(P)[S^4] = 1$. Ezt a nyalábot többféleképpen megadhatjuk; például a $\mathbb{HP}^1 \cong S^4$ tér feletti tautológikus kvaternió-vonalnyaláb egységnyi hosszú vektorait véve P-t kapjuk (ebből jól látható, hogy P S^7-tel diffeomorf). Az $S^7 = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{H}^2 \mid |q_1|^2 + |q_2|^2 = 1\}$ modellel a $\pi: S^7 \to S^4$ $\pi(q_1, q_2) = [q_1 : q_2] \in \mathbb{HP}^1$ definíció adja meg a projekciót ($\mathbb{H}^2$-n a belső szorzást $\langle(p_1,p_2),(q_1,q_2)\rangle = Re(p_1\bar{q}_1 + p_2\bar{q}_2)$ formula definiálja). Az
$$\omega = Im(\bar{q}_1 dq_1 + \bar{q}_2 dq_2)$$
definícióval egy $Lie(\mathrm{SU}(2)) = Im\mathbb{H}$-értékű 1-formát kapunk P-n. Könnyen belátható, hogy ez az 1-forma egy konnexió a $P \to S^4$ nyalábon. Be fogjuk látni, hogy ω ASD. Vegyük a következő, sztereografikus projekcióból származó térképet S^4-en: $\varphi: \mathbb{R}^4 = \mathbb{H} \to S^4 = \mathbb{HP}^1$ $\varphi(x) = [x : 1]$, és legyen ezen a térképen $\mu(x) = \frac{(x,1)}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}}$ a $P \to S^4$ nyaláb rögzített szelése. μ segítségével ω-t erre a térképre visszahúzva az
$$A = \mu^*\omega = Im(\frac{\bar{x}dx}{1+|x|^2})$$
kifejezést kapjuk. Ebből pedig a görbület (ami már S^4-en egy 2-forma) könnyen meghatározható:
$$F_\omega = \frac{d\bar{x} \wedge dx}{(1+|x|^2)^2}.$$

2.5.1. állítás. *$F_\omega^+ = 0$, vagyis a fenti ω konnexió ASD.*

Bizonyítás. Tudva, hogy
$$\{dx_1 \wedge dx_2 - dx_3 \wedge dx_4,\ dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4,\ dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3\}$$
pontonkénti bázisa az ASD formáknak, a bizonyítás természetesen könnyű gyakorlat. □

Ebből a megoldásból már megkaphatjuk az összes ASD konnexiót (mely a rögzített $P \to S^4$ nyalábon van definiálva és a standard metrikára nézve ASD).

2.5.2. tétel. *$\mathcal{M}_{S^4}^1$(standard metrika) $\cong B^5$. (Itt B^5 a nyílt ötdimenziós golyót jelöli.)*

Bizonyítás. B^5-nyi sok konnexiót könnyen megadhatunk, annak belátása azonban, hogy több nincs, már nehezebb feladat, így ezt most nem írjuk le (lásd [AHS]). Legyen tehát $p \in S^4$, $\lambda \in (0,1)$ és vegyük p-ből a sztereografikus projekciót. Az $x \mapsto \lambda x$ függvény mentén a fenti $A = Im(\frac{\bar{x}dx}{1+|x|^2})$ $\mathbb{R}^4$-en levő 1-formát visszahúzva egy $A_{p,\lambda}$ 1-formát kapunk, ami egy $P \to S^4$-en lévő konnexióvá terjeszthető ki; a térképen $A_{p,\lambda} = Im(\frac{\bar{x}dx}{\lambda^2+|x|^2})$. λ = 1-et választva természetesen A-t kapjuk vissza. $A_{p,\lambda}$ görbületét a térképen a $\frac{\lambda^2 d\bar{x}\wedge dx}{(\lambda^2+|x|^2)^2}$ kifejezés adja meg, amiből következik, hogy $A_{p,\lambda}$ ASD. Mivel a görbületnek p-ben maximuma van (és a maximum értékéből λ meghatározható), a fenti konnexiók páronként $\mathcal{G}_P$-inekvivalensek (tehát nem mérce-ekvivalensek). B^5 középpontjába A-t, a $p \in S^4$-be mutató sugárra $\{A_{p,\lambda} \mid \lambda \in (0,1)\}$ konnexiókat képezve egy megfeleltetést kapunk az eddig legyártott konnexiók és B^5 között. Ez a megfeleltetés egy diffeomorfizmust ad $\mathcal{M}_{S^4}^1$ és B^5 között [AHS]. □

2.5.3. megjegyzés. $\lambda \to 0$ esetén $A_{p,\lambda}$ görbülete egyre jobban a p pontra koncentrálódik, határátmenetben a görbületet egy "Dirac-delta" jellegű függvény írja le. Erről a jelenségről a későbbiekben még szó lesz.

3. fejezet

A modulustér

3.1 A struktúra-tétel

Ebben a fejezetben a modulustér struktúráját fogjuk megvizsgálni. Először az SU(2)-esettel foglalkozunk.

3.1.1. tétel. *Legyen M egy kompakt, egyszeresen összefüggő sima négysokaság és legyen E egy olyan SU(2)-nyaláb M felett, melyre $c_2(E)[M] = k$. Tegyük fel továbbá, hogy $b_M^+ > 0$.*

(a) *Ha $k = 0$, vagyis a nyaláb triviális, akkor az $\mathcal{M}_M^k(g)$ modulustér egy pontból áll; ez a triviális lapos konnexió.*

(b) *Ha $k \neq 0$ és $8k - 3(1 + b_M^+) < 0$, akkor $\mathcal{M}_M^k(g)$ majdnem minden g metrikára üres.*

(c) *Ha $8k - 3(1 + b_M^+) \geq 0$, akkor $\mathcal{M}_M^k(g)$ majnem minden g metrikára egy $8k - 3(1 + b_M^+)$ dimenziós sokaság.*

Nézzük meg először a legegyszerűbb $k = 0$ esetet. Emlékeztetőül: egy A konnexió definíció szerint akkor lapos, ha $F_A = 0$, és A pontosan akkor ASD, ha a görbület pozitív része eltűnik, vagyis $F_A^+ = 0$. Tehát minden lapos konnexió egyben ASD is. Lássuk be, hogy a triviális nyalábon nincsen több ASD konnexió. Tegyük fel, hogy $B \in \mathcal{M}_M^k(g)$. A Chern-Weil elméletből (lásd 2.4.3) következik, hogy

$$\int_M |F_B^-|^2 d\mu - \int_M |F_B^+|^2 d\mu = 8\pi^2 c_2(E)[M] = 0.$$

Mivel B ASD, így $F_B^+ = 0$, tehát $\int_M |F_B^-|^2 d\mu = 0$, amiből $F_B^- = 0$ következik, és mivel $F_B = F_B^+ + F_B^-$, B valóban lapos. Mivel $\pi_1(M) = 0$, M-en konjugálás erejéig egyetlen lapos konnexió van, a triviális.

3.1.2. feladat. Lássuk be, hogy ha $k < 0$, akkor tetszőleges g metrikára $\mathcal{M}_M^k(g)$ üres.

A struktúra-tétel bizonyítása az általános esetben igen komplikált. A továbbiakban ezt fogjuk vázolni. Mint már említettük, a $\mathcal{G}_P$ mérce-csoport hatása az $\mathcal{A}_P$ téren nem egy szabad hatás, így a $\mathcal{B}_P$ faktortér nem lesz sokaság. Ebből adódóan az $\mathcal{M}_{M,P}(g) \subset \mathcal{B}_P$ modulustértől sem várható el, hogy minden pontja sima legyen. $\mathcal{M}_{M,P}(g)$ nem-simaságának két oka is lehet: előfordulhat, hogy egy $p \in \mathcal{M}_{M,P}(g)$ pont már a befoglaló $\mathcal{B}_P$ térnek sem sima pontja, és megtörténhet, hogy $p \in \mathcal{B}_P$ sima pont, de az $F_A^+ = 0$ ASD egyenlet p kis környezetét nem simán vágja ki. A következő részben azokat a pontokat fogjuk megvizsgálni, melyekben $\mathcal{B}_P$ nem sokaság. Ezek a pontok éppen az E nyalábon lévő *reducibilis* konnexióknak fognak megfelelni. Meglepő módon a sokaság b_M^+ értékétől függően az $\mathcal{M}_{M,P}(g)$ modulustér vagy teljesen elkerüli a reducibilis pontok halmazát – ez a helyzet $b_M^+ > 0$ és generikus metrika esetén –, vagy ($b_M^+ = 0$ esetén) a sokaság kohomológiája által pontosan meghatározott darabszámú reducibilis konnexió lesz ASD. A reducibilis konnexiók tárgyalása után foglalkozunk avval a kérdéssel, hogy milyen metrika esetén vágja ki *simán* a modulusteret az ASD egyenlet $\mathcal{B}_P$-ből.

3.2 Reducibilis konnexiók

Legyen E egy SU(2)-nyaláb M felett, A pedig egy konnexió az E nyalábon. Rögzítsünk le egy $x \in M$ pontot és legyen γ egy tetszőleges x-ből induló és x-ben végződő sima görbe. Használva az A konnexió szerinti, γ menti párhuzamos eltolást az E nyalábon, egy $T_\gamma = Hol_\gamma(A) \in \mathrm{SU}(2)$ holonómia-elemet kapunk (lásd 2.2.4 definíciót).

3.2.1. definíció. Legyen A holonómia-csoportja $H_A = \{C \in \mathrm{SU}(2) \mid$ létezik olyan γ görbe, melyre $T_\gamma = C\}$.

Könnyen látható, hogy H_A az SU(2) egy zárt részcsoportja, és csak konjugálás erejéig függ x-től. Mivel a $\mathcal{G}_E$ mérce-csoport hat a konnexiók $\mathcal{A}_E$ terén, értelmes a következő

3.2.2. definíció. A

$$\Gamma_A = \{u \in \mathcal{G}_E \mid u(A) = A\}$$

csoportot az A konnexió mérce-csoportbeli stabilizátorának nevezzük.

3.2.3. állítás. *Tetszőleges A konnexióra Γ_A izomorf a H_A részcsoport SU(2)-beli centralizátorával.* □

A bizonyítást az olvasóra hagyjuk. A 3.2.3 állításból triviálisan következik, hogy Γ_A részcsoportja SU(2)-nek, tehát véges dimenziós. Rövid számolás mutatja, hogy egy $K \leq$SU(2) részcsoportra $C_{\mathrm{SU}(2)}(K)$ (K-nak SU(2)-beli centralizátora) vagy $\{\pm I\}$-vel, vagy SU(2)-vel egyenlő, vagy az S^1 csoporttal izomorf. Így a következő eredményt kapjuk:

3.2.4. állítás. *$A \in \mathcal{A}_E$ esetén Γ_A a következő 3 csoport egyikével izomorf:*

(a) $\pm I$,

(b) S^1,

(c) SU(2).

3.2.5. feladat. Lássuk be, hogy ha $\Gamma_A = \mathrm{SU}(2)$, akkor E szükségképpen a triviális SU(2)-nyaláb, és A a triviális lapos konnexió.

Az (a) típusú konnexiókat irreducibiliseknek, a (b) és (c) típusúakat pedig reducibiliseknek hívjuk. Ezen elnevezéseket az alábbi lemma igazolja:

3.2.6. lemma. *A következő két állítás ekvivalens:*

(a) *Az A konnexió reducibilis.*

(b) *Létezik egy olyan $L \to M$ S^1-nyaláb és B konnexió L-en, hogy $E = L \oplus L^{-1}$ és $A = B \oplus B^{-1}$, ahol B^{-1} a B-hez tartozó konnexió L^{-1}-en.* □

Az ellenőrzést az olvasóra hagyjuk. (Érdemes itt a konnexióra mint párhuzamos eltolásra tekinteni.) Az eddigiekből még nem derült ki, van-e a modulustérben reducibilis konnexió. Mint majd látni fogjuk, a reducibilis ASD pontok körül a modulustérnek szingularitása lesz, így ezektől a pontoktól szeretnénk megszabadulni. Először vizsgáljuk tehát meg, milyen feltételek mellett tartalmaz a modulustér reducibilis pontot. Tegyük fel, hogy A egy reducibilis ASD konnexió az E SU(2)-nyalábon. Ekkor tehát az előző lemmából azt kapjuk, hogy $E = L \oplus L^{-1}$ és $F_A^+ = F_B^+ \oplus (-F_B^+)$. Vagyis A pontosan akkor ASD, ha B is az. Elég tehát az ASD S^1-konnexiókat megvizsgálni.

3.2.7. tétel. *Legyen L egy nemtriviális S^1-nyaláb (vagyis $c_1(L) \neq 0$), $b_X^+ > 0$ és g egy generikus metrika. Ekkor nem létezik ASD konnexió L-en.*

A bizonyítás előtt vegyük észre, hogy ha B S^1-konnexió, akkor görbülete egy számértékű 2-forma (egy G struktúra-csoportú konnexió görbülete egy $Lie(G)$ értékű 2-forma, és $Lie(S^1) \cong i\mathbb{R}$). A Chern-Weil elmélet azt állítja, hogy B görbülete egy zárt 2-forma, és a hozzátartozó deRham kohomológia-elem a vonalnyaláb első Chern-osztályát reprezentálja, vagyis

$$[\frac{1}{2\pi i} F_B] = c_1(L) \in \mathrm{H}^2(M; \mathbb{R}).$$

3.2.8. definíció. Jelölje $d\colon \Omega^i(M) \to \Omega^{i+1}(M)$ a külső deriválást. Legyen $d^* = *d*$, tehát $d^*\colon \Omega^i(M) \to \Omega^{i-1}(M)$ (ne feledjük, hogy $*$, és így d^* definíciójához egy g Riemann-metrika rögzítése szükséges). Az $\alpha \in \Omega^2(M)$ forma harmonikus, ha $(dd^* + d^*d)\alpha = 0$. Legyen $\mathcal{H}^2 = \{\alpha \in \Omega^2(M) \mid d\alpha = 0, \alpha \text{ harmonikus}\}$.

Hodge tétele szerint minden deRham kohomológia-osztályban pontosan egy harmonikus forma található, vagyis

$$\mathcal{H}^2 \cong \mathrm{H}^2(M;\mathbb{R}).$$

3.2.9. állítás. *Tegyük fel, hogy B ASD konnexió. Ekkor $\frac{1}{2\pi i}F_B$ harmonikus.*

Bizonyítás. Legyen $\omega = \frac{1}{2\pi i}F_B$. Tudjuk, hogy ω zárt, így $d^*d\omega = d^*(d\omega) = 0$. Ezenkívül $F_B^+ = 0$, tehát $*\omega = -\omega$, így $dd^*\omega = d*d*\omega = d*d(-\omega) = -d*(d\omega) = 0$. Tehát $(dd^* + d^*d)\omega = 0$, vagyis ω valóban harmonikus. □

3.2.10. definíció. Legyen $\mathcal{H}^2_+ = \{\alpha \in \mathcal{H}^2 \mid *\alpha = \alpha\}$, és $\mathcal{H}^2_- = \{\alpha \in \mathcal{H}^2 \mid *\alpha = -\alpha\}$. A $*$-operátor tehát megad egy $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2_+ \oplus \mathcal{H}^2_-$ felbontást és ez a felbontás a Hodge-izomorfizmuson keresztül $\mathrm{H}^2(M;\mathbb{R})$-re öröklődik. Sőt $\mathcal{H}^2_+$ éppen a q_M metszetforma egy maximális pozitív definit alterét adja meg, $\mathcal{H}^2_-$ pedig egy maximális negatív definitet. Így speciálisan $dim\ \mathcal{H}^2_+ = b_M^+$ és $dim\ \mathcal{H}^2_- = b_M^-$.

A 3.2.7 tétel bizonyítása. Az eddigieket összetéve azt kapjuk, hogy ha létezik az L S^1-nyalábon ASD konnexió, akkor $\mathcal{H}^2_-$ tartalmazza $c_1(L)$ Hodge-reprezentánsát. Vegyük észre, hogy itt lép be a metrikától való függés. Ahogy változtatjuk a metrikát, úgy mozdul el $\mathcal{H}^2$ felbontása is. Mivel $\mathcal{H}^2_-$ kodimenziója b_M^+ és mivel feltevésünk szerint $b_M^+ > 0$, így látható, hogy generikus metrikára $\mathcal{H}^2_-$ elkerüli a $\mathrm{H}^2(M;\mathbb{Z}) \subset \mathrm{H}^2(M;\mathbb{R}) = \mathcal{H}^2$ rácsot. Mivel $c_1(L) \in \mathrm{H}^2(M;\mathbb{Z})$, a 3.2.7 tétel bizonyítását befejeztük. □

3.2.11. megjegyzés. Az előző gondolatmenetből az is látható, hogy a "rossz" metrikák — amelyekre létezik reducibilis ASD konnexió — a metrikák terének egy b_M^+-kodimenziós részét alkotják.

3.2.12. feladat. Jelölje S_r az r sugarú 2-dimenziós gömböt az $\mathbb{R}^3$-ból öröklött Riemann-metrikával. Legyen $e = (1,-1) \in \mathrm{H}^2(S_{r_1} \times S_{r_2};\mathbb{Z})$. Lássuk be, hogy e harmonikus reprezentánsa pontosan akkor van $\mathcal{H}^2_-$-ban, ha $r_1 = r_2$.

A 3.2.7 tételből következik, hogy ha a metrikát ügyesen választjuk meg, a modulustér minden pontja irreducibilis, tehát

3.2.13. állítás. *Tegyük fel, hogy $b_M^+ > 0$ és $c_2(E)[M] = k \neq 0$. Ekkor egy g generikus metrika esetén $\mathcal{M}_M^k(g)$ nem tartalmaz reducibilis pontot.* □

Időzzünk most el egy kicsit a $b_M^+ = 0$ esetnél. Ekkor $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2_-$, így tetszőleges metrika esetén $c_1(L)$ harmonikus reprezentánsa szükségképpen ASD. Könnyen belátható a következő

3.2.14. tétel. *Tegyük fel, hogy $b_M^+ = 0$ és L egy S^1-nyaláb M felett. Ekkor L-en létezik A ASD konnexió, valamint az összes ASD konnexió L-en mérce-ekvivalens.* □

Definiáljuk az $\mathcal{R}_{M,E}$ halmazt a következő módon:

$$\mathcal{R}_{M,E} = \{(\alpha,-\alpha) \mid \alpha \in \mathrm{H}^2(M;\mathbb{Z}) \text{ és } \alpha^2 = c_2(E)\}.$$

$\mathcal{R}_{M,E}$ elemeit *topologikus redukcióknak* nevezzük. Az elnevezés onnan ered, hogy pontosan az $(\alpha,-\alpha) \in \mathcal{R}_{M,E}$ elemekre léteznek olyan $L \to M$ komplex vonalnyalábok, melyekre $c_1(L) = \alpha$ és $L \oplus L^{-1}$ izomorf E-vel.

3.2.15. állítás. *Tegyük fel, hogy $b_M^+ = 0$. Ekkor tetszőleges g metrikára $\mathcal{M}_M^k(g)$ reducibilis pontjai egyértelműen megfeleltethetők $\mathcal{R}_{M,E}$ elemeinek.* □

Bizonyítás. Az $\mathcal{M}_M^k(g)$ tér egy reducibilis pontja, vagyis egy reducibilis konnexió az $E \to M$ nyaláb egy $L \oplus L^{-1} \to M$ felbontását adja meg. Így $c_1(L) = \alpha$ esetén a reducibilis ponthoz az $(\alpha,-\alpha) \in \mathcal{R}_{M,E}$ topologikus redukciót rendelhetjük. Visszafelé, egy $(\alpha,-\alpha) \in \mathcal{R}_{M,E}$ elemhez egy $L \oplus L^{-1} \cong E$ felbontás tartozik; $c_1(L)$ illetve $c_1(L^{-1})$ harmonikus reprezentánsainak mint görbületeknek megfelelő S^1-konnexiókat összeadva E-n kapunk egy reducibilis konnexiót. □

3.3 A deformációs komplexus

Ebben a részben befejezzük a struktúra-tétel bizonyítását. Minden $A \in \mathcal{M}_M^k(g)$ ponthoz hozzárendelünk majd néhány adatot, amelyek a modulustér struktúráját határozzák meg az A pont körül.

3.3.1. definíció. Legyen E egy SU(2)-nyaláb M felett és jelölje adE a hozzá asszociált SO(3)-nyalábot. Hasonlóan, jelölje d_A az A-hoz asszociált konnexiót adE-n:

$$\Omega^0(M;adE)\xrightarrow{d_A}\Omega^1(M;adE)\xrightarrow{d_A}\Omega^2(M;adE).$$

A deRham komplexussal ellentétben itt a $d_A \circ d_A$ kompozíció nem feltétlenül 0, a 2. fejezetben láttuk, hogy $d_A \circ d_A = F_A$. Egy metrikát rögzítve a $*$-operátor egy felbontást ad meg:

$$\Omega^2(M;adE) = \Omega^2_+(M;adE) \oplus \Omega^2_-(M;adE).$$

Legyen a $P^+ : \Omega^2(M;adE) \to \Omega^2_+(M;adE)$ operátor a természetes projekció, és

$$d_A^+ = P^+ \circ d_A.$$

3.3.2. definíció. Tegyük fel, hogy A ASD konnexió. Az A-hoz tartozó *deformációs komplexus* definíció szerint legyen

$$\Omega^0(M;adE)\xrightarrow{d_A}\Omega^1(M;adE)\xrightarrow{d_A^+}\Omega^2_+(M;adE).$$

Vegyük észre, hogy $F_A^+ = d_A^+ \circ d_A$, így $d_A^+ \circ d_A = 0$ pontosan akkor teljesül, ha A ASD .

3.3.3. definíció. Jelölje H_A^0, H_A^1, H_A^+ a deformációs komplexus kohomológia-csoportjait, vagyis:

- $\mathrm{H}_A^0 = Ker d_A$,
- $\mathrm{H}_A^1 = Ker d_A^+ / Im d_A$,
- $\mathrm{H}_A^+ = coKer d_A^+$.

3.3.4. megjegyzés. Ahhoz, hogy analízist használjunk, Ω^0-on, Ω^1-en, Ω^2-n és persze $\mathcal{A}_E$-n, $\mathcal{G}_E$-n megfelelő normákat szükséges bevezetni; ezek után pedig ezeket a végtelen dimenziós metrikus tereket teljessé kell tenni. Ez az eljárás meglehetősen bonyolult és hosszadalmas (lásd [DK]), és a könnyebb követhetőség kedvéért most nem tárgyaljuk ezt (az ún. *Szoboljev*) teljessé tételt.

A továbbiakban H_A^0, H_A^1 és H_A^+ geometriai jelentését szeretnénk (bizonyítás nélkül) elmagyarázni. A részletes bizonyítást lásd [DK]-ben. Először is tudjuk (lásd 2.1.3), hogy az A konnexió rögzítése egy diffeomorfizmust ad meg az $\Omega^1(M;adE)$ $so(3)$-értékű 1-formák és az $\mathcal{A}_E$ konnexió-tér között:

$$f : \Omega^1(M;adE) \to \mathcal{A}_E \ , \ f(a) = A + a.$$

Hasonlóan, $\Omega^0(M;adE)$ megegyezik a $\mathcal{G}_E$ mérce-csoport Id$\in \mathcal{G}_E$ pontbeli érintőterével. Első lépésként H_A^0 geometriai jelentését szeretnénk tisztázni. Egy $\omega \in Ker d_A \leq \Omega^0(M;adP)$ elemre tehát $d_A\omega = \nabla_A\omega - \omega\nabla_A = 0$ áll fenn (lásd 2.1.5 feladatot), ez az $\Omega^0(M;AdP)$ csoport nyelvén azt jelenti, hogy az ω Lie-algebra elemnek megfelelő 1-paraméteres részcsoport az A konnexiót stabilizálja. Tehát H_A^0 éppen a Γ_A stabilizátor Lie-algebrájának felel meg.

Következő állításunkban a $\mathcal{G}_E$ mérce-csoport $\mathcal{G}_E \times \mathcal{A}_E \to \mathcal{A}_E$

$$(g, A) \mapsto g^*(A) \quad (g \in \mathcal{G}_E,\ A \in \mathcal{A}_E)$$

hatásának egy rögzített $A \in \mathcal{A}_E$ pontban vett

$$g \mapsto g^*(A) \quad (g \in \mathcal{G}_E)$$

hatásának deriváltleképezését fogjuk megadni. Mivel $\mathcal{G}_E = \Omega^0(M;AdE)$ érintőtere az $\Omega^0(M;adE)$ térrel, $\mathcal{A}_E$ érintőtere pedig pedig az $\Omega^1(M;adE)$ térrel azonosítható, így

3.3.5. állítás. *A $\mathcal{G}_E$ mérce-csoport $A \in \mathcal{A}_E$ pontbeli hatásának deriváltját a*

$$-d_A\colon \Omega^0(M; adE) \to \Omega^1(M; adE)$$

operátor adja meg.

Bizonyítás. Egy $\{g_t\} \leq \mathcal{G}_E$ 1-paraméteres részcsoportra a $t \mapsto g_t^*(A)$ függvény deriváltját kell tehát a $t = 0$ pontban kiszámítanunk. Tegyük fel, hogy $\dot{g}_t|_{t=0} = \omega \in Lie(\mathcal{G}_E) = \Omega^0(M; adE)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $\mathcal{G}_E$ csoport hatását az A konnexió ∇_A operátor-alakján a következő összefüggés adja meg: $g \in \mathcal{G}_E$ és $\sigma \in \Omega^0(M; E)$ esetén

$$g^*(\nabla_A)(\sigma) = g^{-1}(\nabla_A(g(\sigma))).$$

Így tehát nekünk a $(g_t^{-1}(\nabla_A(g_t(\sigma))))^{\cdot}|_{t=0}$ értéket kell meghatározni, ami a Leibnitz-szabály szerint

$$(g_t^{-1})^{\cdot}|_{t=0}\nabla_A(\sigma) + \nabla_A((\dot{g}_t)|_{t=0}(\sigma))$$

kifejezéssel egyenlő (ne feledjük, hogy g_0 =Id). Mivel $\dot{g}_t|_{t=0} = \omega$, így $(g_t^{-1})^{\cdot}|_{t=0} = -\omega$, vagyis eredményül a $-\omega(\nabla_A(\sigma)) + \nabla_A(\omega(\sigma))$ szelést kaptuk, ami a 2.1.5 feladat értelmében $-d_A(\sigma)$-val egyenlő. Evvel a bizonyítást befejeztük. □

Ennek következményeként kapjuk:

3.3.6. állítás. *Jelölje O_A az A orbitját $\Omega^1(M; adE)$-ben, Γ_A pedig az A mérce-csoport-beli stabilizátorát. O_A érintőtere az A pontban Imd_A-val egyezik meg, $Kerd_A$ pedgi Γ_A Lie-algebrájával izomorf.* □

Legyen $d_A^*\colon \Omega^1(M; adE) \to \Omega^0(M; adE)$ a d_A operátor adjungáltja (bár a d_A^* adjungált leképezés az $\Omega^1(M; adE)^*$ térből az $\Omega^0(M; adE)^*$ térbe mutat, a g metrika egy $\Omega^i(M; adE)^* \cong \Omega^i(M; adE)$ izomorfizmust ad minden i-re, ezt használva kapjuk d_A^* fenti alakját). Ekkor egy $\Omega^1(M; adE) = Imd_A \oplus Kerd_A^*$ felbontást kapunk, és könnyen látszik, hogy $Kerd_A^*$ Γ_A-invariáns altér $\Omega^1(M; adE)$-ben. A fenti felbontás fontosságát mindjárt meglátjuk, először azonban szükségünk lesz egy véges dimenziós analógia megértésére.

Tegyük fel, hogy G egy összefüggő kompakt Lie-csoport, amely egy Y véges dimenziós sokaságon simán hat. Az a feladatunk, hogy meghatározzuk az Y/G kvócienstér struktúráját egy rögzített $y \in Y$ pont környezetében. Jelölje y orbitjának érintőterét V, y stabilizátorát pedig Γ_y. Könnyű látni, hogy ha találunk egy olyan W alteret T_yY-ban amely egyrészt Γ_y invariáns, másrészt $W \oplus V = T_yY$, akkor W/Γ_y modellezi Y/G-t y egy kis környezetében.

A mi feladatunk hasonló: szeretnénk a $\mathcal{B}_E = \mathcal{A}_E/\mathcal{G}_E$ kvóciensteret modellezni. A baj az, hogy $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, és mind Imd_A, mind $Kerd_A^*$ végtelen dimenziós terek. Ennek ellenére belátható az úgynevezett *szelet-tétel*:

3.3.7. tétel. *Az $A \in \mathcal{A}_E$ pontnak létezik olyan $U \subset Kerd_A^*$ ($Kerd_A^*$-ban nyílt) környezete, melyre az U/Γ_A faktor az $[A] \in \mathcal{B}_E$ ekvivalencia-osztály egy nyílt környezetét modellezi.* □

3.3.8. megjegyzés. A szelet-tétel bizonyítása Uhlenbeck nevéhez fűződik és igen komplikált. (Lásd [DK].)

Tegyük fel most, hogy A irreducibilis, vagyis $\Gamma_A = \pm$Id. Mivel $-$Id triviálisan hat az adE nyalábon, így azt kapjuk, hogy A körül $\mathcal{B}_E$ modellezhető a $Kerd_A^*$ Banach-térrel.

3.3.9. megjegyzés. Valójában az is igaz, hogy (a korábban említett Szoboljev-teljessé tétel után)

$$\mathcal{B}_E^* = \{A \in \mathcal{B}_E \mid A \text{ irreducibilis}\}$$

egy végtelen dimenziós Banach-sokaság, vagyis lokálisan végtelen dimenziós Banach-térrel térképezhető és az átmeneti függvények deriválhatók.

Térjünk most vissza a deformációs komplexushoz és a kohomológia-csoportokhoz. Azt már láttuk, hogy $\mathrm{H}_A^0 = Lie(\Gamma_A)$, most megpróbálunk geometriai jelentést adni H_A^1-nak és H_A^+-nak.

Legyen $s \in \Omega^0(M; adE)$ és $a \in \Omega^1(M; adE)$. Ekkor $A + a \in \mathcal{A}_E$ és a Leibnitz-szabályból azt kapjuk, hogy

$$(d_A + a)(d_A + a)s = d_A d_A s + (d_A a)s + (a \wedge a)s,$$

vagyis $F_{A+a} = F_A + d_A a + (a \wedge a)$; hasonlóan $F^+_{A+a} = F^+_A + d^+_A + (a \wedge a)^+$. Mivel A ASD, így $F^+_{A+a} = d^+_A a + (a \wedge a)^+$. Ez azt jelenti, hogy A környezetében az ASD-egyenlet linearizált tagja d^+_A. A 3.3.7 tételből tudjuk, hogy a modulustér modellje A körül

$$\{a \in U \subset Kerd^*_A \mid F^+_{A+a} = 0\}/\Gamma_A$$

(hiszen U/Γ adja $[A] \in \mathcal{B}_E$ egy környezetének modelljét, ebből vágja ki az $F^+_{A+a} = 0$ egyenlet $\mathcal{M}_{M,E}(g)$ egy lokális modelljét). A

$$d^+_A|_{Kerd^*_A} : Kerd^*_A \to \Omega^2_+(M; adE)$$

megszorítás egy Fredholm leképezés. Tudva, hogy $Imd_A \oplus Kerd^*_A = \Omega^1(M; adE)$, a definícióból könnyen adódik, hogy $Ker(d^+_A|_{Kerd^*_A}) = \mathrm{H}^1_A$ és $coKer(d^+_A|_{Kerd^*_A}) = \mathrm{H}^+_A$. Hasonlóan a véges dimenziós esethez (implicit függvény tétel), ha az operátor (esetünkben ez F^+_{A+a}) linearizáltja (ez most $d^+_A|_{Kerd^*_A}$) ráképezés, akkor az $F^+_{A+a} = 0$ egyenlet megoldásainak érintőterét éppen $Ker(d^+_A|_{Kerd^*_A})$ elemei adják. Mivel pedig $d^+_A|_{Kerd^*_A}$ pontosan akkor ráképezés, ha $\mathrm{H}^+_A = 0$, a következő eredményt kapjuk

3.3.10. tétel. *Ha egy A irreducibilis ASD konnexióra $\mathrm{H}^+_A = 0$ teljesül, akkor a H^1_A tér azonosítható a modulustér $[A] \in \mathcal{M}_{M,E}(g)$ pontbeli érintőterével.* □

A továbbiakban $\mathrm{H}^+_A = 0$ esetén azt fogjuk mondani, hogy az ASD-egyenlet a modulusteret A körül transzverzálisan metszi ki. Látjuk tehát, hogy az a legszebb eset amikor A irreducbilis (vagyis $\mathrm{H}^0_A = 0$) és a modulustér transzverzálisan metsződik ki A körül (vagyis $\mathrm{H}^+_A = 0$), mivel ekkor az $\mathcal{M}^k_M(g)$ modulustér egy $dim\mathrm{H}^1_A$-dimenziós sokaság A körül.

Térjünk most végre vissza a struktúra-tétel (3.1.1 tétel) bizonyítására. Legyen tehát E egy SU(2)-nyaláb M felett, $c_2(E)[M] \neq 0$ és $b^+_M > 0$. A 3.2.13 állításból következik, hogy generikus metrikára a modulustérben nincsenek reducibilis konnexiók. Azt se nagyon nehéz megmutatni (lásd [DK]), hogy a g metrika perturbálható úgy, hogy elérjük a transzverzalitást, vagyis:

3.3.11. állítás. *Ha g egy generikusan választott metrika, akkor $\mathrm{H}^+_A = 0$ minden $A \in \mathcal{M}^k_M(g)$ esetén.* □

Hátravan még H^1_A dimenziójának kiszámolása. Belátható, hogy

$$d^*_A \oplus d^+_A : \Omega^1(M; adE) \to \Omega^0(M; adE) \oplus \Omega^2_+(M; adE)$$

egy elliptikus operátor. Az operátor indexe definíció szerint $(dim\mathrm{H}^1_A - dim\mathrm{H}^0_A - dim\mathrm{H}^+_A)$, és az Atiyah-Singer indextétel segítségével (lásd [AHS], [DK]) belátható, hogy ez az index $8c_2(E)[M] - 3(1 + b^+_M)$-szal egyenlő. Ezzel a struktúra-tétel vázlatos bizonyítását befejeztük. □

3.3.12. feladat. Jelölje θ a triviális lapos konnexiót M-en. Lássuk be, hogy $dim\mathrm{H}^0_\theta = 3$, $dim\mathrm{H}^1_\theta = 0$ és $dim\mathrm{H}^+_\theta = 3b^+_M$.

A feladatból is látható, hogy θ nem transzverzálisan metsződik ki, vagyis szingularitásként viselkedik. Térjünk most vissza a $b^+_M = 0$ esethez. A transzverzális metszést most is el lehet érni a metrika perturbálásával. Hátravan még, hogy meghatározzuk a modulustér struktúráját a reducibilis pontok körül; legyen tehát A reducibilis. Tudjuk, hogy

$$dim\mathrm{H}^1_A - dim\mathrm{H}^0_A - dim\mathrm{H}^+_A = 8k - 3(1 + b^+_M) = 8k - 3.$$

A metszés transzverzális, így $dim\mathrm{H}^+_A = 0$. Az A konnexió reducibilis, vagyis $\Gamma_A = S^1$, így $\mathrm{H}^0_A = Lie(S^1)$ tehát $dim\mathrm{H}^0_A = 1$. Azt kapjuk tehát, hogy $dim\mathrm{H}^1_A = 8k - 2$. Belátható [DK], hogy Γ_A hatása H^1_A-n izomorf a standard S^1 hatással $\mathbb{C}^{4k-1}$-en, és így H^1_A/Γ_A egy kúpot ad meg $\mathbb{CP}^{4k-1}$ felett. Összefoglalva:

3.3.13. tétel. *Tegyük fel, hogy $b^+_M = 0$ és $c_2(E)[M] = k > 0$. Ha g egy generikus metrika, akkor $\mathcal{M}^k_M(g)$ egy $(8k-3)$-dimenziós sima sokaság, kivéve a reducibilis (=szinguláris) pontokban. A reducibilis pontok egyértelmű megfeleltetésben állnak az E nyaláb topologikus redukcióival és a reducibilis pontok körüli szingularitások $\mathbb{CP}^{4k-1}$ feletti kúpok.* □

Az SO(3) modulusterekre vonatkozó struktúra-tétel analóg az előbb tárgyalt SU(2)-esettel és a bizonyítás is megegyezik.

3.3.14. tétel. *Tegyük fel, hogy $b_M^+ > 0$, $P \to M$ egy SO(3)-nyaláb és $-p_1(P)[M] = k > 0$. Ha a metrika generikus, akkor $\mathcal{M}_{M,P}(g)$ egy $2k - 3(1 + b_M^+)$ dimenziós sima sokaság.* □

A $b_M^+ = 0$ eset tárgyalása is analóg az SU(2)-modulusterek esetével:

3.3.15. állítás. *Egy P SO(3)-nyaláb pontosan akkor bomlik fel $P = L \oplus \mathbb{R}$ ($L \to M$ komplex vonalnyaláb) alakban, ha $c_1(L)^2 = p_1(P)$ és $c_1(L) \equiv w_2(P)$ (mod 2).* □

3.3.16. definíció. Az $(e, -e)$ párt topologikus redukciónak hívjuk, ha $\pm e \in \mathrm{H}^2(M, \mathbb{Z})$, $e^2 = p_1(P)$ és $e \equiv w_2(P)$ (*mod* 2). A továbbiakban jelölje $\mathcal{R}_{M,P}$ a $P \to M$ nyaláb különböző topologikus redukcióinak halmazát.

3.3.17. tétel. *Tegyük fel, hogy $b_M^+ = 0$ és $-p_1(P)[M] = k > 0$. Ha a metrikát generikusan választjuk, akkor $\mathcal{M}_{M,P}(g)$ egy $2k-3$ dimenziós sima sokaság, kivéve a reducibilis (=szinguláris) pontokban. A reducibilis pontok egyértelmű megfeleltetésben állnak a P nyaláb topologikus redukcióival (vagyis $\mathcal{R}_{M,P}$ pontjaival). Egy reducibilis pont körüli szingularitás egy $\mathbb{CP}^{k-2}$ feletti kúppal homeomorf.* □

A fejezetet az egyszerű $p_1(P) = 0$ esettel zárjuk.

3.3.18. állítás. *Tegyük fel, hogy $p_1(P) = 0$. Ekkor $w_2(P) = 0$ esetén $\mathcal{M}_{M,P}(g)$ a triviális lapos konnexióból áll, ha pedig $w_2(P) \neq 0$ akkor $\mathcal{M}_{M,P}(g)$ üres.* □

4. fejezet

A modulustér kompaktifikálása

4.1 Uhlenbeck tétele

Ebben a fejezetben folytatjuk a modulustér vizsgálatát. Mint látni fogjuk, a modulustér nem feltétlenül kompakt, de ideális konnexiók segítségével természetes módon kompaktifikálható (lásd még a 2. fejezet végét). Az itt tárgyalt eredményekre mind a 6. mind a 7. fejezetekben szükségünk lesz.

Legyen M sima, egyszeresen összefüggő, kompakt 4-sokaság. Rögzítsünk egy olyan $E \to M$ SU(2)-nyalábot, melyre $c_2(E)[M] = k$, és legyen g egy Riemann-metrika M-en.

4.1.1. definíció. Ideális konnexiónak nevezzük azt a $([B], \{x_1, ..., x_l\})$ párt, melyre

- $0 < l \leq k$,
- $B \in \mathcal{M}_M^{k-l}(g)$ és
- $x_1, ..., x_l$ az M nem feltétlenül különböző pontjai.

4.1.2. megjegyzés. Vegyük észre, hogy $\mathcal{M}_M^0 = \{\theta\}$, hiszen M egyszeresen összefüggő, és így $k = 1$ esetben az ideális konnexiók tere megegyezik M-mel.

4.1.3. definíció. Az $|F_B|^2 + 8\pi^2 \sum_{r=1}^{l} \delta_{x_r}$ mértéket a $([B], \{x_1, ..., x_l\})$ ideális konnexió *görbületi sűrűségének* hívjuk. (δ_x az $x \in M$ ponthoz tartozó Dirac-delta mértéket, F_B pedig a B konnexió görbületét jelöli.)

Vegyük észre, hogy a Chern-Weil elmélet szerint

$$\int_M |F_B|^2 = 8\pi^2(k - l),$$

így $\int_M (|F_B|^2 + 8\pi^2 \sum_{r=1}^{l} \delta_{x_r}) = 8\pi^2 k$ minden ideális konnexióra.

4.1.4. definíció. Legyen A_n az E nyalábon lévő konnexiók egy sorozata. A_n gyengén konvergál egy $([B],$ $\{x_1,..., x_l\})$ ideális konnexióhoz, ha

- $\int_M f|F_{A_n}|^2 \to \int_M f|F_B|^2 + 8\pi^2 \sum_{r=1}^{l} f(x_r)$ minden $f\colon M \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre (vagyis az A_n konnexiók által definiált mértékek gyengén tartanak az ideális konnexió által definiált mértékhez), valamint
- minden $K \subset M \setminus \{x_1, ..., x_l\}$ kompakt részhalmazon az $[A_n]$ sorozat a $[B]$ mérce-ekvivalencia osztályhoz tart, vagyis minden n-re létezik olyan A'_n, az A_n-nel mérce-ekvivalens konnexió, hogy az A'_n sorozat K-n a C^∞-normában B-hez tart.

4.1.5. feladat. Az $\mathcal{M}_{S^4}^1$ modulustér explicit leírását (lásd 2.5) használva bizonyítsuk be, hogy $\lambda \to 0$ esetén $A_{p,\lambda}$ gyengén tart a (θ, p) ideális konnexióhoz (p az S^4 egy pontját, θ pedig az S^4 feletti triviális konnexiót jelöli).

Uhlenbeck gyenge kompaktsági tétele azt állítja, hogy a modulustér az ideális konnexiók hozzávételével kompakttá tehető.

4.1.6. tétel. *Legyen $\{A_n\}$ ASD konnexiók egy sorozata ($A_n \in \mathcal{M}_M^k(g)$). Ekkor mindig kiválasztható egy olyan $\{A_{n_k}\}$ részsorozat mely gyengén tart egy $(B, \{x_1, ..., x_l\})$ ideális konnexióhoz.* □

4.1.7. megjegyzés. Ezesetben megengedjük, hogy $l = 0$ legyen. Ekkor a részsorozat az $\mathcal{M}_M^k(g)$ modulustéren belül konvergál, és ezt *erős konvergenciának* nevezzük.

Uhlenbeck gyenge kompaktsági tételének bizonyítása igen hosszadalmas és bonyolult analízist használ, így most csak a bizonyítás néhány alapötletét fogjuk bemutatni.

4.1.8. állítás. *Jelölje B^4 a négydimenziós nyílt gömböt, legyen E a triviális SU(2)-nyaláb B^4 felett, g pedig a standard metrika B^4-en. Ekkor létezik egy $\epsilon > 0$ univerzális konstans úgy, hogy tetszőleges olyan konnexiósorozatra, melyre A_n ASD és $\int_{B^4} |F_{A_n}|^2 < \epsilon$, igaz az, hogy létezik egy A_{n_k} részsorozat, $g_{n_k} \in \mathcal{G}_E$ B^4 feletti mérce-transzformáció és B ASD konnexió úgy, hogy a $g_{n_k}(A_{n_k})$ konnexió-sorozat a C^∞ normában (erősen) B-hez konvergál.*

A bizonyítás (mely [DK] 2. fejezetében illetve [FU] 8. fejezetében található meg) vázlatos ismertetése előtt egy segédtételre lesz szükségünk. Ha A egy, az $E \to B^4$ nyalábon lévő lapos konnexió, akkor könnyen található az $E \to B^4$ nyalábnak olyan trivializációja, melyben az A konnexióhoz tartozó ∇_A kovariáns deriválás a d külső deriválással egyezik meg. Vagyis egy tetszőleges trivializációt választva és ∇_A-nak ebben a trivializációban a $\nabla_A = d + M_A$ (M_A-t szokás a konnexió mátrixának nevezni) felírását figyelembevéve létezik egy olyan $g \in \mathcal{G}_E$ mérce-transzformáció, hogy $g^*(A) = d$, vagyis $M_{g^*(A)} = 0$ teljesüljön. Ezt a gondolatot általánosítva ad segédtételünk egy kis görbületű A konnexióra olyan mérce-transzformációt, melyben a konnexió mátrixa — az F_A görbülettől függően — kicsi. A kapott konnexiót A Coulomb mércebeli alakjának nevezzük. (A segédtétel bizonyítása hosszadalmas, így annak ismertetését mellőzzük.)

4.1.9. segédtétel. *Léteznek olyan δ, $N > 0$ konstansok, hogy ha A egy olyan konnexió az $E \to B^4$ (triviális) nyalábon, melyre $||F_A||^2 = \int_{B^4} |F_A|^2 < \delta$, akkor létezik az $E \to B^4$ nyalábon egy olyan, az A-val $\mathcal{G}_E$-ekvivalens A' konnexió, melyre*

$$||A'|| < N \cdot ||F_{A'}||.$$

Erről az A' konnexióról feltehető továbbá, hogy megoldása a $d^*A' = 0$ egyenletnek. □

Ha az A konnexió ASD (amit az eddigiekben nem kellett feltennünk), akkor a fenti A' konnexióra $d^+A' = 0$ is teljesül. Tehát A' megoldása lesz az elliptikus

$$(d^* \oplus d^+)A = 0$$

egyenletnek (az elliptikusság definiálásától most eltekintünk — lásd [DK] Appendix —; ennek a tulajdonságnak csak egy, az alábbiakban részletezett következményét fogjuk használni). Elliptikus differenciáloperátorok fontos tulajdonsága, hogy megoldásuk tetszőleges deriváltjának L^2-normája a megoldás L^2-normájával becsülhető, vagyis ha az s függvényre és a D elliptikus differenciáloperátorra $Ds = 0$ teljesül, akkor minden $k \in \mathbb{N}$-re létezik olyan C_k konstans, hogy

$$||s^{(k)}||_{L^2} \leq C_k \cdot ||s||_{L^2}.$$

A 4.1.8 állítás bizonyítása. Az $\{A_n\}$ sorozat helyett vegyük a vele $\mathcal{G}_E$-ekvivalens $\{A'_n\}$ sorozatot, ahol az A'_n konnexiókat a 4.1.9 segédtétel adja meg. Mivel feltevésünk szerint $||F_{A_n}|| = ||F_{A'_n}|| < \epsilon$, a fentiek miatt A'_n minden deriváltja korlátos, és így az Arzela-Ascoli kiválasztási tétel egy konvergens részsorozatot ad meg. □

A továbbiakban szükségünk lesz a 4.1.8 állítás egy globális változatára is:

4.1.10. állítás. *Legyen ϵ a 4.1.8 állításban rögzített univerzális konstans, g pedig egy tetszőleges Riemann-metrika M-en. Tegyük fel, hogy az $\{A_n\}$ konnexió-sorozat ASD, és tetszőleges $x \in M \setminus \{x_1, ..., x_l\}$ pontnak van olyan U környezete, melyre $\int_U |F_{A_n}|^2 < \epsilon$ ha $n > n_0$, ahol az n_0 küszöb x-től független. Ekkor létezik egy*

- *A_{n_k} részsorozat,*

- *B $M \setminus \{x_1, ..., x_l\}$ feletti ASD konnexió, és*
- *$g_{n_k} \in \mathcal{G}_E$ mérce-transzformációk,*

hogy minden $K \subset M \setminus \{x_1, ..., x_l\}$ kompakt részhalmazon a $g_{n_k}(A_{n_k})$ konnexió-sorozat C^∞-értelemben B-hez tart. □

Térjünk most vissza Uhlenbeck gyenge kompaktsági tételéhez. Legyen tehát $A_n \in \mathcal{M}_M^k(g)$ ASD konnexiók egy sorozata. Jelölje ν_n a hozzájuk tartozó görbületi mértékeket ($|F_{A_n}|^2$ sűrűségfüggvényekkel). Válasszunk ki először a ν_n mértékek közül egy ν_{n_k} gyengén konvergens részsorozatot, vagyis tegyük fel, hogy a ν mértékre $\int_M f d\nu_{n_k} \to \int_M f d\nu$ minden f folytonos függvényre. Válasszuk ki M azon pontjait, melyeknek ν-mértéke pozitív. Vegyük észre, hogy ha $\nu(x) < \epsilon$, akkor 4.1.10 szerint x környezetében A_{n_k}-nak egy $A_{n_{k_l}}$ konvergens részsorozata választható ki, vagyis valójában $\nu(x) = 0$. Mivel $\int_M \nu = 8\pi^2 k$, így legfeljebb $8\pi^2 k/\epsilon$, tehát mindenképpen véges sok olyan pont van, melynek ν-mértéke pozitív. Jelöljük ezeket $\mathcal{S} = \{x_1, ..., x_t\}$-vel. A 4.1.10 állítás szerint található egy olyan $A_{n_{k_l}}$ részsorozat, mely B-hez tart. A Chern-Weil elmélet alapján belátható az is, hogy minden szinguláris $x_i \in \mathcal{S}$ pontban egész mennyiségű energia veszett el, vagyis $\nu(x_i) = 8\pi^2 l_i$ valamely l_i egész számra. B azonban egyenlőre csak az $M \setminus \{x_1, ..., x_t\}$ halmaz, nem pedig M felett van definiálva. Szükségünk van Uhlenbeck megszüntethető szingularitásokról szóló tételére is:

4.1.11. tétel. *Ha B véges energiájú ASD konnexió az $Y = M \setminus \{x_1, ..., x_t\}$ halmazon és $\int_Y |F_B|^2 = m$, akkor B egyértelműen terjeszthető ki egy $\bar{B} \in \mathcal{M}_M^m(g)$ konnexióvá.* □

Ennek alkalmazásával a gyenge kompaktsági tétel bizonyítása könnyen befejezhető. □

Hátravan még a kompaktifikációs tétel SO(3)-változata. A tétel és bizonyítása analóg az SU(2) esettel. Legyen P SO(3)-nyaláb M felett, $-p_1(P)[M] = k$ és $w_2(P) = \alpha$. Rögzítsük ezt a P nyalábot és egy g metrikát M-en.

4.1.12. definíció. A $([B], \{x_1, ..., x_l\})$ pár egy ideális konnexió, ha

- $B \in \mathcal{M}_{M,P'}$, ahol $-p_1(P')[M] = k - 4l \geq 0,\ w_2(P') = w_2(P)$ és
- $x_1, ..., x_l$ nem feltétlenül különböző pontjai M-nek.

A gyenge kompaktsági tétel SO(3)-változata tehát a következőképpen szól.

4.1.13. tétel. *ASD konnexiók tetszőleges $A_n \in \mathcal{M}_{M,P}(g)$ sorozatának létezik (esetleg ideális) ASD konnexióhoz tartó részsorozata.* □

4.1.14. megjegyzés. Bár a B limesz-konnexió energiája (amit a P' nyaláb $p_1(P')$ osztálya ad meg) változhat a konvergencia során, a $w_2(P)$ Stiefel-Whitney osztály ezt nem teheti meg. Ez a tény sok esetben nagyon hasznossá teszi SO(3)-konnexiók használatát az SU(2)-konnexiókkal szemben (lásd [FS3]).

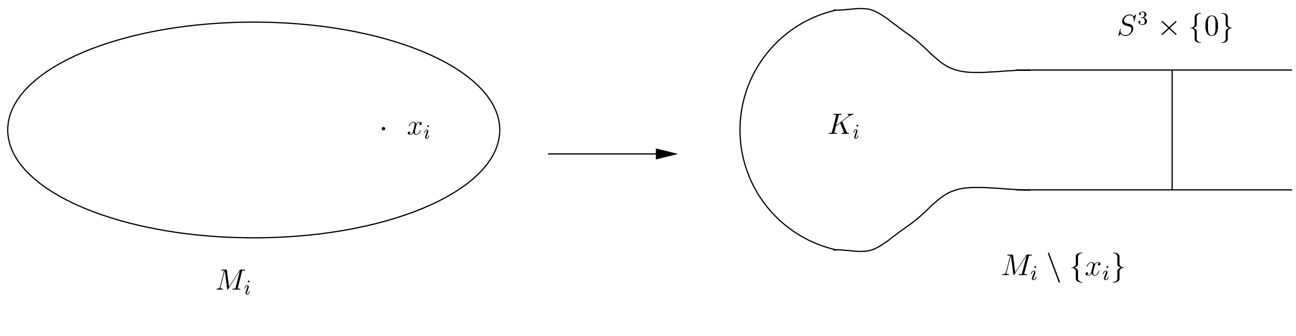
5. fejezet

A ragasztási tétel

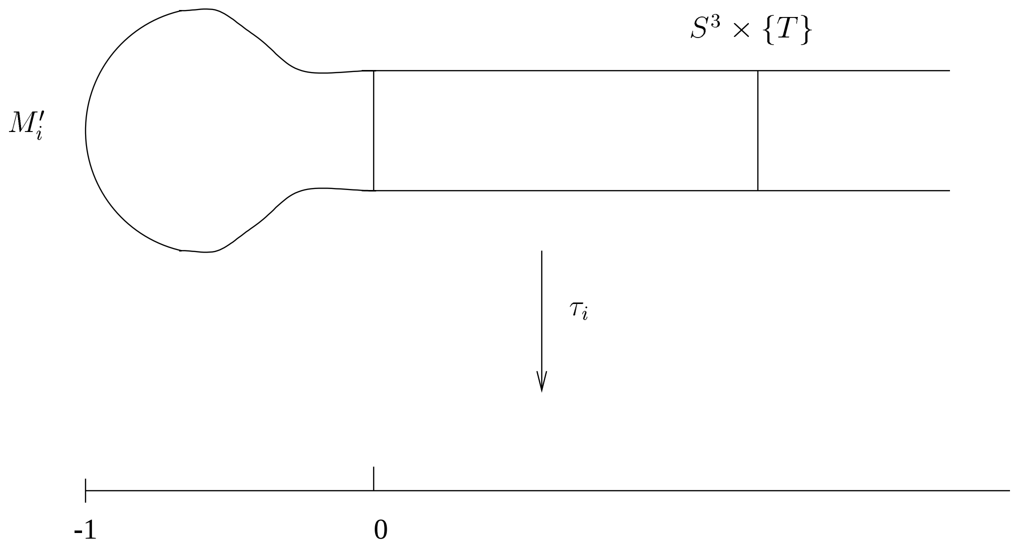
5.1 Ragasztás S^3 mentén

Ezt a fejezetet az egyik legfontosabb segédeszköz, a ragasztási konstrukció ismertetésének szenteljük. E tétel segítségével olyan alapvető eredményt tudunk belátni például, mint ASD konnexiók létezését minden M sokaságon (alkalmas metrikát és energiát választva). A modulustér végeinek leírásánál a ragasztási tétel egy speciális esetére lesz majd szükségünk (lásd 6. fejezet). A tétel egy általánosítását használva a 8. fejezetben egy alkalmas sokaságra (a *K3*-felületre) meghatározzuk a modulusteret, amiből fontos differenciáltopológiai eredményeket kapunk.

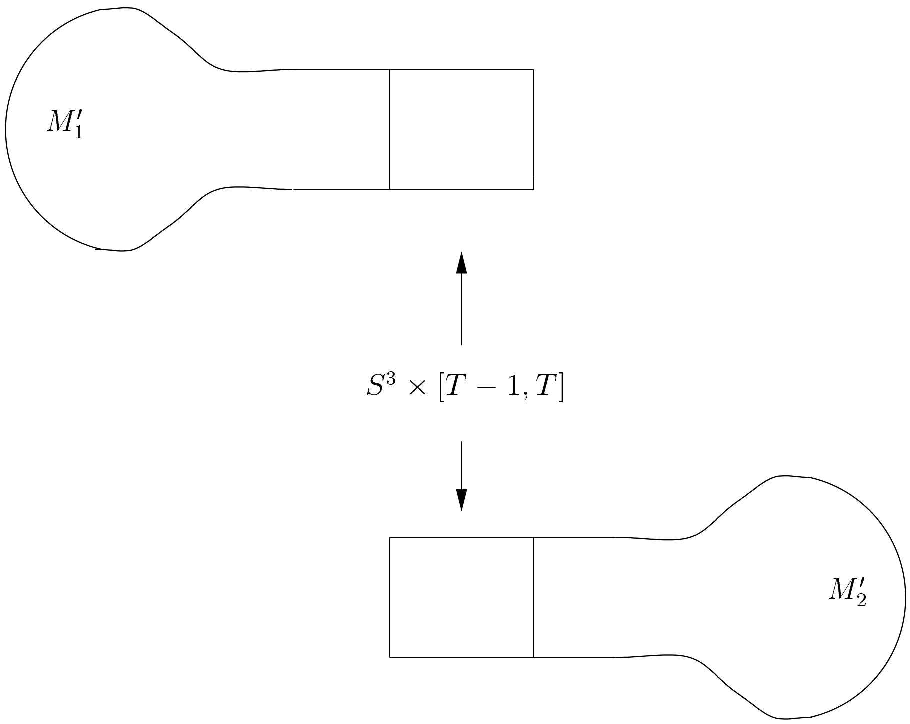
Legyen A_i egy k_i energiájú ASD konnexió a $P_i \to M_i$ SU(2)-nyalábon ($i = 1, 2$), vagyis $c_2(P_i)[M_i] = k_i$. Első lépésként egy $P \to M_1 \# M_2$ nyalábot és rajta egy $k_1 + k_2$ energiájú $A_1 \# A_2$ konnexiót fogunk konstruálni. Bár $A_1 \# A_2$ még nem lesz ASD, kis perturbációval majd azzá tehető. Ilymódon az M_1 és M_2 feletti modulustér ismeretében $M_1 \# M_2$ modulusteréről fogunk információt kapni. Legyenek tehát $x_1 \in M_1$ és $x_2 \in M_2$ azok a pontok, ahol az összefüggő uniót ($\#$) vesszük, és tegyük fel, hogy az x_i pontok kis környezetében a metrika lapos. Ekkor a metrika konform változtatásával $M_i \setminus \{x_i\}$-n egy olyan teljes metrika adható meg, melyre létezik olyan K_i 4-dimenziós peremes Riemann-sokaság, hogy $\partial K_i = S^3$ és ezt a peremet $S^3 \times \{0\} \subset S^3 \times \mathbb{R}^+$-szal azonosítva a $K_i \cup_{S^3} S^3 \times \mathbb{R}^+$ sokaság $M_i \setminus \{x_i\}$-vel izometrikus ($S^3 \times \mathbb{R}^+$-on a metrika a direkt szorzat-metrika), lásd az 5.1 ábrát. (Ez megtehető, hiszen $D^4 \setminus \{0\}$ és $S^3 \times \mathbb{R}^+$ konform ekvivalensek.) Mivel a $*$-operátor konform invariáns, az A_i konnexiók ezekre az új metrikákra nézve is ASD-k lesznek. Rögzítsünk egy olyan $\tau_i \colon M_i \setminus \{x_i\} \to [-1, \infty)$ függvényt, mely az $S^3 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ projekció folytonos kiterjesztése $M_i \setminus \{x_i\}$-re (5.2 ábra). Az $M_i' = \tau_i^{-1}[-1, T] \subset M_i \setminus \{x_i\}$ sokaságokat véve (ahol $0 \ll T$ később rögzítendő konstans), majd ezeket az $S^3 \times [T-1, T]$ annulusok mentén összeragasztva $M_1 \# M_2$-nek kapjuk meg egy modelljét. (A ragasztáshoz lásd az 5.3 ábrát.) Ezen a módon egy metrikát is kaptunk $M = M_1 \# M_2$-n. Változtassuk meg az A_i konnexiókat a következő módon: mivel a $P_i \to M_i \setminus \{x_i\}$ nyaláb triviális, így $A_i = \theta + \omega_i$ ahol θ a triviális konnexió, ω_i pedig egy adP-értékű 1-forma. Legyen $A_i' = \theta + \beta(r)\omega_i$, ahol a β sima függvény ($\beta(r) \in [0, 1]$) értéke 1



5.1 ábra: Cilindrikus metrika $M_i \setminus \{x_i\}$-n



5.2 ábra: A τ_i függvény M'_i-n



5.3 ábra: M'_1 és M'_2 összeragasztása ha $r \leq T-2$ és 0 ha $r \geq T-1$ (tehát β egy levágó függvény). Vagyis az A_i' konnexió A_i-vel egyezik meg $\tau_i^{-1}[-1, T-2]$-n és θ-val $\tau_i^{-1}[T-1, T]$-n. Az x_i pontban P_i egy trivializációjának $\tau_i^{-1}[T-1, T]$ felett egyetlen olyan kiterjesztése van, melyben a θ konnexió éppen a külső deriválással egyezik meg. Tehát az x_i feletti fibrumokat azonosítva a P_i $(i=1,2)$ nyalábokat $\tau_1^{-1}[T-1, T]$ és $\tau_2^{-1}[T-1, T]$ felett össze tudjuk ragasztani. Ilymódon $Iso(P_1|_{x_1}, P_2|_{x_2}) \cong$SO(3) egy ρ elemének (a ragasztási paraméternek) a rögzítésével egy $P \to M_1 \# M_2$ nyalábot és azon egy $A_\rho = A_1' \#_\rho A_2'$ konnexiót kapunk.

5.1.1. megjegyzés. A $P \to M_1 \# M_2$ nyaláb izomorfizmus-osztálya természetesen nem függ a $\rho \in Iso(P_1|_{x_1}, P_1|_{x_2}) \cong$ SO(3) ragasztási paraméter választásától, hiszen $\rho_1, \rho_2 \in$ SO(3) folytonos úttal összeköthető. Az A_ρ konnexió ekvivalencia-osztálya azonban már függeni fog ρ-tól.

Legyen $\Gamma = Stab(A_1) \times Stab(A_2)$, ahol $Stab(A_i)$ az A_i konnexió mérce-csoportbeli stabilizátora (a $Stab(A_i)$ csoportot a 3.2.2 definícióban Γ_{A_i}-vel jelöltük, most a Γ-tól való könnyebb megkülönböztethetőség kedvéért választottuk a $Stab(A_i)$ jelölést). Mivel $Stab(A_i)$ hat a $P_i|_{x_i}$ fibrumon, egy kézenfekvő Γ-hatás adódik a ragasztási paraméterek $Iso(P_1|_{x_1}, P_2|_{x_2})$ terén.

5.1.2. állítás. *$\rho_1, \rho_2 \in Iso(P_1|_{x_1}, P_2|_{x_2})$ esetén A_{ρ_1} pontosan akkor transzformáható A_{ρ_2}-be, ha létezik olyan $\gamma \in \Gamma$, hogy $\rho_1 = \gamma\rho_2$.* □

Például ha A_1 és A_2 irreducibilisek (vagyis $Stab(A_1) \times Stab(A_2) = 1$), akkor SO(3)-nyi sok mérce-inekvivalens konnexiót kapunk $P \to M_1 \# M_2$-n A_1 és A_2 összeragasztásával. Az SO(3)/Γ faktorteret az *effektív ragasztási paraméterek* terének nevezzük. A konstrukcióból látható, hogy $\tau_1^{-1}[T-2, T-1] \cup \tau_2^{-1}[T-2, T-1] \subset M_1 \# M_2$-n kívül az A_ρ konnexió ASD, ezen a két annuluson azonban nem feltétlen (a β függvény itt elronthatja az ASD tulajdonságot). Egy olyan a_ρ 1-formát szeretnénk $M = M_1 \# M_2$ felett találni, melyre $A_\rho + a_\rho$ már ASD, vagyis $F^+_{A_\rho + a_\rho} = 0$. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban hagyjuk el a ρ ragasztási paraméter feltüntetését. Az $F^+_{A+a} = 0$ egyenletet kifejtve

$$d_A^+ a + (a \wedge a)^+ = -F_A^+$$

adódik. Tegyük fel, hogy d_A^+ (a $Pa = d_A^+ a + (a \wedge a)^+$ operátor linearizáltja) ráképezés, tehát kereshetjük a megoldást $a = Q(\psi)$ $(Q\colon \Omega^2_+(M; adP) \to \Omega^1(M; adP))$ alakban, ahol $d_A^+ Q =$Id. (Emlékezzünk arra, hogy d_A^+ egy $d_A^+\colon \Omega^1(M; adP) \to \Omega^2_+(M; adP)$ operátor, és amennyiben ez ráképezés, a fenti Q jobbinverz létezik.)

5.1.3. megjegyzés. Az, hogy d_A^+ ráképezés, azt jelenti, hogy P-re alkalmazható az implicit függvény tétel; ezt a következő lemmában fogalmazzuk meg pontosan.

$a = Q(\psi)$-t behelyettesítve egyenletünk a

$$\psi + (Q(\psi) \wedge Q(\psi))^+ = -F_A^+$$

alakot ölti.

5.1.4. lemma. *Legyen $S\colon B \to B$ egy B Banach-téren értelmezett sima leképezés, teljesüljön $S(0) = 0$ és $||S\psi_1 - S\psi_2|| \leq k||\psi_1 - \psi_2||(||\psi_1|| + ||\psi_2||)$ (k konstans, $\psi_1, \psi_2 \in B$). Ekkor minden olyan $\eta \in B$-re, melyre $||\eta|| < \frac{1}{10k}$, pontosan egy olyan $\psi \in B$ létezik, hogy $||\psi|| < \frac{1}{5k}$ és*

$$(I + S)\psi = \psi + S\psi = \eta.$$

($T\psi = \eta - S\psi$ definícióval a $\psi = lim\ T^n(0) \in B$ elem éppen a kívánt tulajdonságú lesz.) □

Esetünkben S szerepét a $(Q(\psi) \wedge Q(\psi))^+$ operátor fogja játszani (melyre a kívánt tulajdonság könnyen ellenőrizhető), η pedig $-F_A^+$ lesz. Elég nagy T választásával $||F_A^+||$ kicsivé tehető, így a lemma minden feltétele teljesül. Feltettük azonban azt is, hogy d_A^+ ráképezés, vagyis létezik a Q jobbinverz. Belátható, hogy ha $d_{A_1}^+$ és $d_{A_2}^+$ ráképezés, másszóval $\mathrm{H}^+_{A_1} = \mathrm{H}^+_{A_2} = 0$, akkor d_A^+ is ráképezés, így fenti gondolatmenetünk működik. Összefoglalva:

5.1.5. tétel. *Legyenek A_1, A_2 olyan ASD konnexiók az M_1, M_2 sokaságokon, melyekre $\mathrm{H}^+_{A_1} = \mathrm{H}^+_{A_2} = 0$. Elég nagy T-re és rögzített $\rho \in Iso(P_1|_{x_1}, P_2|_{x_2})$ ragasztási paraméterre egyetlen olyan $A_\rho + a_\rho$ ASD konnexió létezik $M = M_1\#M_2$-n, melyre $\|a_\rho\| < Ce^{-T}$. Ha ρ_1 és ρ_2 a $\Gamma = Stab(A_1) \times Stab(A_2)$ csoport hatására nézve ekvivalensek, akkor a kapott ragasztott konnexiók ($A_{\rho_1} + a_{\rho_1}$ és $A_{\rho_2} + a_{\rho_2}$) mérce-ekvivalensek ($\mathcal{G}_P$-ekvivalensek).*
□

Kicsit nehezebb a dolgunk, ha $\mathrm{H}^+_{A_i} = 0$ nem tehető fel. Válasszunk $\sigma_i \colon \mathrm{H}^+_{A_i} \to \Omega^2_+(M_i, adP_i)$ operátorokat úgy, hogy $d^+_{A_i} \oplus \sigma_i \colon \Omega^1(M_i; adP_i) \oplus \mathrm{H}^+_{A_i} \to \Omega^2_+(M_i; adP_i)$ már ráképezés legyen (ez megtehető, hiszen $\mathrm{H}^+_{A_i}$ éppen a $d^+_{A_i}$ leképezés komagja). $\pi_i \colon \Omega^2_+(M_i; adP_i) \to \mathrm{H}^+_{A_i}$ és Q_i pedig olyan operátorok legyenek, melyekre $d^+_{A_i} Q_i + \sigma_i \pi_i = \mathrm{Id}_{\Omega^2_+(M_i;adP_i)}$ $(i = 1, 2)$ teljesül. A $\sigma = \sigma_1 \oplus \sigma_2 \colon \mathrm{H} = \mathrm{H}^+_{A_1} \oplus \mathrm{H}^+_{A_2} \to \Omega^2_+(M; adP)$ és $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2 \colon \Omega^2_+(M; adP) \to \mathrm{H}$ definíciókkal a $d^+_A \oplus \sigma$ operátornak $Q \oplus \sigma$ jobbinverze lesz, így a $(\psi, h) \in \Omega^2_+(M; adP) \oplus \mathrm{H}$ párra az

$$F^+(A + Q(\psi)) + \sigma(h) = 0$$

egyenletet ($F^+(A + Q(\psi)) = 0$ helyett kénytelenek vagyunk az új, $F^+(A + Q(\psi)) + \sigma(h) = 0$ egyenlettel foglalkozni, hiszen csak erre lesz a linearizált tag — $d^+_A \oplus \sigma$ — ráképezés, és így alkalmazható az implicit függvény tétel) az ismert módon átalakítva

$$\psi - \sigma(\pi(\psi) - h) + (Q(\psi) \wedge Q(\psi))^+ = -F^+_A$$

egyenletet kapjuk (hiszen $(d^+_A Q + \sigma\pi)\psi = \psi$, így $(d^+_A Q)\psi = \psi - \sigma\pi(\psi)$). A $\sigma = \sigma_1 \oplus \sigma_2$ definíció kis magyarázatot igényel: $h \in \mathrm{H}^+_{A_i}$ esetén a $\sigma_i(h) \in \Omega^2_+(M_i, adP_i)$ elem választható olyannak, mely x_i egy környezetében eltűnik, így elég nagy T-re $\sigma_i(h)$ kiterjeszthető egy $\Omega^2_+(M_1\#M_2; adP)$ elemmé. A fenti egyenlet $\pi(\psi) = h$ esetén éppen a korábban tárgyalt esetre redukálódik, így ismét létezik kis normájú ψ megoldása. Tehát a $\psi + (Q(\psi) \wedge Q(\psi))^+ = -F^+_A$ egyenletet megoldva a $(\psi, h) = (\psi, \pi(\psi))$ pár megoldása lesz az $F^+(A + Q(\psi)) + \sigma(h) = 0$ egyenletnek, és természetesen az $A + Q(\psi)$ konnexió pontosan akkor lesz ASD, ha $h = \pi(\psi) = 0$ teljesül.

Eddig a $\rho \in Iso(P_1|_{x_1}, P_2|_{x_2})$ ragasztási paraméter fixálva volt; nézzük meg, mi történik ρ változtatása során. Az előbbieket minden $\rho \in Iso(P_1|_{x_1}, P_2|_{x_2})$ elemre elismételve — és így A_ρ, a_ρ, Ψ_ρ, $h_\rho = \pi(\psi_\rho)$ elemeket konstruálva — egy $\Psi(\rho) = \pi(\psi_\rho) \colon Iso(P_1|_{x_1}, P_2|_{x_2}) \to \mathrm{H}$ Γ-ekvivariáns leképezést kapunk, ennek zérushelyei, vagyis a $\Psi^{-1}(0) \subset Iso(P_1|_{x_1}, P_2|_{x_2})$ elemek azok a ragasztási paraméterek, amelyekhez tartozó $A_\rho + Q(\psi_\rho)$ ragasztott konnexiók ASD-k. A $\mathrm{H} = \mathrm{H}^+_{A_1} \oplus \mathrm{H}^+_{A_2}$ teret a ragasztás *akadályának* nevezzük.

Végül tekintsünk el az A_i konnexiók fixálásától is, és nézzük meg, mi történik, ha ezeket is változtatjuk. (Az egyszerűség kedvéért tegyük fel most, hogy az A_1 és az A_2 konnexiók irreducibilisek, vagyis $\Gamma = Stab(A_1) \times Stab(A_2) = 1$.) Mivel $\mathrm{H}^1_{A_i}$ a modulustér A_i-beli érintőterével azonosítható, egy $U_i \subset \mathrm{H}^1_{A_i}$ 0-környezet A_i egy modulustérbeli környezetét adja meg. Legyen $U = U_1 \times U_2 \times Iso(P_1|_{x_1}, P_2|_{x_2})$, ahol U_i elég kicsi 0-környezet. Az eddigieket elismételve ekkor minden $u = (B_1, B_2, \rho) \in U$-ra (a B_i az A_i-hez közeli konnexió a $P_i \to M_i$ nyalábon, $\rho \in Iso(P_1|_{x_1}, P_2|_{x_2})$ pedig egy ragasztási paraméter) egy $B_1\#_\rho B_2 = A_u$ $M_1\#M_2$ feletti konnexiót, a_u 1-formát és egy $\Psi \colon U \to \mathrm{H}^+_{A_1} \oplus \mathrm{H}^+_{A_2}$ $\Gamma-$ekvivariáns függvényt adhatunk meg. A $\Psi(u)$ érték természetesen az a $\pi(\psi_\rho) \in \mathrm{H}$ érték lesz, melyre ψ_ρ a

$$\psi + (Q(\psi) \wedge Q(\psi))^+ = -F^+_{B_1\#_\rho B_2}$$

egyenlet megoldása.

5.1.6. tétel. *Az $A_u + a_u$ konnexió pontosan akkor ASD, ha $\Psi(u) = 0$, vagyis az*

$$\mathcal{U} = \{A_u + a_u \mid u \in U = U_1 \times U_2 \times Iso(P_1|_{x_1}, P_2|_{x_2})\} \subset \mathcal{B}^*$$

(U-val diffeomorf) részen a Ψ függvény vágja ki az $\mathcal{U}$-ban lévő ASD konnexiókat. □

Ezen utolsó tétel alkalmazásaként megmutatható, hogy minden M sokaságra létezik olyan g metrika és k energia, melyre az $\mathcal{M}^k_M(g)$ modulustér nem üres. Az M-en lévő θ triviális konnexióhoz hozzáragasztva egy S^4 feletti ASD konnexiót, továbbra is $M = M\#S^4$ feletti konnexiót kapunk. Annak akadálya, hogy a kapott konnexió ASD-vé tehető legyen, a $\mathrm{H}^+_\theta = \mathcal{H}^+_M(g)$ $3b^+_M$-dimenziós vektortérben van (hosszú számolás mutatja, hogy $[A] \in \mathcal{M}^1_{S^4}(\textit{standrad metrika})$ elemekre $\mathrm{H}^+_A = 0$, így a ragasztás akadálya valóban a H^+_θ tér). Mivel — a fenti jelöléseket használva — $U_1 = \{\theta\}$, elég nagy energiát választva (tehát $U_2 \subset \mathrm{H}^1_{A_2}$-t elég nagy dimenzióssá téve) generikus metrikára a $\Psi: U = U_1 \times U_2 \times \mathrm{SO}(3) \to \mathrm{H}^+_\theta$ függvénynek lesz zérushelye, tehát M-en a ragasztási konstrukció egy ASD konnexiót ad meg.

Végül azt szeretnénk belátni, hogy a ragasztási konstrukcióval $\mathcal{M}^{k_1+k_2}_{M_1\#M_2}$ egy nyílt részét kaptuk meg. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $\mathrm{H}^0_{A_i} = \mathrm{H}^+_{A_i} = 0$ (vagyis a ragasztásnak nincs akadálya és minden ragasztási paraméter effektív). A fenti jelöléseket használva ekkor $dimU = dim\mathcal{M}^{k_1}_{M_1} + dim\mathcal{M}^{k_2}_{M_2} + dim\mathrm{SO}(3) = 8k_1 - 3(1+b^+_{M_1}) + 8k_2 - 3(1+b^+_{M_2}) + 3 = 8(k_1+k_2) - 3(1+b^+_{M_1\#M_2}) = dim\mathcal{M}^{k_1+k_2}_{M_1\#M_2}$, tehát esély van arra, hogy az

$$R_T: U \to \mathcal{M}^{k_1+k_2}_{M_1\#M_2}$$

$u \mapsto A_u + a_u$ függvény (lokális) diffeomorfizmus legyen (itt $0 \ll T$ választott paraméter). Legyen tehát $\bar{R}_T: U \to \mathcal{B}^{k_1+k_2}_{M_1\#M_2}$ az $u \mapsto A_u$ (A_u-t az A_1 és A_2 konnexiók ρ paraméter szerinti összeragasztásával kapjuk, $u = (A_1, A_2, \rho) \in U$) formulával megadott leképezés. Jelölje $\mathcal{K}_\epsilon$ az $Im\bar{R}_T$ képtér ϵ-környezetét ($\epsilon > 0$), vagyis

$$\mathcal{K}_\epsilon = \{[A] \in \mathcal{B}^{k_1+k_2}_{M_1\#M_2} \mid d([A], Im\bar{R}_T) < \epsilon\}.$$

(A fenti d távolságot a $d([A],[B]) = inf\{||A - g(B)|| \mid g \in \mathcal{G}_P\}$ formula adja meg.)

5.1.7. tétel. *Legyen $R_T(u) = [\bar{R}_T(u) + a_u] = [A_u + a_u]$. Ekkor elég kis $\epsilon > 0$ konstansra és megfelelően nagy T-re*

$$\mathcal{K}_\epsilon \cap \mathcal{M}^{k_1+k_2}_{M_1\#M_2} = ImR_T \subset \mathcal{B}^{k_1+k_2}_{M_1\#M_2}.$$

□

Tehát a ragasztási konstrukcióval minden $Im\bar{R}_T$-hoz közeli ASD konnexiót megkapunk.

Összefoglalva (és elejtve a $\mathrm{H}^0_A = \mathrm{H}^+_A = 0$ feltevéseket) tehát kis $U_i \subset \mathrm{H}^1_{A_i}$ környezetekre és $\Gamma = Stab(A_1) \times Stab(A_2)$ csoportra egy $\bar{R}_T: U/\Gamma \to \mathcal{B}^{k_1+k_2}_{M_1\#M_2}$ $u \mapsto [A_u]$ ragasztó függvényt, valamint egy

$$R_T: U/\Gamma \to \mathcal{B}^{k_1+k_2}_{M_1\#M_2} \quad u \mapsto [A_u + a_u]$$

módosított ragasztó függvényt kaptunk, ahol $a_u = Q(\psi_u)$, ψ_u pedig a $\psi + (Q(\psi) \wedge Q(\psi))^+ = -F^+_{A_u}$ egyenlet (egyetlen kis normájú) megoldása. A $\Psi(u) = \pi(\psi_u) \in \mathrm{H} = \mathrm{H}^+_{A_1} \oplus \mathrm{H}^+_{A_2}$ függvény egy U feletti H fibrumú vektornyaláb olyan szelését adja meg, melyre teljesül az, hogy R_T egy

$$\Psi^{-1}(0)/\Gamma \subset U/\Gamma \text{ és } R_T(U) \cap \mathcal{M}^{k_1+k_2}_{M_1\#M_2}$$

terek közötti homeomorfizmus. Másszóval tehát a $\Psi^{-1}(0)/\Gamma$ tér $\mathcal{M}^{k_1+k_2}_{M_1\#M_2}$ egy lokális modelljét adja meg. (Γ az U tér harmadik — $Iso(P_1|_{x_1}, P_2|_{x_2})$-be eső — komponensén hat a már korábban megismert módon.)

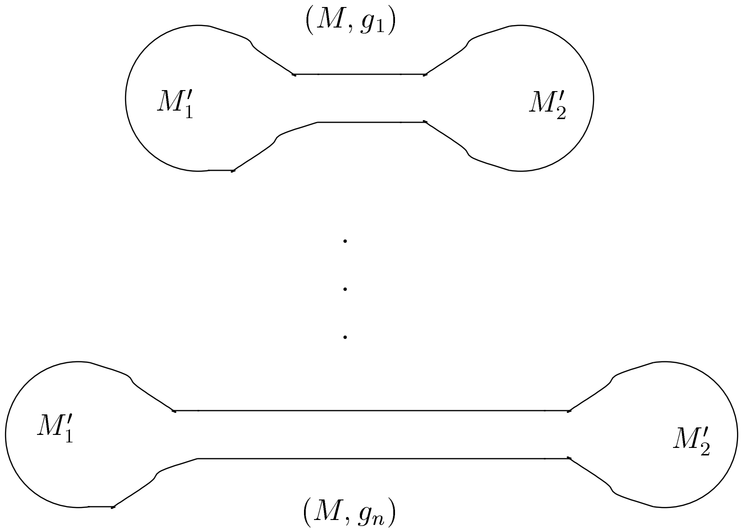
A ragasztási konstrukció megfordításaként fogható fel a következő, inkább Uhlenbeck gyenge konvergencia-tételével rokon állítás. Legyen g_n olyan metrikasorozat $M = M_1\#M_2$-n mely széthúzza M_1-et és M_2-t (vagyis (M, g_n) egy $S^3 \times [-n, n]$-nel izometrikus nyakat tartalmaz, lásd az 5.4 ábrát). $n \to \infty$ határátmenettel tehát egy olyan g_∞ metrikát kapunk, mely M-et ismét $M_1 \setminus \{x_1\}$, $M_2 \setminus \{x_2\}$-vé szakítja szét. Legyen $E \to M$ rögzített $\mathrm{SU}(2)$-nyaláb ($c_2(E)[M] = k$), és vegyünk egy $A_n \in \mathcal{M}^k_M(g_n)$ konnexiósorozatot (tehát a különböző indexhez tartozó ASD konnexiók különböző metrikákhoz tartozó modulusterekben vannak!).

5.1.8. tétel. *A fenti $\{A_n\}$ sorozatnak létezik egy $(B_1, B_2; \{y_1, ..., y_l\})$ párhoz gyengén tartó A_{n_k} részsorozata, ahol B_i egy $E_i \to M_i$ nyalábon lévő ASD konnexió, és $c_2(E_i)[M_i] = k_i$ jelöléssel*

$$k_1 + k_2 + l \leq k.$$

□

5.1.9. megjegyzések. • A fenti B_i konnexiók először csak $M_i \setminus \{x_i\}$ feletti konnexiókként értelmezhetők, Uhlenbeck eltüntethető szingularitási tétele azonban (egyértelműen) kiterjeszti B_i-t M_i fölé.



5.4 ábra: M_1'-t és M_2'-t széthúzó metrika-sorozat

- Ha $k_1 + k_2 = k$ (és így $l = 0$), akkor a konvergenciát erősnek mondjuk. Még $l = 0$ esetén is előfordulhat, hogy $k_1 + k_2 < k$, hiszen a hosszú nyakon esetleg felhalmozódó görbület elveszik a határátmenet során.
- Az 5.1.8 tétel az egyik legjobb segédeszköz egy M sokaság feletti modulustér analizálásához (lásd például a 8.3.7, 9.1.3 vagy 9.3.5 tételt); gyakran ext a tételt nevezik Uhlenbeck gyenge kompaktsági tételének.
- Eddig mindig SU(2)-konnexiók ragasztásáról beszéltünk. Természetesen az eddig mondottakat szó szerint elismételve SO(3)-nyalábon lévő konnexiókat is össze tudunk ragasztani.

5.2 Függelék

A fenti gondolatmenet — némi módosítással — olyan nyílt sokaságokra is kiterjeszthető, melyeknek "határa" nem az S^3 gömbfelület (mint az $M \setminus \{x\}$ sokaságé), hanem más 3-dimenziós sokaság. Az elméletnek ez a része azonban még nincs teljesen kidolgozva. Ebben a függelékben a problémás pontokat szeretnénk az olvasóval megismertetni. A $\partial M = N = \mathbb{RP}^3$ esetre a későbbiekben még szükségünk lesz. Legyen tehát M_1 olyan nyílt Riemann-sokaság, mely izometrikus egy $K_1 \cup N \times \mathbb{R}^+$ unióval. K_1 kompakt peremes, N pedig 3-dimenziós Riemann-sokaság: a direkt szorzaton a metrika a direkt-szorzat metrika (az ilyen metrikát M_1-en cilindrikus végűnek nevezzük). Hasonlóan, legyen $M_2 \cong K_2 \cup \bar{N} \times \mathbb{R}^+$, ahol $\bar{N}$ az N sokaságot jelöli fordított irányítással. Az előző részhez hasonlóan N menti ragasztással egy $M = M_1 \cup_N M_2$ zárt sokaságot kapunk. Legyenek $P_i \to M_i$ SU(2)-nyalábok, rajtuk A_i ASD konnexiók (vegyük észre, hogy M_i nyíltsága miatt $\mathrm{H}^4(M_i; \mathbb{Z}) = 0$, így klasszifikációs tételünk értelmében a nyalábok triviálisak). Ugyan a 8. fejezetben ismét szó lesz cilindrikus végű sokaságokról — akkor az $N = \mathbb{RP}^3$ esetet fogjuk részletesen megvizsgálni —, a továbbiak megértése szempontjából egy tétel felidézésére van szükségünk (lásd [MMR] és a 8.3.3 tétel).

5.2.1. tétel. *Legyen g cilindrikus metrika M-en és A g-ASD konnexió; tegyük fel továbbá, hogy $\int_M |F_A|^2 < \infty$. Legyen A_t az A konnexió megszorítása az $N \times \{t\} \subset M$ részsokaságra. Ekkor az $\{A_t\}$ görbe a $P|_N \to N$ nyalábon definiált konnexiók terében egy lapos konnexióhoz tart, midőn $t \to \infty$ (vagyis $N \times \{t\}$ az M "végéhez" tart).* □

Ezáltal tehát minden $A \in \mathcal{M}_M$ ASD konnexióhoz egy $\partial_\infty(A) \in \chi(N)$ N feletti lapos konnexiót rendelhetünk ($\chi(N)$ definíciója a 2.2 fejezetben található meg). Természetesen csak olyan A_1, A_2 konnexiókat tudunk összeragasztani, melyekre $\partial_\infty(A_1) = \partial_\infty(A_2) = \alpha \in \chi(N)$ (az előző alfejezetben, tehát $N = S^3$ esetén $\chi(S^3) = \{\theta\}$ miatt ez természetesen mindig teljesül). Az S^3-esethez hasonlóan definiálhatók a τ_i függvények és az $M_i' \subset M_i$

sokaságok, amelyek összeragasztásával kapjuk az $M = M_1 \cup_N M_2$ zárt sokaságot. Hasonlóan a korábbi β levágó függvény alkalmazásához ezesetben is át tudjuk változtatni az A_i konnexiókat olyan A'_i konnexiókká, melyek egy $0 \ll T$ konstansra $\tau_i^{-1}[-1, T-2] \subset M'_i$-n A_i-vel, $\tau_i^{-1}[T-1, T]$-n pedig $\partial_\infty(A_i) = \alpha \in \chi(N)$-nel egyeznek meg. Tehát $t \in [T-1, T]$-re egy $\rho\colon P_1|_{N\times\{t\}} \to P_2|_{N\times\{t\}}$ izomorfizmus (a ragasztási paraméter) választásával egy $P_\rho \to M_1 \cup_N M_2$ ragasztott nyalábot kapunk. Emlékezzünk azonban, hogy az S^3-esetben is a lapos (akkor triviális) A'_i konnexiókat használtuk a trivializáció $S^3 \times [T-1, T]$ annulus feletti kiterjesztésére, ami elengedhetetlen volt a ragasztás végrehajtásához. Esetünkben is ez a teendő, tehát még arra is szükségünk van, hogy a választott ρ azonosításra $\rho^*(\partial_\infty(A_2)) = \partial_\infty(A_1)$ teljesüljön. Ekkor természetesen nemcsak a P_ρ ragasztott nyalábot, hanem egy $A_\rho = A'_1 \#_\rho A'_2$ ragasztott konnexiót is megkaptunk. Vagyis a ragasztási paraméterek tere esetünkben a $Stab(\alpha) \subset G$ csoporttal azonosítható (hiszen ezek azok a nyaláb-automorfizmusok, melyekre $\rho^*(\alpha) = \alpha$). Bár a triviális θ konnexióra ez a csoport valóban a struktúra-csoporttal izomorf (lásd az S^3-esetet), más sokaságokra és lapos konnexiókra G kisebb részcsoportjai is előfordulhatnak. Például az $\mathbb{RP}^3$ feletti (egyetlen) nem-triviális SO(3)-nyalábra és a rajta lévő (egyetlen) β lapos konnexióra $Stab(\beta) = \mathrm{O}(2) \subset \mathrm{SO}(3)$.

5.2.2. megjegyzés. Ha a ragasztási paraméterek tere nem összefüggő, a különböző komponensekből vett ragasztási paraméterek egymással nem-izomorf nyalábokat adhatnak. Ez a helyzet például $N = \mathbb{RP}^3$ esetében is.

Tehát a ragasztási paraméterek Gl terének meghatározása után $P_\rho \to M_1 \cup_N M_2$ nyalábokat és A_ρ $(\rho \in Gl)$ konnexiókat kapunk. Ezek a konnexiók már majdnem ASD-k, a korábban megismert módszerrel (a_ρ kis normájú 1-forma találásával) szeretnénk A_ρ közelében egyértelmű ASD konnexiót találni. Meglepő módon ez nem mindig tehető meg, a $\chi(N)$ tér $\alpha \in \chi(N)$ pontja körüli analitikus tulajdonságaitól függően nem minden esetben hajtható végre az eddig megismert program. Ha N homologikus gömb (tehát $\mathrm{H}_*(N;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}_*(S^3;\mathbb{Z})$), $N \cong S^1 \times S^2$ vagy $N \cong \mathbb{RP}^3$, akkor az $N = S^3$ esetre megismert stratégia átültethető. Az általános esetben a probléma abból adódik, hogy ha egy A ASD konnexióra a létező $A_t = A|_{N\times\{t\}} \to \partial_\infty(A)$ konvergencia nem elég gyors (az $a_t = A_t - \partial_\infty(A)$ 1-forma normája nem csökken exponenciálisan gyorsan), akkor a felhasznált becslés $||F^+_{A_\rho}||$-ra nem működik. Az előbb felsorolt esetekben (tehát ha $N = S^1 \times S^2$, $\mathbb{RP}^3$ vagy homologikus gömb), ez a konvergencia mindig exponenciálisan gyors. Általános esetben ez nem igaz; $\alpha \in \chi(N)$ bizonyos analitikus adatainak ismeretében azonban nem nehéz eldönteni, létezik-e olyan A ASD konnexió, melyre $\partial_\infty(A) = \alpha$ de a konvergencia nem exponenciálisan gyors. Morgan, Mrowka és Ruberman hosszú cikket [MMR] szentelt eme kérdéskör vizsgálatának, mely jelen jegyzetünk keretein messze túlnyúlik. Végeredményben tehát annyit állapítunk csak meg, hogy $N = \mathbb{RP}^3$ esetén minden az 5.1 fejezetben elmondottakhoz hasonlóan megy (és nekünk csak erre lesz szükségünk a 8. fejezetben), míg általános N-re a helyzet meglehetősen bonyolult és még nem is teljesen tisztázott.

6. fejezet

Nemlétezési tételek

6.1 Egy speciális eset

Ahogy azt már az 1. fejezetben említettük, nem minden metszési formához létezik olyan sima, egyszeresen összefüggő, kompakt négysokaság, amely a metszési formát realizálja. Donaldson két alapvető tétele (az 1.3.6 és az 1.3.7 tétel) foglalkozik ezzel a kérdéssel. Ebben a fejezetben az 1.3.6 tétel bizonyítását fogjuk vázolni. Emlékeztetőül, Donaldson első nemlétezési tétele a következőt mondja ki:

6.1.1. tétel. *Legyen M olyan sima, egyszeresen összefüggő, kompakt irányított négysokaság, melynek q_M metszetformája negatív definit. Ekkor q_M $\mathbb{Z}$ felett diagonalizálható, vagyis a $-Id$ formával ekvivalens.* □

6.1.2. megjegyzés. Mivel $-M$ metszetformája $-q_M$, így a tétel fenti alakja ekvivalens az 1.3.6 tétellel.

A tétel egy speciális esetének bizonyítása előtt lássunk néhány példát nem diagonalizálható negatív definit metszetformára (a nem-diagonalizálhatóság belátását az olvasóra hagyjuk).

6.1.3. állítás. $-E_8$, $2(-E_8)$, $-E_8 \oplus \langle -1 \rangle$ *negatív definit, nem diagonalizálható metszetformák.* □

$-E_8$ páros metszési forma, melynek szignatúrája -8 (tehát 16-tal nem osztható), így Rohlin tételéből (lásd 1.3.4 tétel) is rögtön következik, hogy nem realizálható egyszeresen összefüggő sima sokaság metszetformájaként. A másik két metszési forma azonban nem zárható ki ilyen egyszerű módon, hiszen $sign(2(-E_8)) = -16$, $-E_8 \oplus \langle -1 \rangle$ pedig nem páros.

6.1.4. tétel. *Nincs olyan M egyszeresen öszefüggő, sima, irányított kompakt négysokaság, melynek metszetformája $2(-E_8)$.*

Bizonyítás. Indirekten, tegyük fel, hogy létezik egy ilyen M, és a modulustér eddig megismert tulajdonságaiból próbáljunk ellentmondásra jutni. Ehhez először is szükségünk van egy SO(3)-nyalábra. Rögzítsünk egy $e \in \mathrm{H}^2(M;\mathbb{Z})$ elemet úgy, hogy $e^2 = -2$ teljesüljön. Legyen $L_e \to M$ az a komplex vonalnyaláb, melyre $c_1(L_e) = e$, és legyen a keresett SO(3)-nyaláb $P = L_e \oplus \underline{\mathbb{R}}$, ahol $\underline{\mathbb{R}}$ az M feletti triviális (valós) vonalnyalábot jelöli. Ekkor természetesen $p_1(P) = -2$ és $w_2(P) \equiv e \pmod 2$. Rögzítsünk egy olyan g metrikát, mely teljesíti a struktúra-tétel követelményeit. Így tehát a reducibilis pontoktól eltekintve $\mathcal{M}_{X,P}(g)$ egy $-2p_1 - 3(1 + b_X^+) = 4 - 3 = 1$ dimenziós sokaság. Vizsgáljuk meg a reducibilis pontokat a modulustérben. Mivel $b_X^+ = 0$, így a 3.3.17 tétel szerint a P nyaláb topologikus redukciói egy-egy értelmű megfeleltetésben állnak a P-n lévő reducibilis konnexiók ekvivalencia-osztályaival (ezeket nevezzük a modulustér reducibilis pontjainak). Azt is tudjuk, hogy a topologikus redukciókat, vagyis a $P = L \oplus \underline{\mathbb{R}}$ felbontásokat a $\pm c_1(L) \in \mathrm{H}^2(M;\mathbb{Z})$ kohomológia-elemek egyértelműen meghatározzák.

6.1.5. állítás. *P-nek egyetlen topologikus redukciója van.*

Bizonyítás. Az $(e,-e)$ pár redukciót ad, hiszen így gyártottuk le P-t. Tegyük fel, hogy az $f \in \mathrm{H}^2(M;\mathbb{Z})$ kohomológia-elem újabb topologikus redukciót ad, vagyis $f^2 = -2$ és $f \equiv w_2(P) \pmod 2$ (hiszen pontosan ekkor lesz az f által definiált $L_f \to M$ nyalábra $P \cong L_f \oplus \mathbb{R}$). Ekkor persze $e \equiv f \pmod 2$ miatt $\frac{f+e}{2} \in \mathrm{H}^2(M;\mathbb{Z})$. Mivel $2(-E_8)$ negatív definit, így $(\frac{f+e}{2})^2 < 0$. Az $||e||^2 = -q_M(e,e)$ definíció egy normát ad meg, a háromszög-egyenlőtlenségből pedig könnyen adódik, hogy

$$||\frac{e+f}{2}|| \leq \frac{||e||+||f||}{2} = 2,$$

és egyenlőség pontosan $e = \pm f$ esetén áll fenn. Tehát $f \neq \pm e$ esetén $-2 < (\frac{e+f}{2})^2 < 0$, vagyis szükségképpen $(\frac{f+e}{2})^2 = -1$, ami pedig ellentmond annak, hogy $2(-E_8)$ páros metszetforma. Tehát $f = \pm e$, vagyis az $(e,-e)$ pár adja P egyetlen topologikus redukcióját. $\square$

Tehát $\mathcal{M}_{M,P}(g)$-nek egyetlen reducibilis pontja van. A 3.3.17 tételből azt kapjuk, hogy ennek a pontnak a környezete egy kúp $\mathbb{CP}^0$ felett, vagyis a modulustér egy 1-dimenziós határos sokaság egyetlen határponttal.

6.1.6. állítás. *$\mathcal{M}_{M,P}(g)$ kompakt.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy a modulustér mindig kompakttá tehető ideális konnexiók bevételével. Vegyük észre (3.3.14 és 3.3.17 tétel), hogy most az ideális ASD konnexiók tere — dimenzió-okokból — üres, így a modulustér kompakt. $\square$

Tehát ha M metszetformája $2(-E_8)$, akkor az $\mathcal{M}_{M,P}(g)$ modulustér egy kompakt határos 1-dimenziós sokaság amelynek egyetlen határpontja van. Ez pedig nem lehetséges. Ezzel a 6.1.4 tételt bebizonyítottuk. $\square$

6.1.7. feladatok. (a) Lássuk be, hogy nem létezik olyan sima, egyszeresen összefüggő, kompakt irányított négysokaság, melynek metszési formája $-E_8 \oplus \langle -1 \rangle$.

(b)* Lássuk be, hogy nem létezik olyan sima, egyszeresen összefüggő, kompakt irányított négysokaság, melynek metszési formája $(-E_8) \otimes (-E_8)$. (*Ötlet*: Tegyük fel, hogy létezik ilyen M, és válasszunk egy olyan $e \in \mathrm{H}^2(M;\mathbb{Z})$ elemet, melyre $e^2 = -4$. Legyen ismét $P = L_e \oplus \mathbb{R}$, ahol $c_1(L_e) = e$. Lássuk be, hogy az $\mathcal{M}_{M,P}(g)$ tér kompakt, irányított 5-dimenziós sokaság egyetlen szingularitással, ennek a szingularitásnak a környezete pedig egy kúp $\mathbb{CP}^2$-n. $\mathbb{CP}^2$ viszont nem null-kobordáns, és ez adja az ellentmondást.)

6.2 A 6.1.1 Tétel vázlatos bizonyítása

Az általános esetben a 6.1.1 tétel bizonyítása kicsit bonyolultabb. Nézzük meg az eredeti bizonyítás vázlatát! Legyen M sima, egyszeresen összefüggő, kompakt irányított négysokaság, és tegyük fel, hogy M negatív definit, vagyis $b_M^+ = 0$. Rögzítsük azt az $E \to M$ SU(2)-nyalábot, melyre $c_2(E)[M] = 1$ teljesül, és válasszuk a g metrikát generikusnak. A modulustér ekkor egy $8 \cdot 1 - 3(1 + b_M^+) = 8 - 3 = 5$ dimenziós, szingularitásokkal rendelkező irányított sokaság lesz. A szingularitások (a reducibilis konnexiók) körül a tér egy-egy $\mathbb{CP}^2$ vagy $\overline{\mathbb{CP}^2}$ feletti kúppal modellezhető.

Ahogy ezt már korábban megállapítottuk, a modulustér szinguláris pontjai a nyaláb topologikus redukcióinak felenek meg. Ha $L \oplus L^{-1}$ az E SU(2)-nyaláb egy felbontása, akkor $c_1(L)^2 = -1$ teljesül. Így minden topologikus redukciónak egy $(\alpha,-\alpha)$ pár felel meg, ahol $\alpha \in \mathrm{H}^2(M;\mathbb{Z})$, $\alpha^2 = -1$; és fordítva, egy fenti tulajdonságú $(\alpha,-\alpha)$ pár egy topologikus redukciót ad. Legyen $\{(\alpha_1,-\alpha_1),...,(\alpha_t,-\alpha_t)\}$ az összes topologikus redukciók halmaza.

6.2.1. lemma. (a) *Az $\alpha_1,...,\alpha_t$ elemek lineárisan függetlenek $\mathrm{H}^2(M;\mathbb{Z})$-ben.*

(b) *M metszetformája pontosan akkor diagonalizálható $\mathbb{Z}$ felett, ha $t = dim\ \mathrm{H}^2(M;\mathbb{Z})$ (tehát ha pontosan $2dim\ \mathrm{H}^2(M;\mathbb{Z})$ olyan elem van, melynek négyzete -1).*

Bizonyítás. Mivel a metszési forma definit, így a háromszög-egyenlőtlenségből $-1 < q_M(\alpha_i, \alpha_j) < 1$ adódik, tehát α_i merőleges α_j-re ha $i \neq j$ és így a lineáris függetlenség triviális. A (b) pont bizonyítása pedig $q_M(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \ \ (i \neq j)$ miatt triviális. □

Ellentétben a korábbi példákkal, $\mathcal{M}_{M,P}(g)$ most nem lesz kompakt. A 4. fejezetből tudjuk, hogy az ideális ASD konnexiók hozzáadásával a modulustér kompakttá tehető. Vegyük észre, hogy az ideális ASD konnexiók tere most M-mel modellezhető, hiszen $\mathcal{M}^0_M = \{\theta\}$ (lásd 4.1.2). Így tehát az $I\mathcal{M}^1_M$ kompaktifikált modulustérre

$$I\mathcal{M}^1_M = \mathcal{M}^1_M \cup M.$$

Komolyabb munkát igényel azonban a modulustér ideális pontok körüli struktúrájának meghatározása; nevezetesen, a következő ún. *galléros környezet-tétel* bebizonyítása.

6.2.2. tétel. *Az $\mathcal{M}^1_M$ modulustér vége a $(0, \epsilon] \times M$ galléros környezettel diffeomorf. (A bizonyítás a ragasztási tételből következik.)* □

Vágjuk le most a reducibilis pontok körüli kúpokat és a galléros környezetet a modulustérből. A végeredmény egy kompakt határos irányított 5-dimenziós sokaság lesz, melynek egyik határa M, a másik pedig k darab $\mathbb{CP}^2$ és l darab $\overline{\mathbb{CP}^2}$ uniója, ahol $k + l = t$ — ennyi topologikus redukció, tehát szingularitás van $\mathcal{M}^1_M$-ben. Mivel irányított kobordizmusra a szignatúra invariáns, azt kaptuk, hogy

$$sign(M) = k - l.$$

q_M negatív definit, ezért $|sign(M)| = dim\ \mathrm{H}^2(M; \mathbb{Z})$, így a fentiekből

$$dim\ \mathrm{H}^2(M; \mathbb{Z}) = |sign(M)| = |k - l| \leq k + l = t$$

adódik. A 6.2.1 lemma (a) pontja szerint természetesen $t \leq \mathrm{H}^2(M; \mathbb{Z})$, így a fenti egyenlőtlenség szerint $t = dim\ \mathrm{H}^2(M; \mathbb{Z})$ áll fenn. Ebből pedig 6.2.1 (b) pontja szerint a q_M metszetforma $\mathbb{Z}$ feletti diagonalizálhatósága következik. Evvel a tétel (vázlatos) bizonyítását befejeztük. □

7. fejezet

A Donaldson-invariáns definíciója

7.1 A 0-dimenziós invariáns definíciója

Mint azt már a 3. fejezetben láttuk, M-en egy generikus metrikát véve egy $P \to M$ principális SO(3)-nyalábon az ASD konnexiók egy $-2p_1(P) - 3(1+b_M^+)$ dimenziós sokaságot alkotnak (a reducibilis konnexiók elkerüléséhez $b_M^+ > 0$-t is fel kellett tennünk). Ha b_M^+ páratlan, akkor $-\frac{3}{2}(1+b_M^+)$ egész, így ez egy SO(3)-nyaláb első Pontrjagin-osztálya lehet, feltéve hogy létezik egy olyan $w_2 \in \mathrm{H}^2(M; Z_2)$ osztály, mely kielégíti a $w_2^2 \equiv -\frac{3}{2}(1+b_M^+)$ $(mod\ 4)$ kongruenciát.

Tegyük fel tehát, hogy M-re igaz a következő három feltétel

- (I) b_M^+ páratlan.
- (II) létezik olyan $0 \neq w \in \mathrm{H}^2(M; Z_2)$ elem, melyre $w^2 \equiv -\frac{3}{2}(1+b_M^+)$ $(mod\ 4)$. Jelölje $\mathcal{C}_M$ az ilyen elemek halmazát.
- (III) $b_M^+ > 1$.

Legyen $P_w \to M$ a $(p_1 = -\frac{3}{2}(1+b_M^+),\ w)$ $(w \in \mathcal{C}_M)$ pár által egyértelműen meghatározott principális SO(3)-nyaláb. Ekkor a fentiek szerint egy g generikus metrikára az $\mathcal{M}_{P_w}(g)$ modulustér 0-dimenziós lesz. A kompaktsági tételből (4.1.6) következik, hogy $\mathcal{M}_{P_w}(g)$ kompakt, így véges sok pontból áll.

7.1.1. állítás. *Rögzítsünk egy g metrikát M-en. Ekkor*

$$\mathcal{H}_+^2(M) = \{\omega \quad g-\text{harmonikus } 2-\text{forma} \mid \ *_g\, \omega = \omega\}$$

a $q_{\mathbb{R}}$ metszetformának egy maximális pozitív definit alterét adja. □

7.1.2. tétel. *Rögzítsünk egy g generikus metrikát és a $w \in \mathrm{H}^2(M; Z_2)$ egy $c \in \mathrm{H}^2(M; \mathbb{Z})$ egész-felemeltjét (tehát $c \equiv w$ $(mod\ 2)$). Ekkor a $\mathcal{H}_+^2(M)$ vektortér egy irányítása kijelöl az $\mathcal{M}_{P_w}(g)$ modulustéren egy irányítást.*

Bizonyítás (vázlat). A $\mathcal{B}^*$ tér felett definiálható egy $\mathcal{L} \to \mathcal{B}^*$ vonalnyaláb, melyet $\mathcal{M}_{P_w} \subset \mathcal{B}^*$-ra megszorítva $\Lambda^{max}(T\mathcal{M}_{P_w})$-et kapjuk meg. Tudjuk, hogy

a) $\mathcal{M}_{P_w}$ pontosan akkor irányítható, ha $\Lambda^{max}(T\mathcal{M}_{P_w})$ triviális,

b) $\Lambda^{max}(T\mathcal{M}_{P_w})$ trivializációi adják meg $\mathcal{M}_{P_w}$ irányításait. A tétel bizonyítása tehát két lépésből áll: belátható hogy $\mathcal{L} \to \mathcal{B}^*$ triviális; a tételben rögzített adatok pedig egy alkalmas $[A] \in \mathcal{B}^*$ pont feletti $\mathcal{L}_A$ fibrumnak jelölik ki egy irányítását. Mivel $\mathcal{B}^*$ összefüggő, ez már minden $\mathcal{B}^*$-beli pont felett egy irányítását jelöli ki $\mathcal{L} \to \mathcal{B}^*$ fibrumának, ami speciálisan $\mathcal{M}_{P_w}$ egy irányítását adja meg. □

7.1.3. megjegyzések.
- A fenti $\mathcal{L} \to \mathcal{B}^*$ nyaláb nem más, mint a $\delta_A = d_A^* \oplus d_A^+ \colon \Omega^1(M; adP) \to \Omega^0(M; adP) \oplus \Omega_+^2(M; adP)$ elliptikus operátorhoz rendelt determináns vonalnyaláb. Mivel a modulustér pontjairól feltettük, hogy $\mathrm{H}_A^0 = \mathrm{H}_A^+ = 0$ (hiszen generikus metrikát választottunk), így egy $[A] \in \mathcal{M}_{P_w}$ pont feletti

$\mathcal{L}_A = \Lambda^{max}(Ker\delta_A) \otimes \Lambda^{max}(coKer\delta_A)^*$ fibrum a $\Lambda^{max}(Ker\delta_A) = \Lambda^{max}\mathrm{H}^1_A$ térrel azonosítható. Azt azonban már korábban láttuk, hogy a H^1_A tér természetes módon azonosítható a $T_{[A]}\mathcal{M}_{P_w}$ érintőtérrel.

- Mivel az $\mathcal{M}_{P_w}$ modulustér nem feltétlenül összefüggő, a komponenseket egymástól függetlenül irányíthatnánk. A fenti recept azonban két irányítást kitüntet, $\Lambda^{max}(T\mathcal{M}_{P_w})$ azon trivializációit, melyek $\mathcal{L}$ egy trivializációjából származnak ($\mathcal{B}^*$ összefüggő volta miatt két ilyen trivializáció van).

- Ha $\mathcal{M}$ 0-dimenziós (vagyis $Ker\delta_A = \mathrm{H}^1_A = \{0\}$ minden $[A] \in \mathcal{M}_{P_w}$ elemre), a $\Lambda^0\mathrm{H}^1_A$ 1-dimenziós tér egy kitüntetett elemmel, az $\emptyset$-zal rendelkezik, hiszen

$$\Lambda^n\mathrm{H}^1_A = \{\lambda e_1 \wedge ... \wedge e_n \mid \lambda \in \mathbb{R},\ e_1, ..., e_n \in \mathrm{H}^1_A \text{ lineárisan függetlenek}\},$$

ami $n = 0$ és $\mathrm{H}^1_A = 0$ esetén

$$\Lambda^0\mathrm{H}^1_A = \{\lambda\emptyset \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

kifejezésre redukálódik. Attól függően, hogy az $\mathcal{L} \to \mathcal{B}^*$ nyaláb rögzített trivializációja az $[A] \in \mathcal{M}_{P_w}$ pontban pozitív vagy negatív számszorosát jelölte ki az $\emptyset \in \Lambda^0\mathrm{H}^1_A = \mathcal{L}_A$ elemnek, az $[A] \in \mathcal{M}_{P_w}$ ponthoz (+1)-et vagy (-1)-et rendelünk. Ebben a patologikus (tehát 0-dimenziós) esetben ezt értjük a modulustér irányításán.

7.1.4. definíció. Egy g generikus metrikára M-en és a $\mathcal{H}^2_+$ tér egy irányítására legyen $\bar{\gamma}_{M,g}(w) = \#\mathcal{M}_{P_w}(g)(=$ az $\mathcal{M}_{P_w}$ pontaihoz rendelt $\pm$ 1-ek összege). Legyen továbbá $\gamma_{M,g}(w) = |\bar{\gamma}_{M,g}(w)|$. (Ez utóbbi szám már nem függ a $\mathcal{H}^2_+$ irányításától.)

7.1.5. tétel. *Ha M teljesíti az (I)-(III) feltételeket, akkor a fent definiált $\gamma_{M,g}(w)$ szám nem függ a g metrika választásától, így M-nek egy sima invariánsát kaptuk.*

Bizonyítás (vázlat). Legyen g_0, g_1 két generikus metrika, tehát $\mathcal{M}(g_0)$ és $\mathcal{M}(g_1)$ 0-dimenziós sokaságok és $\mathrm{H}^+_A = 0$ minden $A \in \mathcal{M}(g_i)$-re. Mivel $b^+_M > 1$, g_0 és g_1 összeköthető egy g_t ($t \in [0,1]$) folytonos metrikacsaláddal úgy, hogy $\mathcal{M}(g_t)$ ne tartalmazzon reducibilis konnexiót. Tehát a $\mathcal{PM} = \{\{t\} \times [A] \mid t \in [0,1],\ [A] \in \mathcal{M}(g_t)\}$ paraméterezett modulustér egy irányított kobordizmust ad meg $\mathcal{M}(g_0)$ és $\mathcal{M}(g_1)$ között. Mivel $\gamma_{M,g}(w)$ az $\mathcal{M}(g)$ irányított kobordizmus-invariánsa, a tétel következik. $\square$

7.1.6. definíció. Legyen M olyan sokaság, mely teljesíti (I)-(III) feltételeket, és legyen $\mathcal{C}_M = \{w \in \mathrm{H}^2(M; Z_2) \mid 0 \neq w,\ w^2 \equiv -\frac{3}{2}(1 + b^+_M) \pmod 4\}$. A

$$\gamma_M(w) = \gamma_{M,g}(w) = |\#\mathcal{M}_{P_w}(g)|$$

formulával definiált $\gamma_M \colon \mathcal{C}_M \to \mathbb{Z}$ függvényt nevezzük az M sokaság 0-dimenziós *Donaldson-invariánsának.* (A definicióban szereplő g egy generikus metrika M-en, a fenti tétel értelmében γ_M értéke g választásától független.)

A fent kapott eredményeket összefoglalva adódik

7.1.7. tétel. (Donaldson) *A $\gamma_M \colon \mathcal{C}_M \to \mathbb{Z}$ függvény egy sima invariáns, vagyis minden $f \colon M \to M'$ irányítástartó diffeomorfizmusra*

$$\gamma_{M'}(w) = \gamma_M(f^*w) \quad (w \in \mathcal{C}_{M'}).$$

$\square$

A következő fejezetben a γ 0-dimenziós Donaldson-invariánst fogjuk egy alkalmas 4-sokaságra (a *K3*-felületre) kiszámítani. Mielőtt azonban ehhez hozzáfognánk, bemutatjuk az invariáns egy általánosítását.

7.2 Függelék

Eddig az M-en lévő modulusterek közül csak néhányat — a 0-dimenziósakat — használtuk, ezek alapján definiáltuk M egy sima invariánsát. Bár, ahogy azt a későbbiekben látni fogjuk, már így is érdekes eredményeket kapunk, kis többletmunkával további hasznos invariánsokat nyerhetünk. Megkülönböztetésül a most definiálandó függvényeket *Donaldson-polinomoknak* fogjuk nevezni, szemben a fent definiált Donaldson-invariánssal. A Donaldson-polinomokkal a 9. és a 10. fejezetben fogunk újra találkozni.

A 3. fejezet alapján tudjuk, hogy ha $b_M^+ > 0$ (amit ebben a fejezetben mindig felteszünk), akkor egy generikus metrikára és tetszőleges P SU(2)- vagy SO(3)-nyalábra $\mathcal{M}_{M,P}(g) \subset \mathcal{B}_M^*$ sima sokaság. Általában természetesen $\mathcal{M}_{M,P}(g)$ dimenziója nem 0, így ahhoz, hogy $\mathcal{M}_{M,P}(g)$ segítségével invariánst definiáljunk, először a μ-leképezéssel kell megismerkednünk.

Legyen a $\Psi \to \mathcal{A}^* \times M$ nyaláb a $P \to M$ principális nyaláb $pr_2: \mathcal{A}^* \times M \to M$ második komponensre való vetítés menti visszahúzottja. Mivel a $\mathcal{G}_P$ mérce-csoport Ψ-n és $\mathcal{A}^* \times M$-en is hat, faktorizálás után egy $\mathbb{P} \to \mathcal{B}^* \times M$ principális SO(3)-nyalábot kapunk.

7.2.1. megjegyzés. A $\mathbb{P} \to \mathcal{B}^* \times M$ nyaláb mindenképpen SO(3)-nyaláb lesz, még akkor is, ha az eredeti $P \to M$ nyaláb SU(2) volt. Ennek az az oka, hogy a $-1 \in \mathcal{G}_P$ elem $\mathcal{A}^*$-on triviálisan, P-n pedig nem-triviálisan hat.

A $\mu: \mathrm{H}_2(M;\mathbb{Q}) \to \mathrm{H}^2(\mathcal{B}^*;\mathbb{Q})$ homomorfizmust a következő módon definiáljuk:

7.2.2. definíció. Az $\alpha \in \mathrm{H}_2(M;\mathbb{Z})$ elemre legyen $\mu(\alpha) = -\frac{1}{4}p_1(\mathbb{P})/\alpha$, ahol / "parciális integrálást" (slant-szorzás) jelent.

7.2.3. megjegyzés. A slant-szorzás a következőt jelenti: a Künneth-formula szerint $p_1(\mathbb{P}) \in \mathrm{H}^4(\mathcal{B}^* \times M;\mathbb{Q}) \cong \mathrm{H}^0(\mathcal{B}^*;\mathbb{Q}) \otimes \mathrm{H}^4(M;\mathbb{Q}) \oplus \mathrm{H}^2(\mathcal{B}^*;\mathbb{Q}) \otimes \mathrm{H}^2(M;\mathbb{Q}) \oplus \mathrm{H}^4(\mathcal{B}^*;\mathbb{Q}) \otimes \mathrm{H}^0(M;\mathbb{Q})$. Vegyük $p_1(\mathbb{P})$ második ($\mathrm{H}^2(\mathcal{B}^*) \otimes \mathrm{H}^2(M)$-be eső) komponensét, és annak második részét "integráljuk ki" α-n. Ezáltal egy $\mathrm{H}^2(\mathcal{B}^*;\mathbb{Q})$-beli elemet kapunk, amit $\mu(\alpha)$-val jelölünk. A továbbiakban μ-t csak $\mathrm{H}_2(M;\mathbb{Z})$-beli (tehát egész) elemekre fogjuk alkalmazni.

A μ-leképezés hasznos voltát támasztja alá a következő tétel:

7.2.4. tétel. *Legyen* $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ $\mathrm{H}_2(M;\mathbb{Z})$*-nek egy bázisa. Ekkor*

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{B}^*;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\mu(\alpha_1), ..., \mu(\alpha_k), \nu] \quad (\nu \in \mathrm{H}^4(\mathcal{B}^*;\mathbb{Q})).$$

□

Tegyük fel, hogy b_M^+ páratlan. A dimenzióformula szerint ekkor $\mathcal{M}_{M,P}(g)$ páros dimenziós lesz minden P SO(3)- vagy SU(2)-nyalábra. Legyen tehát $dim\ \mathcal{M}_{M,P}(g) = 2d$.

7.2.5. definíció. Legyen $P \to M$ principális SU(2)- (vagy SO(3)-)nyaláb, $k = c_2(P)[M]$ ($= -\frac{1}{4}p_1(P)[M]$ az SO(3)-esetben). Rögzítsünk egy g generikus metrikát, a d-edik szimmetrikus hatványt pedig jelöljük S^d-vel. A

$$\gamma_k(M): S^d(\mathrm{H}_2(M;\mathbb{Z})) \to \mathbb{Z}$$

Donaldson-polinomot a következő integrállal definiáljuk:

$$\gamma_k(M)(\alpha_1, ..., \alpha_d) = \int_{\mathcal{M}_{M,P}(g)} \mu(\alpha_1) \cup ... \cup \mu(\alpha_d).$$

(ahol $\alpha_i \in \mathrm{H}_2(M;\mathbb{Z})$).

A fenti definíció sajnos nem teljesen korrekt, hiszen $\mathcal{M}_{M,P}(g)$ nem feltétlenül kompakt, így az integráloknak nem mindig van értelmük. Ez a probléma a következő módon oldható fel: Legyenek $\mathcal{L}_{\alpha_i} \to \mathcal{B}^*$ olyan komplex vonalnyalábok, melyekre $c_1(\mathcal{L}_{\alpha_i}) = \mu(\alpha_i)$. Az $\mathcal{L}_{\alpha_i}$ nyalábok általános helyzetű $s_{\alpha_i}: \mathcal{B}^* \to \mathcal{L}_{\alpha_i}$ szeléseit választva a $V_{\alpha_i} = s_{\alpha_i}^{-1}(0)$ kettő-kodimenziós részsokaságok egymást és a modulusteret transzverzálisan fogják metszeni.

($\alpha_i = \alpha_j$ esetén természetesen s_{α_i} és s_{α_j} különböző szelések lesznek, így metszhetik egymást a megfelelő V_{α_i} és V_{α_j} sokaságok transzverzálisan.) Ha k elég nagy ($k \geq \frac{1}{4}(3b_M^+ + 5)$), belátható, hogy az

$$\mathcal{M}_{M,P}(g) \cap V_{\alpha_1} \cap ... \cap V_{\alpha_d}$$

halmaz véges sok pontból áll, valamint hogy ez a véges szám (előjelesen számolva) nem függ a fenti választásoktól. Tehát

7.2.6. tétel. (Donaldson, [D1]) *Egy g generikus metrikára és az $\mathcal{L}_{\alpha_i} \to \mathcal{B}^*$ nyalábok általános helyzetű szeléseire $k \geq \frac{1}{4}(3b_M^+ + 5)$ esetén az $\mathcal{M}_{M,P}(g) \cap V_{\alpha_1} \cap ... \cap V_{\alpha_d}$ halmaz véges sok pontból áll. $\mathcal{M}_{M,P}(g)$ irányítása (lásd a 7.1.2 tételt) ezeket a pontokat előjellel látja el, és ezen előjelek összege ($\#(\mathcal{M}_{M,P}(g) \cap V_{\alpha_1} \cap ... V_{\alpha_d})$) nem függ sem a metrika sem az s_α szelések választásától. A*

$$\gamma_k(M)(\alpha_1, ..., \alpha_d) = \#\mathcal{M}_{M,P}(g) \cap V_{\alpha_1} \cap ... \cap V_{\alpha_d}$$

definícióval értelmezett függvény M sima invariánsa, vagyis egy $f\colon M \to M'$ irányítástartó diffeomorfizmusra

$$\gamma_k(M)(\alpha_1, ..., \alpha_d) = \gamma_k(M')(f_*(\alpha_1), ..., f_*(\alpha_d)).$$

□

V_α egy geometriai reprezentációját kaphatjuk meg a következő módon: Legyen $\alpha \in \mathrm{H}_2(M;\mathbb{Z})$-re $\Sigma \subset M$ olyan beágyazott zárt 2-dimenziós felület, mely az α homológia-osztályt reprezentálja. Rögzítsünk ezen a Σ-n egy spin struktúrát. Ekkor általános helyzetű Σ-ra, ha $\partial\!\!\!/_{A|_\Sigma}$ a Σ-n lévő, az A konnexióval megcsavart Dirac operátort jelöli, akkor

$$V_\Sigma = \{[A] \in \mathcal{M}M, P(g) \mid Ker\partial\!\!\!/_{A|_\Sigma} \neq 0\}$$

halmaz az $\mathcal{L}_\alpha$ nyaláb egy általános helyzetű szelésének zéróhalmaza, vagyis V_Σ választható V_α-nak. Általános helyzetű Σ_i-k esetén az $\mathcal{M}_{M,P}(g) \cap V_{\Sigma_1} \cap ... \cap V_{\Sigma_d}$ tér rendelkezni fog a tételben felsorolt tulajdonságokkal, így segítségével $\gamma_k(M)$ definiálható. Ennek a leírásnak megvan az az előnye, hogy $[A] \in \mathcal{M}_{M,P}(g)$-ről pusztán Σ-ra való megszorítása alapján eldönthető, hogy eleme-e V_Σ-nak vagy sem.

8. fejezet

Számolások

8.1 Metszetformák realizálása

Ebben a fejezetben explicit számolásokat fogunk elvégezni, a jegyzet korábbi részeiben definiált néhány invariánst, illetve a most definiált Donaldson-invariánst fogjuk alkalmas sokaságokra kiszámolni. Az egyszerűbb algebrai topológiai állítások bizonyítását (esetleg ötleteket adva) az olvasóra hagyjuk.

8.1.1. állítás. *A $k\langle 1\rangle \oplus l\langle -1\rangle$ ($k, l \geq 0$) formával ekvivalens metszetformák sima sokasággal realizálhatók.*

(Ezek a formák lefedik a szóbajövő definit valamint az összes páratlan indefinit formákat.) A fenti állítás belátásához két lemmára van szükségünk:

8.1.2. lemma. *A $\mathbb{CP}^2$ komplex projektív sík metszetformája $\langle 1\rangle$. $\overline{\mathbb{CP}^2}$ ($\mathbb{CP}^2$ a fordított irányítással) metszetformája pedig $\langle -1\rangle$.*

(*Ötlet*: Ismert, hogy $\mathrm{H}^*(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]/(x^3)$. $\mathbb{CP}^2$ komplex struktúrája kanonikus irányítást ad a sima 4-sokaságnak; ennek az irányításnak a megfordításával kapjuk $\overline{\mathbb{CP}^2}$-at.)

8.1.3. lemma. *Tegyük fel hogy X, Y 4-sokaságok metszetformája egy alkalmas bázisban felírva az A_X és A_Y mátrixokkal reprezentálható. Ekkor $\mathrm{H}^2(X\#Y;\mathbb{Z}) = \mathrm{H}^2(X;\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{H}^2(Y;\mathbb{Z})$ és a két bázis uniójából keletkező bázisban $X\#Y$ metszetformáját az*

$$\begin{pmatrix} A_X & 0 \\ 0 & A_Y \end{pmatrix}$$

mátrix reprezentálja. □

A fenti két lemmából a 8.1.1 állítás bizonyítása könnyen következik, hiszen

8.1.4. állítás. *A $k\mathbb{CP}^2\#l\overline{\mathbb{CP}^2}$ sokaság metszetformája a $k\langle 1\rangle \oplus l\langle -1\rangle$ formával ekvivalens. (kX ismételt összefüggő unió vételét jelenti.)* □

A következőkben néhány páros metszetforma realizálhatóságának kérdésével foglalkozunk.

8.1.5. állítás. *$S^2 \times S^2$ metszetformája $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

(*Ötlet:* $S^2 \times \{\mathrm{pt.}\}$ és $\{\mathrm{pt.}\} \times S^2$ egy bázisa $\mathrm{H}^2(S^2 \times S^2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$-nek.)

8.2 A *K3*-felület

A következő számolás kicsit hosszadalmasabb lesz, ismét egy spin (tehát páros metszetformájú) 4-sokaság metszetformáját fogjuk kiszámolni.

8.2.1. definíció. Egy sima 4-sokaságot *K3-felületnek* nevezünk, ha diffeomorf az $X = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{CP}^3 \mid \sum_{i=0}^{3} z_i^4 = 0\} \subset \mathbb{CP}^3$ algebrai felülettel.

8.2.2. megjegyzés. Az elnevezés algebrai geometriai eredetű. Egy S egyszeresen összefüggő kompakt komplex felület $K3$-felület, ha $c_1(S)$ első Chern-osztálya eltűnik. Minden $K3$-felület diffeomorf a fenti $X \subset \mathbb{CP}^3$ sokasággal [BPV]. Így a sima sokaságok elméletében — némileg félrevezető módon — a fenti X-et hívjuk *a* $K3$-felületnek.

A következő számolásban karakterisztikus osztályok néhány jólismert tulajdonságát fogjuk használni; ezek [MS]-ben mind megtalálhatók. Először a fent definiált X sokaság metszetformáját fogjuk meghatározni.

8.2.3. tétel. *X metszetformája $2(-E_8) \oplus 3H$.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz elegendő lesz a $c_1(X) = c_1(TX)$ és $c_2(X) = c_2(TX)$ Chern-osztályokat kiszámolni, ugyanis ezek ismeretében a $b_2(X)$ Betti-szám és a $sign(X)$ szignatúra könnyen meghatározható. Esetünkben $b_2(X) > sign(X)$ fog teljesülni, vagyis a metszetforma indefinit lesz. Így a klasszifikációs tétel ismeretében már csak a paritást kell meghatároznunk, ami $c_1(X)$ (és így $w_2(X)$) ismeretében könnyű feladat. Mielőtt rátérnénk a Chern-osztályok kiszámolására, vegyük észre, hogy Lefschetz hipersíkmetszet-tételéből (lásd [M1]) következik, hogy X egyszeresen összefüggő, vagyis $\pi_1(X) = 1$.

A számolás során a következő, [MS]-ben megtalálható állításokat fogjuk felhasználni:

8.2.4. lemma. (1) *Az $L = \{(l, v) \in \mathbb{CP}^3 \times \mathbb{C}^4 \mid v \in l\} \to \mathbb{CP}^3$ tautologikus vonalnyalábra $c_1(L^*) = x \in \mathrm{H}^2(\mathbb{CP}^3; \mathbb{Z})$ a kohomológia-gyűrű generátora.*

(2) *$T\mathbb{CP}^3 \oplus \eta \cong L^* \oplus L^* \oplus L^* \oplus L^*$, ahol η a $\mathbb{CP}^3$ feletti triviális (komplex) vonalnyalábot jelöli.*

(3) *Az E, F komplex nyalábokra $c(E \oplus F) = c(E) \cup c(F)$. (Itt $c(E)$ jelöli a teljes Chern-osztályt, vagyis $c(E) = c_0(E) + c_1(E) + \ldots$)*

(4) *Végül pedig $c(\eta) = 1$.* □

(2), (3) és (4) miatt $c(T\mathbb{CP}^3) = c_0(T\mathbb{CP}^3) + c_1(T\mathbb{CP}^3) + \ldots = (1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3$, tehát $c_1(T\mathbb{CP}^3) = 4x$ és $c_2(T\mathbb{CP}^3) = 6x^2$ teljesül. Az $i\colon X \to \mathbb{CP}^3$ beágyazásra fennáll az $i^*T\mathbb{CP}^3 = TX \oplus \nu X$ egyenlőség — νX az $X \subset \mathbb{CP}^3$ részsokaság normálnyalábja —. A fentiek miatt így $c(i^*T\mathbb{CP}^3) = c(TX) \cdot c(\nu X) = i^*(1+x)^4$ — a formulában $\cdot$ jelzi a csészeszorzást. A továbbiakban jelölje g az i^*x elemet, tehát $c(TX) \cdot c(\nu X) = 1 + 4g + 6g^2 \in \mathrm{H}^*(X; \mathbb{Z})$. Mivel X-et egy homogén negyedrendű polinom definiálja — amit függvényként nem tudunk ugyan $\mathbb{CP}^3$-on definiálni, de mint $L^{\otimes 4}$ szelését igen —, $\nu X \cong i^*(L^{\otimes 4})$. Így $c(\nu X) = c(i^*L^{\otimes 4}) = i^*(1 + 4x) = 1 + 4g$, tehát $c(TX) = (1 + 4g + 6g^2) \cdot (1 + 4g)^{-1}$. Könnyű számolás mutatja, hogy $(1 + 4g)(1 - 4g + 16g^2) = 1$ (persze $\mathrm{H}^*(X; \mathbb{Z})$-ben), vagyis

$$c(TX) = (1 + 4g + 6g^2) \cdot (1 - 4g + 16g^2) = 1 + 6g^2.$$

Megkaptuk tehát, hogy $c_1(X) = 0$ és $c_2(X) = 6g^2$. Mivel $c_1(X) \equiv w_2(X) \pmod 2$, azt kaptuk, hogy $w_2(X) = 0$, vagyis az X sokaság spin, így metszetformája páros. Hátravan azonban még $b_2(X)$ és $sign(X)$ kiszámolása.

X egyszeresen összefüggő, így $\chi(X)$ Euler-karakterisztikájára $\chi(X) = b_0(X) + b_2(X) + b_4(X) = 2 + b_2(X)$ teljesül. Tudjuk, hogy $\chi(X) = \langle e(X), [X] \rangle$, ahol $e(X) \in \mathrm{H}^4(X; \mathbb{Z})$ az X Euler-osztálya, ami komplex felületekre megegyezik $c_2(X)$-szel. Tehát $\chi(X) = \langle c_2(X), [X] \rangle = 6\langle g^2, [X] \rangle$. Így még $\langle g^2, [X] \rangle$ értékét kell meghatároznunk. Definíció szerint $g^2 = i^*x^2$, és $\mathbb{CP}^3$ homológiájából látható, hogy $x^2 \in \mathrm{H}^4(\mathbb{CP}^3; \mathbb{Z})$ Poincaré-duálisát a kanonikusan beágyazott $\mathbb{CP}^1$ reprezentálja. Így $\langle g^2, [X] \rangle = \langle i^*x^2, [X] \rangle = PD(x^2) \cap i_*[X] = \#(\mathbb{CP}^1 \cap X)$. Mivel X negyedrendű felület, ez a metszet 4 pontból áll (mindegyik azonos előjellel), vagyis $\langle g^2, [X] \rangle = 4$. Ebből $\chi(X) = 24$, vagyis $b_X^2 = 22$ adódik.

A szignatúra kiszámolásához a következő tételt kell használnunk:

8.2.5. tétel. (Hirzebruch szignatúratétele 4-sokaságokra) *Egy kompakt irányított 4-dimenziós sokaság szignatúrájára $sign(M) = \frac{1}{3}\langle p_1(TM), [M] \rangle$.* □

(Korábban már idéztük ezt a tételt 8-dimenziós sokaságokra, [MS]-ben megtalálható a bizonyítás minden $4k$-dimenziós sokaságra is.) Mivel $p_1(X) = c_1^2(X) - 2c_2(X)$, így a tételt alkalmazva $sign(X) = \frac{1}{3}\langle -2c_2(X), [X]\rangle = -4\langle g^2, [X]\rangle = -16$ adódik. A metszetformák (korábban idézett) klasszifikációja alapján tehát X metszetformája $2(-E_8) \oplus 3H$, amivel a 8.2.3 tétel bizonyítását befejeztük. □

8.2.6. következmény. *A $2n(-E_8) \oplus (3n+l)H$ alakú metszetformák ($l \geq 0$) sima sokasággal realizálhatók.*

Bizonyítás. A 8.1.4 lemmát alkalmazva, $nX\#l(S^2 \times S^2)$ metszetformája éppen a kívánt alakú. □

8.2.7. megjegyzés. Mint ahogy azt már korábban említettük, a páros indefinit metszetformák sima sokaságokkal való realizálhatóságának kérdése még nem teljesen lezárt. Donaldson két eredménye (1.3.7 tétel) szerint $2n(-E_8)\oplus H$ és $2n(-E_8) \oplus 2H$ ($n > 0$) nem realizálható sima sokasággal; a további páros metszetformákról (tehát a $2n(-E_8) \oplus kH$, $1 < k < 3n$ mátrixokkal ekvivalensekről) azonban semmi sem tudható. Kirby nevezetes, úgynevezett $\frac{11}{8}$-sejtése alapján valószínűleg a következő igaz:

8.2.8. sejtés. *Ha a $2n(-E_8)\oplus kH$ forma előáll egy sima, egyszeresen összefüggő 4-sokaság metszetformájaként, akkor $k \geq 3n$.*

A továbbiakban az X *K3*-felületre fogjuk a 0-dimenziós Donaldson-invariánst kiszámolni. Ehhez azonban szükségünk van X egy másik előállítására. Legyen $L = \mathbb{Z}^4 < \mathbb{C}^2$ rács, $T^4 = \mathbb{C}^2/L$ pedig a négydimenziós tórusz, ami tehát egy komplex sokaság. Az $i: \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^2$ $(z_1, z_2) \mapsto (-z_1, -z_2)$ involúció egy (nem szabad) Z_2-hatást definiál T^4-en; legyen $\hat{X} = T^4/Z_2$. Mivel e Z_2-hatás nem szabad — könnyen látható, hogy 16 fixponja van — a kapott tér az $F = \{x_1, ..., x_{16}\}$ pontokban nem lesz sokaság (ezek az x_i-k éppen a T^4-en adott Z_2-hatás fixpontjainak képei). Könnyen látható, hogy egy $x_i \in F$ pont környezete egy $\mathbb{RP}^3$ feletti kúppal homeomorf. Elhagyva tehát a 16 F-beli pont egy kis környezetét, egy $\bar{X}$ peremes sokaságot kapunk, a perem $\mathbb{RP}^3$ 16 kópiája lesz. $\bar{X}$-ból könnyen kaphatunk zárt 4-sokaságot; minden egyes határoló $\mathbb{RP}^3$ mentén odaragasztunk $\bar{X}$-hoz egy $\mathbb{RP}^3$ határú W 4-sokaságot. Ezen W gyanánt válasszuk a $DS^2 = \{v \in T^*S^2 \mid ||v|| \leq 1\}$ teret. Az így kapott $X_1 = \bar{X} \cup_{16\mathbb{RP}^3} 16W$ sokaság diffeomorf lesz a korábban definiált X *K3*-felülettel.

8.2.9. megjegyzés. Bár X_1-et differenciáltopológiai eszközökkel definiáltuk (a szinguláris F-beli pontokat $\mathbb{RP}^3$-menti ragasztással tüntettük el), megtehettük volna ezt a komplex kategóriában is. Fújjuk fel T^4 azon pontjait, melyek a fenti Z_2-hatásra nézve fixek (topologikusan így $T^4\#16\overline{\mathbb{CP}^2}$-at kapunk). Terjesszük ki erre a felfújtra a Z_2-hatást, $\overline{\mathbb{CP}^2}$-on a következő definicióval: $[a:b:c] \mapsto [-a:b:c]$, az összefüggő uniót pedig képezzük az $[1:0:0]$ pontban. Így Z_2 ugyan nem fog szabadon hatni $T^4\#16\overline{\mathbb{CP}^2}$-on ($\{[0:x:1] \mid x \in \mathbb{C}\} \cup [0:0:1]$ minden $\overline{\mathbb{CP}^2}$-ban fixen marad), a faktor mégis egy X_1-gyel diffeomorf sokaság lesz. Ennek a komplex geometriai előállításnak a segítségével látható be, hogy X_1 diffeomorf az előbbi *K3*-felülettel. A 8.2.2 megjegyzés értelmében csak azt kell leellenőrizni, hogy $\pi_1(X_1) = 1$ (ezt a továbbiakban részletezzük), illetve hogy $c_1(X_1) = 0$, ami következik egy sehol el nem tűnő holomorf 2-forma létezéséből. Annak belátását, hogy a $\mathbb{C}^2$-n lévő $dz_1 \wedge dz_2$ holomorf 2-forma X_1 konstrukciója során egy $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 X_1)$ nem-eltűnő holomorf formát ad, az olvasóra bízzuk.

Belátjuk még tehát, hogy X_1 egyszeresen összefüggő. Minthogy $W = DS^2$ az S^2 gömbbel homotopikusan ekvivalens, $\bar{X}$ fundamentális csoportjának és a határ-$\mathbb{RP}^3$-akban levő nem-triviális homotópia-elemeknek az ismeretében $\pi_1(X_1)$ Van Kampen tételével könnyen megkapható. Könnyen látható, hogy $\pi_1(T^4) = \pi_1(T^4 \setminus \{x_1, ..., x_{16}\}) = \mathbb{Z}^4$. A $T^4 \setminus \{x_1, ..., x_{16}\}$ sokaság kétszeres fedése az $\bar{X}$ sokaságnak, így a

$$0 \to \mathbb{Z}^4 \to \pi_1(\bar{X}) \to Z_2 \to 0$$

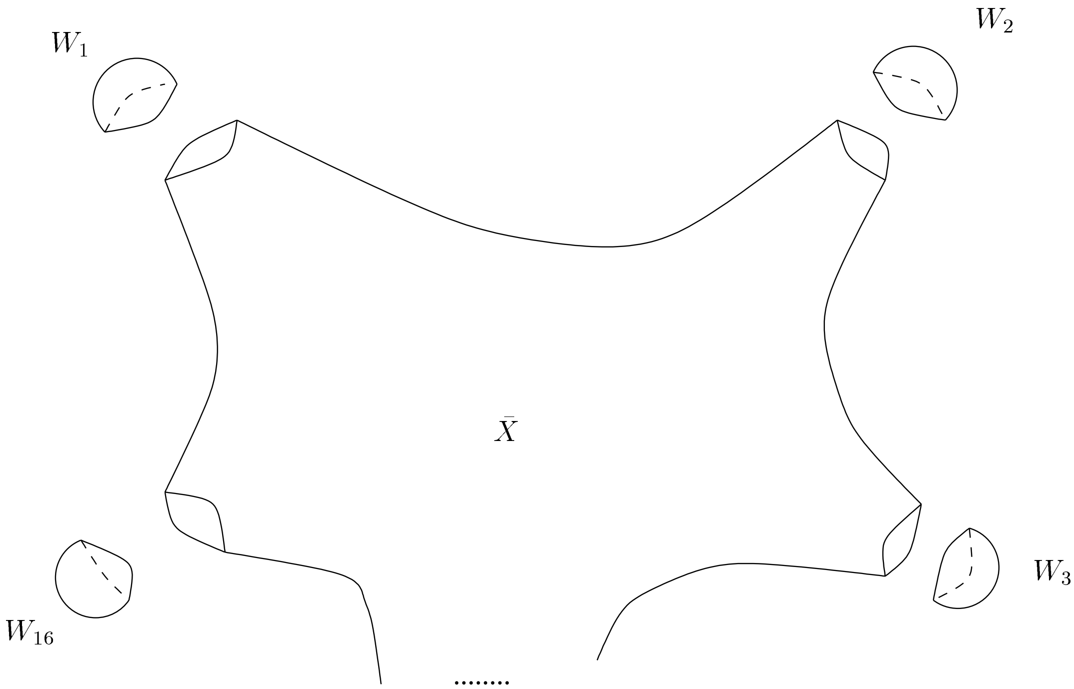
sorozat egzakt. Ha y_i ($i = 1, ..., 4$) jelöli a $\mathbb{Z}^4$ generátorait, σ pedig Z_2-ét, akkor

$$\pi_1(\bar{X}) = \langle y_1, y_2, y_3, y_4, \sigma \mid [y_i, y_j] = 1,\ \sigma^2 = 1,\ \sigma y_i \sigma = y_i^{-1}\ (i = 1, ..., 4)\rangle.$$

A következő tizenhat homotópiaelem a 16 határoló $\mathbb{RP}^3$ (Z_2-vel izomorf) fundamentális csoportjait generálja:

$$\sigma,\ \sigma y_i\ (i = 1, ..., 4),\ \sigma y_i y_j\ (i \neq j),\ \sigma y_i y_j y_k\ (i \neq j \neq k),\ \sigma y_1 y_2 y_3 y_4.$$

Ezek az elemek tehát X_1-ben triviálisak, így az első öt relációból (Van Kampen tétele szerint) következik, hogy $\pi_1(X_1) = 1$.



8.1 ábra: *K3* felbontása mint $\bar{X} \cup 16W$

8.3 A Donaldson-invariáns kiszámolása

A *K3*-felületnek tehát két C^∞ modelljét is legyártottuk. Az elsőt a metszetforma meghatározásánál tudtuk jól használni, a másodikra a Donaldson-invariáns kiszámolása tűnik aránylag egyszerűnek. A továbbiakban mindkét modellt X-szel fogjuk jelölni. A fejezet hátralevő részében P. Kronheimer egy cikkét [Kr] fogjuk követni.

Mivel $b_2(X) = 22$ és $b_X^+ = 3$, a Donaldson-invariáns definíciójában szereplő p_1 értéke $p_1 = -\frac{3}{2}(1 + b_X^+) = -6$. Vagyis a γ_X Donaldson-invariáns a $\mathcal{C}_X = \{w \in \mathrm{H}^2(X; Z_2) \; |w^2 \equiv -6 \equiv 2 \; (mod \; 4)\}$ halmazon van értelmezve ($\mathcal{C}_X$ esetünkben nem üres, hiszen van olyan $\mathrm{H}^2(X; \mathbb{Z})$-beli elem, melynek négyzete 2).

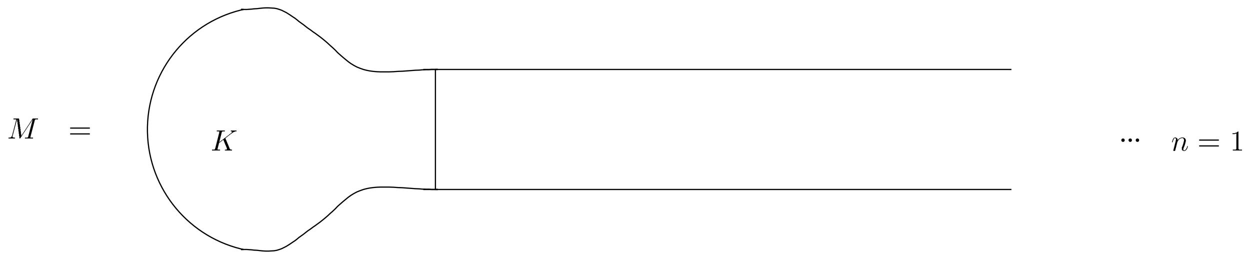
8.3.1. tétel. *Az X* K3*-felületre a $\gamma_X : \mathcal{C}_X \to \mathbb{Z}$ függvény azonosan 1.*

A bizonyításhoz fel kell használjuk Matsumoto egy tételét (melynek bizonyítása a *K3*-felület topológiájának ismeretében nem túlságosan nehéz, lásd [FM1]):

8.3.2. tétel. ([Ma]) *Az X* K3*-felületre a $Diff^+(X)$ irányítástartó diffeomorfizmusok csoportja tranzitívan hat a $\mathcal{C}_X$ halmazon.* □

Mivel pedig γ_X diffeomorfizmus-invariáns, a fenti tétel szerint konstans. A továbbiakban ennek a konstansnak az értékét szeretnénk meghatározni. Egy alkalmas $w \in \mathcal{C}_X$-re kell tehát az $\mathcal{M}_{X,P}(g)$ halmaz elemeinek algebrai összegét megadnunk (g generikus metrika, P pedig olyan principális SO(3)-nyaláb, melyre $p_1(P) = -6$ és $w_2(P) = w$). $\mathcal{M}_{X,P}(g)$ elemei egy X feletti differenciálegyenlet (az $F_A^+ = 0$ ASD-egyenlet) megoldásai. Tudjuk, hogy $X = \bar{X} \#_2 16W$; próbáljuk meg az egyenletet $\bar{X}$ és W fölött megoldani, majd a ragasztási konstrukció segítségével a kapott megoldásokat egy X feletti megoldássá összeragasztani. $\bar{X}$ és W azonban peremes négysokaságok. Távolítsuk el a határoló $\mathbb{RP}^3$-akat, az így kapott sima nem-kompakt sokaságokat jelöljük továbbra is $\bar{X}$-szel és W-vel. Az eddigiek során az alap 4-sokaság kompaktsága fontos szerepet játszott, úgyhogy mielőtt megvalósítanánk fenti tervünket, röviden át kell tekintenünk az elméletet nem-kompakt sokaságokra is (lásd [MMR] illetve 5.2 fejezet).

Legyen (M, g) nem-kompakt 4-dimenziós Riemann-sokaság, g pedig olyan teljes metrika M-en, melyre M izometrikus egy $K \cup n(\mathbb{RP}^3 \times \mathbb{R}^+)$ sokasággal, ahol K egy kompakt peremes 4-sokaság. A metrika $\mathbb{RP}^3 \times \mathbb{R}^+$-on



8.2 ábra: Cilindrikus metrika egy $\mathbb{RP}^3$ végű sokaságon

a direkt-szorzat metrika. Az ilyen (M, g) sokaságot *cilindrikus végű sokaságnak* nevezzük, n darab $\mathbb{RP}^3$ véggel. Ilyen sokaság például $\bar{X}$ és W, ha a megfelelő metrikával látjuk el őket — amit a továbbiakban felteszünk. Mivel M nyílt, így $\mathrm{H}^4(M; \mathbb{Z}) = 0$, tehát egy $E \to M$ SO(3)-nyalábot már egyedül a $w_2(E) \in \mathrm{H}^2(M; Z_2)$ második Stiefel-Whitney osztály meghatároz. Nyílt sokaságokon definiált konnexiókról szól a következő, alapvető fontosságú eredmény:

8.3.3. tétel. ([MMR]) *Legyen A egy ASD konnexió a fenti (M, g) nyílt Riemann-sokaságon, és tegyük fel, hogy $\int_M |F_A|^2 < \infty$ (az ilyen konnexiót véges energiájúnak mondjuk). Jelölje A_t az A megszorítását az $\mathbb{RP}^3 \times \{t\} \subset M$ 3-sokaságra. Ekkor az $\{A_t\}$ görbe az $E|_{\mathbb{RP}^3} \to \mathbb{RP}^3$ nyalábon definiált konnexiók terében egy lapos konnexióhoz tart, midőn $t \to \infty$ (vagyis $\mathbb{RP}^3 \times \{t\}$ az M egyik "végéhez" tart).* □

Tekintsük át tehát először az $\mathbb{RP}^3$ feletti nyalábokat illetve az ezeken a nyalábokon létező lapos (0 görbületű) konnexiókat. Mivel $\mathrm{H}^2(\mathbb{RP}^3; Z_2) = Z_2$, $\mathbb{RP}^3$ felett két SO(3)-nyaláb van, a triviális, illetve az a $P \to \mathbb{RP}^3$ nyaláb, melynek második Stiefel-Whitney osztálya nem-nulla. Azt is tudjuk, hogy egy nyalábon a lapos konnexiók egy-egy értelmű megfeleltetésben állnak a bázistér fundamentális csoportjának azon reprezentációival, melyek az adott nyalábot definiálják (lásd 2. fejezet). Esetünkben $Hom(\pi_1(\mathbb{RP}^3); \mathrm{SO}(3))$ igen egyszerűen leírható tér: a triviális reprezentáció felel meg a triviális nyalábon lévő egyetlen (triviális) lapos konnexiónak, a további — a nem-triviális homotópiaelemet egy 180 fokos forgatásnak megfeleltető — reprezentációk $\mathbb{RP}^2$ tere pedig a fenti (egyetlen nem-triviális) P nyalábon lévő lapos konnexiókat adja meg. Ezek a forgatások azonban nyaláb-automorfizmus (mérce-transzformáció) erejéig ugyanazt a lapos konnexiót adják, így a lapos konnexiók ekvivalencia-osztályainak tere (lásd 2. fejezet)

$$\chi(\mathbb{RP}^3) = \{\theta, \alpha\},$$

ahol tehát θ a triviális, α pedig a P-n levő csavart lapos konnexió. Vagyis a nyaláb w_2 második Stiefel-Whitney osztálya egyértelműen meghatározza, hogy a nyalábon melyik lapos konnexió létezik.

Tehát ha A egy véges energiájú ASD konnexió az $E \to (M, g)$ nyalábon, már $w_2(E) \in \mathrm{H}^2(M; Z_2)$ meghatározza hogy A egy $\mathbb{RP}^3 \times \mathbb{R}^+$ végen melyik lapos konnexióhoz tart. Ha w_2 eltűnik a szóbanforgó végen, akkor a triviálishoz, ha $w_2 \neq 0$ a szóbanforgó végen, a nem-triviálishoz fog tartani a tétel szerint konvergens $\{A_t\}$ görbe.

Legyen $\mathcal{M}_M^p(E)$ azon (az $E \to M$ nyalábon definiált) g-ASD konnexiók modulustere, melyekre

$$\int_M |F_A|^2 = p;$$

$\mathcal{M}_M^p(E)$ tehát a p-energiájú ASD konnexiók tere. Legyen τ azoknak a végeknek a száma, melyeken $w_2(E) \neq 0$ (ezek a "csavart végek").

8.3.4. tétel. *A dimenzió formula szerint* $\dim \mathcal{M}_M^p(E) = -2p + \tau - 3(1 + b_M^+)$. □

8.3.5. megjegyzés. Vegyük észre, hogy míg zárt sokaságokra a nyaláb már meghatározta $\int_M |F_A|^2$ értékét (a Chern-Weil elmélet szerint ez az integrál az első Pontrjagin-osztály $-2\pi^2$-szerese), nyílt sokaságokra ez nincs így.

Egy nyílt sokaság feletti nyalábon a modulustérnek több, különböző dimenziós komponense lehet, az energia (Chern-Weil integrál) alkalmas rögzítése jelöl ki ezen komponensek közül néhányat. A 8.3.4 tétel bizonyítása az Atiyah-Singer indextétel egy nyílt sokaságokra kimondott formájának alkalmazásával történik.

Vegyük részletesen szemügyre az $M = W$ esetet! (Emlékeztetőül: $W = \{v \in T^*S^2 \mid ||v|| < 1\}$.) Mivel W és S^2 homotóp ekvivalensek, $\mathrm{H}^2(W; Z_2) = Z_2$, így két SO(3)-nyaláb van W felett, az egyik a triviális ($E_0 \to W$), a másik konstrukciója a következő módon történik: Vegyük $\overline{\mathbb{CP}^2}$-on a már korábban definiált $[a : b : c] \mapsto [-a : b : c]$ Z_2-hatást. Ennek egy természetes felemeltje létezik az $L = \{(e, l) \in \mathbb{C}^3 \times \overline{\mathbb{CP}^2} \mid e \in l\}$ tautologikus nyalábra (mint $(a, b, c) \mapsto (-a, b, c)$). Evvel a Z_2-hatással lefaktorizálva az

$$L|_{\overline{\mathbb{CP}^2} \setminus [1:0:0]} \to \overline{\mathbb{CP}^2} \setminus [1 : 0 : 0]$$

nyalábot egy (nem-triviális) L_1 komplex vonalnyalábot kapunk meg W felett, hiszen $W = (\overline{\mathbb{CP}^2} \setminus [1 : 0 : 0])/Z_2$. (A fenti Z_2-hatásnak ugyan vannak fixpontjai, az $[1 : 0 : 0]$ pont kivételével azonban a fixpontok feletti fibrumon Z_2 triviálisan hat. $[1 : 0 : 0]$ -t ki kellett hagyni, e felett a pont felett a faktor nem lett volna vektornyaláb.) A továbbiakban E_1 fogja jelölni az $L_1 \oplus \underline{\mathbb{R}} \to W$ nem-triviális SO(3)-nyalábot.

8.3.6. állítás. (a) *$E_0 \to W$-n egyetlen lapos konnexió létezik.*

(b) *Mérce-ekvivalencia erejéig egyetlen olyan véges energiájú ASD konnexió létezik E_1-en, melynek energiája $\frac{1}{2}$. Ez a konnexió reducibilis.*

(c) *E_1-en minden konnexió energiája legalább $\frac{1}{2}$.*

Bizonyítás. Már korábban láttuk, hogy (a) igaz, hiszen $\pi_1(W)=1$. (b) bizonyításához konstruálni fogunk egy A_1 konnexiót E_1-en, majd erről belátjuk, hogy mérce-ekvivalencia erejéig ez az egyetlen $\frac{1}{2}$ energiájú ASD konnexió, továbbá hogy reducibilis is. A konstrukció a következőképpen megy: Az $L \to \overline{\mathbb{CP}^2}$ nyaláb $c_1(L) \in \mathrm{H}^2(\overline{\mathbb{CP}^2}; \mathbb{Z}) \subset \mathrm{H}^2(\overline{\mathbb{CP}^2}; \mathbb{R})$ első Chern-osztályát a Hodge-elmélet szerint egyetlen harmonikus 2-forma reprezentálja. Ez a 2-forma a deRham-elmélet szerint egy U(1)-konnexió görbületeként állítható elő. Ez a konnexió mérce-ekvivalencia erejéig egyértelmű, és mivel $b^+_{\overline{\mathbb{CP}^2}} = 0$ (tehát a $*$-operátor egyszerűen a -1-gyel való szorzás), ASD is. Ha a $\overline{\mathbb{CP}^2}$-n lévő metrika a Z_2-hatásra invariáns, akkor a harmonikus reprezentáns leörököltethető az $L_1 \to W$ faktortérre, ahol továbbra is ASD marad. Adjuk hozzá ehhez az L_1-en lévő U(1)-konnexióhoz az $\underline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \times W \to W$ triviális nyaláb triviális konnexióját. Az így kapott konnexiót nevezzük A_1-nek. A konstrukcióból látszik, hogy A_1 reducibilis, és mivel $c_1(L)([\overline{\mathbb{CP}^2}]) = 1$, A_1 energiája $\frac{1}{2}$. Lássuk be most, hogy A_1 az egyetlen, a fenti tulajdonságokkal rendelkező konnexió: Tegyük fel hogy A_2 is $\frac{1}{2}$ energiájú ASD E_1-en. Ekkor a modulustér A_2-t tartalmazó komponensének formális dimenziója (ami a $-Index\ (d^*_{A_2} \oplus d^+_{A_2}) = -dim\ \mathrm{H}^0_{A_2} + dim\ \mathrm{H}^1_{A_2} - dim\ \mathrm{H}^+_{A_2}$ értékkel egyezik meg, lásd 3.3 fejezetet)

$$-2p + \tau - 3(1 + b^+_M) = -2(-\frac{1}{2}) + 1 - 3(1 + 0) = -1,$$

tehát A_2 is reducibilis ($\mathrm{H}^+_{A_2} = 0$ elérhető generikus metrika választásával, így a 8.3.4 tételbeli dimenzióformula $dim\ \mathrm{H}^0_{A_2} > 0$-t ad, ami azt jelenti, hogy A_2 reducibilis). A reducibilis konnexiók számát pedig topologikus adatok határozzák meg. Mint már láttuk, a reducibilis konnexiók bijekcióban állnak a nyaláb redukcióival (bár ezt zárt sokaságokra mondtuk ki, a nyílt W-re is igaz). Mivel W felett egyetlen olyan $L \to W$ U(1)-nyaláb van, melyre $c_1(L)$ harmonikus reprezentánsának megfelelő konnexió energiája $\frac{1}{2}$, a megadott A_1 mérce-ekvivalens A_2-vel.

(c) bizonyításához csak azt kell meggondolni, hogy E_1-en nincs lapos konnexió, hiszen minden ASD konnexió energiája $k \cdot \frac{1}{2}$ (ami következik abból, hogy $\overline{\mathbb{CP}^2}$-n minden ASD konnexió energiája egész). De $\pi_1(W) = 1$ miatt W felett csak a triviális nyalábon lévő) triviális konnexió lapos. ☐

Térjünk most vissza eredeti célunkhoz, vagyis $\mathcal{M}_{X,P}(g)$ meghatározásához, ahol X a *K3*-felület, $P \to X$ pedig olyan principális SO(3)-nyaláb, melyre $p_1(P) = -6$ ($w_2(P) \in \mathcal{C}_X$-et majd később rögzítjük). Tegyük fel P-ről, hogy a 16 darab $W \subset X$ részsokaság közül pontosan 12-n csavarodik. Ehhez kell majd w_2-t jól megválasztani; mint ahogy látni fogjuk, ilyen választás lehetséges.

Szorítsuk meg az $X = \bar{X} \cup_{16\mathbb{RP}^3} 16\ W$ feletti P nyalábot $\bar{X}$-re, és ezt a megszorítást jelöljük Q-val. Jelöljük továbbá $\mathcal{M}^0_Q(\bar{X})$-sal a Q-n 0 energiájú (tehát lapos) konnexiók terét. (Természetesen minden lapos konnexió ASD, hiszen $0 = F_A \in \Omega^2_-(M; adP)$.) A következő tétel $\mathcal{M}_{X,P}(g)$ egy nagyon egyszerű leírását adja meg.

8.3.7. tétel. *Van olyan (generikus) metrika X-en, $\bar{X}$-on és W-n, hogy a ragasztási konstrukció egy irányítástartó diffeomorfizmust ad meg $\mathcal{M}_{X,P}(g)$ és $\mathcal{N} = \mathcal{M}^0_Q(\bar{X}) \times \{\theta\}^4 \times \{A_1\}^{12}$ között (θ az $E_0 \to W$ nyalábon levő triviális, A_1 pedig az előző tételben konstruált, $E_1 \to W$-n levő reducibilis konnexiót jelöli).*

Bizonyítás. $\mathcal{M}^0_Q(\bar{X})$ egy eleméhez a tizenkét csavart végen A_1-et, a további négy végen pedig a θ triviális konnexiót ragasztva $\mathcal{M}_{X,P}(g)$ egy elemét kapjuk (ehhez persze le kell ellenőrizni, hogy nincs a ragasztásnak akadálya és nincs effektív ragasztási paraméter, ezekről lásd a 8.3.8 megjegyzést). Mivel 12-szer vesszük az $\frac{1}{2}$ energiájú A_1 konnexiót, a többi pedig lapos, az eredmény egy 6 energiájú ASD konnexió (tehát valóban $\mathcal{M}_{X,P}(g)$ egy eleme) lesz. Vagyis ragasztással $\mathcal{N}$ beágyazható $\mathcal{M}_{X,P}(g)$-be. A tétel bizonyításához tehát csak azt kell látnunk, hogy alkalmas metrikára $\mathcal{M}_{X,P}(g)$ minden eleme előáll így. Legyen g_n olyan metrikasorozat X-en, mely széthúzza X-et a 16 $\mathbb{RP}^3$ mentén.

Legyen $A_n \in \mathcal{M}_{X,P}(g_n)$ konnexiósorozat. Uhlenbeck gyenge kompaktsági tétele miatt ez egy $(B_0, B_1, ..., B_{16})$ elemhez tart gyengén. B_0 a $Q \to \bar{X}$ nyalábon, $B_1, ..., B_4$ pedig $E_0 \to W$-n, végül $B_5, ..., B_{16}$ az $E_1 \to W$ nyalábon (véges energiájú) ASD konnexió. A B_i-k energiáit összeadva legfeljebb 6-ot (ennyi az A_n sorozat elemeinek energiája) kaphatunk. A 8.3.6 tétel miatt azonban $B_5, ..., B_{16}$ energiája legalább $\frac{1}{2}$, vagyis az egyetlen lehetséges energiamegoszlás a következő: $B_5, ..., B_{16}$ energiája $\frac{1}{2}$, így ismét a 8.3.6 tétel miatt $B_5 = ... = B_{16} = A_1$; $B_1, ..., B_4$ energiája 0 (tehát ezek laposak), a 8.3.6 tétel szerint $B_1 = ... = B_4 = \theta$; B_0 is lapos, vagyis $B_0 \in \mathcal{M}^0_Q(\bar{X})$. Tehát elég nagy n-re (vagyis amikor a W-ket már elég messze kihúztuk az $\mathbb{RP}^3$-ak mentén) A_n már közel lesz egy fenti típusú ragasztott konnexióhoz, vagyis a ragasztási konstrukció egy ráképezést ad, amivel a tételt bebizonyítottuk. □

8.3.8. megjegyzés. Ahhoz, hogy belássuk, a ragasztás során nem lép fel akadály, a H^+_A csoportok eltűnését kell bebizonyítani. θ-ra könnyű számolás, A_1-re alkalmas metrika választása adja $\mathrm{H}^+_{A_1}$ eltűnését. $\mathcal{M}^0_Q(\bar{X})$ elemeire $\mathrm{H}^+_A = 0$ belátása kicsit hosszadalmasabb, lásd [Kr] Theorem 5. (236. oldal). Mint azt korábban már említettük (5.2.2 megjegyzés), $\mathbb{RP}^3$ menti ragasztásnál különös gondot kell fordítanunk a ragasztási paraméterek meghatározására, mivel a $Stab(\alpha) \cong \mathrm{O}(2)$ csoportnak több komponense van. Mivel a különböző komponensekből vett ragasztási paraméterek nem-izomorf nyalábokat adnak, a végeredményül kívánt nyaláb rögzítésével ez a bizonytalanság eltűnik. Így a ragasztási paraméterek tere S^1-re szűkül. Mivel $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}_{E_1}(W)$ elemei, valamint A és θ reducibilis konnexiók, és ezek stabilizátora éppen kiadja a fenti S^1-nyi ragasztási paramétert, következésképp nincs effektív ragasztási paraméter.

A számolás befejezéséhez tehát a P nyalábot kell még definiálnunk X-en (pontosan 12 "csavart véggel"), és meg kell határoznunk $\mathcal{M}^0_Q(\bar{X})$ elemszámát, vagyis meg kell adnunk a Q-n levő lapos konnexiókat. Korábbról tudjuk azt, hogy $\pi_1(\bar{X}) = \langle y_1, ..., y_4, \sigma \mid [y_i, y_j] = 1,\ \sigma^2 = 1,\ \sigma y_i \sigma = y_i^{-1} \rangle$. Definiáljuk a $\rho: \pi_1(\bar{X}) \to \mathrm{SO}(3)$ reprezentációt a következő módon:

$$\rho(\sigma) = \rho(y_1) = \mathrm{Id},$$

$$\rho(y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ \rho(y_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\rho(y_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.3.9. állítás. • *A ρ által definiált Q SO(3)-nyalábnak pontosan 12 csavart vége van.*

- *Minden olyan ρ' reprezentáció, amely a Q nyalábot definiálja, konjugált ρ-val.*

Bizonyítás. Az $\alpha \in \pi_1(\bar{X})$ elemet egy adott véghez tartozó homotópia-elemnek nevezzük, ha az $\mathbb{RP}^3 \times \{t\} \subset \bar{X}$ ($0 \ll t$ konstans) beágyazásnál $\pi_1(\mathbb{RP}^3)$ generátora éppen α-ra képződik — tehát $\alpha \in \pi_1(\bar{X})$ olyan $\bar{X}$-beli hurokkal reprezentálható, amely homotópiával $\mathbb{RP}^3 \times \{t\}$-be mozgatható. Q azokon a végeken triviális, amelyekhez tartozó homotópia-elemeken ρ értéke egy. Korábban már felsoroltuk a végekhez tartozó homotópia-elemeket, így egyszerű ellenőrzés bizonyítja az első állítást. Ahhoz, hogy a ρ' reprezentáció ugyanazt a nyalábot definiálja, mint ρ, annak is 12 csavart véget kell adnia. Könnyű ellenőrzés adja, hogy ekkor $\rho'(\sigma)$ =Id-nek kell teljesülni. Tehát ρ-t és ρ'-t a $\pi_1(\bar{X})/Z_2 = \mathbb{Z}^4$ csoporton kell összehasonlítanunk. Innen egyszerű számolás mutatja, hogy ρ és ρ' konjugáltak (ennek belátását az olvasóra hagyjuk). $\square$

ρ definíciója tehát megadja $R_\rho = Q$-t ($\bar{X}$ felett), amiből $P \to X$ már egyértelműen legyártható. Azt is megkaptuk, hogy $\mathcal{M}_Q^0(\bar{X})$ egy pontból áll, amiből a 8.3.7 tétel értelmében azt kapjuk, hogy $\mathcal{M}_{X,P}(g)$ az egypontú tér (ha a metrika már eléggé széthúzta $\bar{X}$-et és a W-ket). Ebből $\gamma_X(w_2(P)) = 1$ következik, amivel (Matsumoto tétele értelmében) beláttuk azt, hogy az X *K3*-felületre γ_X a konstans 1 függvény. $\square$

Később — a 10. fejezetben — egy algebrai geometriai eredetű operációval, a logaritmikus transzformációval fogunk megismerkedni. Ennel során egy adott $p \in \mathbb{N}$ páratlan számra a fenti X *K3*-felületből X_p komplex felület készíthető. A kapott X_p felület X-szel homeomorf lesz (ez a metszetforma meghatározásából adódik), a Donaldson-invariáns kiszámításával azonban azt kapjuk, hogy X_p nem diffeomorf X-szel. Az eddigiekhez hasonló számolással a következő bizonyítható be ugyanis (részletesen lásd [Kr]):

8.3.10. tétel. *Létezik olyan $\omega \in \mathcal{C}_{X_p}$, hogy $\gamma_{X_p}(\omega) = p$.* $\square$

Tehát a $2(-E_8) \oplus 3H$ metszetformával rendelkező topologikus sokaságon a logaritmikus transzformáció segítségével végtelen sok nem-diffeomorf sima struktúrát kaphatunk. Mivel azonos metszetformájú 4-sokaságok (egy Walltól származó tétel szerint) h-kobordánsak, végtelen sok ellenpéldát kapunk a "4-dimenziós h-kobordizmus tételre", hiszen az X és X_p ($p > 1$) közötti kobordizmus nem lehet a direkt-szorzat kobordizmus — az diffeomorfizmust adna X és X_p között.

8.3.11. következmény. *Négydimenziós sokaságokra nem igaz a h-kobordizmus tétel.* $\square$

8.3.12. megjegyzés. A Donaldson-invariáns óvatosabb definíciójával, vagyis a modulustér irányításának tényleges figyelembevételével (mi ezt az abszolút érték vételével kikerültük, lásd 7.1.6 definíciót) már γ_{K3} kiszámítása is megmutatja, hogy a h-kobordizmus-tétel 4-sokaságokra nem teljesül (lásd [DK]).

9. fejezet

Komplex felületek és egzotikus struktúrák

9.1 Nem-eltűnési és eltűnési tételek

A 7. fejezetben definiáltuk a Donaldson-invariánst és a Donaldson-polinomokat. Mint ahogy minden új definíciónál, itt is természetesen vetődik fel a kérdés vajon nem valami triviális dolgot definiáltunk-e, más szóval elég "finom"-e az új invariáns ahhoz, hogy megkülönböztessen sima struktúrákat. A válasz szerencsére pozitív és ezt szeretnénk demonstrálni ebben a fejezetben. Donaldson nem-eltűnési tétele — amit most bizonyítás nélkül közlünk —, azt állítja hogy vannak olyan négysokaságok amelyek Donaldson-invariánsa nem triviális.

9.1.1. tétel. *Tegyük fel, hogy X egy sima egyszeresen összefüggő kompakt komplex algebrai felület és $b_X^+ \geq 3$. Ekkor az X felület $\gamma_k(X)$ Donaldson invariánsa minden elég nagy k-ra nem azonosan 0.* □

A tétel bizonyítása komoly algebrai geometriai apparátust használ (lásd [D1] vagy [DK]).

Donaldson második, úgynevezett eltűnési tétele ezzel szemben azt állítja, hogy léteznek olyan speciális négysokaságok amelyeknek a Donaldson-invariánsa mindig azonosan 0:

9.1.2. tétel. *Legyen X egy sima, egyszeresen összefüggő kompakt négysokaság, $b_X^+ \geq 3$ és páratlan. Ezenkívül tegyük fel, hogy X előáll olyan $X = X_1 \# X_2$ összefüggő összegként, melyre $b_{X_1}^+ > 0$ és $b_{X_2}^+ > 0$. Ekkor $\gamma_k(X)$ minden k-ra azonosan 0.*

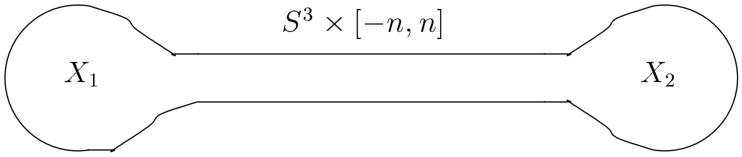
Az eltűnési tétel bizonyításának alapötletét egy speciális esetben mutatjuk meg, az általános eset sokkal bonyolultabb (lásd [D1], [DK] vagy [MM2]). Legyen $X = X_1 \# X_2$ egy kompakt, egyszeresen összefüggő sima négysokaság, $b_{X_1}^+ > 0$, $b_{X_2}^+ > 0$ és b_X^+ páratlan. Rögzítsük le k-t úgy, hogy $-2k - 3(1 + b_X^+) = 0$ teljesüljön. Jelölje $\mathcal{C}_X$ azokat a kohomológia-elemeket, melyeken a Donaldson-invariáns értelmezett, vagyis

$$\mathcal{C}_X = \{e \in \mathrm{H}^2(X; Z_2) \mid e^2 \equiv k \ (mod\ 4) \text{ és } e \neq 0\}.$$

Mivel $\mathrm{H}^2(X; Z_2) = \mathrm{H}^2(X_1; Z_2) \oplus \mathrm{H}^2(X_2; Z_2)$, így minden elem felírható $e = e_1 + e_2$ alakban ($e_i \in \mathrm{H}^2(X_i; Z_2)$).

9.1.3. tétel. *Ha $e \in \mathcal{C}_X$ és $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$, akkor a 0-dimenziós Donaldson-invariáns eltűnik e-n, vagyis $\gamma_X(e) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen P az az SO(3)-nyaláb X felett, melyre $p_1(P)[X] = k$ és $w_2(P) = e \pmod 2$. A struktúra-tétel szerint egy g generikus metrikára az $\mathcal{M}_{X,P}(g)$ modulustér 0-dimenziós és kompakt. Legyen S^3 egy olyan beágyazott gömb X-ben amely elválasztja X_1-et és X_2-t. Legyen továbbá g_n egy olyan metrika-sorozat, amely széthúzza X-et S^3 mentén, vagyis (X, g_n) tartalmaz egy $S^3 \times [-n, n]$-nel izometrikus nyakat (lásd a 9.1 ábrát).



9.1 ábra: X_1-et és X_2-t széthúzó metrika

9.1.4. állítás. *Elég nagy n esetén az $\mathcal{M}_{X,P}(g_n)$ modulustér üres.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt módon, hogy minden n-re létezik egy $A_n \in \mathcal{M}_{X,P}(g_n)$ konnexió. Uhlenbeck gyenge kompaktsági tételéből azt kapjuk, hogy A_n-ből kiválasztható egy gyengén konvergens $A_{n_l} \to (A, B)$ részsorozat, ahol

- $A \in \mathcal{M}_{X_1,P'}$, $B \in \mathcal{M}_{X_2,P''}$ ($P' \to X_1$, $P'' \to X_2$ nyalábok),
- $w_2(P') = e_1$, $w_2(P'') = e_2$,
- $-p_1(P') - p_1(P") \leq -p_1(P) = k$.

Vagyis a határértékek ASD konnexiók, a hozzájuk tartozó nyalábok második Stiefel-Whitney osztályai szükségképpen e_1 és e_2, és a határátmenetnél az energia nem növekedhetett. Feltevésünk szerint $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$, így sem A sem B nem lehet a triviális konnexió (hiszen sem P' sem P'' nem a triviális nyaláb). Mivel $b^+_{X_1} > 0$ és $b^+_{X_2} > 0$, így a struktúra-tétel miatt A és B nem lehetnek nemtriviális reducibilis konnexiók sem, tehát alkalmazható a dimenzió-formula:

$$dim\mathcal{M}_{X_1,P'} + dim\mathcal{M}_{X_2,P"} = -2p_1(P') - 3(1 + b^+_{X_1}) - 2p_1(P") - 3(1 + b^+_{X_2}) =$$

$$= -2(p_1(P') + p_1(P")) - 3(1 + b^+_X) - 3 \leq 2k - 3(1 + b^+_X) - 3 = -3$$

Tehát $\mathcal{M}_{X_1,P'}$ és $\mathcal{M}_{X_2,P"}$ közül az egyik dimenzió-okokból üres és így ellentmondásra jutottunk. □

Az állításból rögtön következik a 9.1.3 tétel, hiszen $\gamma_X(e)$ definíció szerint megegyezik a modulustér elemeinek előjeles összegével. Ezzel a 9.1.3 tétel bizonyítását befejeztük. □

Az általános esetben (tehát ha $e_1 = 0$ vagy $e_2 = 0$) ez a dimenziószámolás még nem bizonyítja, hogy a modulustér üres. Ilyenkor ugyanis előfordulhat, hogy A vagy B a θ triviális konnexióval egyenlő, melynek formális dimenziója negatív. (Tudjuk, hogy reducibilis konnexiókra a formális dimenzió nem feltétlenül adja meg a modulustér valós dimenzióját, ráadásul θ-t az ASD egyenlet nem transzverzálisan metszi ki, hiszen $\mathrm{H}^+_\theta \neq 0$.) A tétel általános bizonyítása meglehetősen bonyolult, így ennek ismertetésétől eltekintünk.

9.2 Komplex hiperfelületek $\mathbb{CP}^3$-ban

Az eltűnési és nem-eltűnési tételek segítségével már be tudjuk bizonyítani, hogy léteznek egymással homeomorf, de nem diffeomorf sima, kompakt, egyszeresen összefüggő négysokaságok. Először is szükségünk lesz néhány példára.

Minden $n > 0$ egész számra definiáljuk az

$$R_n = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{CP}^3 \mid z_0^n + z_1^n + z_2^n + z_3^n = 0\}$$

hiperfelületet.

$n = 1$ vagy 2 esetén könnyű látni, hogy mit kapunk:

9.2.1. állítás. (a) *R_1 diffeomorf $\mathbb{CP}^2$-vel.*

(b) *R_2 diffeomorf $S^2 \times S^2$-vel.* □

9.2.2. feladat. R_3 diffeomorf $\mathbb{CP}^2\#6\overline{\mathbb{CP}^2}$ -tal.

Az $n = 4$ esettel már a 8. fejezetben találkoztunk. Láttuk, hogy R_4 megegyezik a *K3*-felülettel és a Chern-osztályok segítségével kiszámoltuk R_4 Euler-karakterisztikáját és szignatúráját.

9.2.3. állítás. *R_5 egy kompakt, egyszeresen összefüggő, sima négysokaság, melynek metszési formája páratlan. R_5 Euler-karakterisztikája $\chi(R_5) = 55$, és szignatúrája $sign(R_5) = -35$.* □

(A számolást az olvasóra hagyjuk; a 8. fejezetben tárgyalt módszer adja a bizonyítást.)

Mivel R_5 egyszeresen összefüggő, $sign(R_5) = b^+_{R_5} - b^-_{R_5}$ és $\chi(R_5) = b^+_{R_5} + b^-_{R_5} + 2$. Ilymódon tehát azt kapjuk, hogy $b^+_{R_5} = 9$ és $b^-_{R_5} = 44$. Az indefinit páratlan metszési formák klasszifikációjából (lásd 1.3.1 tétel) következik, hogy R_5 metszési formája a $9\langle 1\rangle \oplus 44\langle -1\rangle$ formával ekvivalens. Jelöljük a rövidség kedvéért a $9\mathbb{CP}^2\#44\overline{\mathbb{CP}^2}$ 4-sokaságot Y-nal.

9.2.4. tétel. *Az R_5 sokaság Y-nal homeomorf de nem diffeomorf 4-sokaság.*

Bizonyítás. R_5 és Y egyaránt sima, kompakt, egyszeresen összefüggő négysokaságok és ugyanaz a metszési formájuk. Freedman klasszifikációs tételéből következik tehát, hogy homeomorfak. Ez bizonyítja a tétel első felét. Tegyük fel indirekt módon, hogy létezik egy $f\colon R_5 \to Y$ diffeomorfizmus. Mivel $b^+_{R_5} \neq b^-_{R_5}$, f szükségképpen irányítástartó, így megtartja a Donaldson-invariánst, vagyis

$$\gamma_k(R_5)(z_1, z_2, ..., z_d) = \gamma_k(Y)(f_*(z_1), ..., f_*(z_d)).$$

Donaldson nem-eltűnési tételéből azt kapjuk, hogy létezik k és $z_1, ..., z_d$ homológia-elemek, amelyekre a bal oldal nem 0. Másrészről Y felbontható $X_1\#X_2$ alakban úgy, hogy $b^+_{X_1} > 0$ és $b^+_{X_2} > 0$; így Donaldson eltűnési tételéből azt kapjuk, hogy a jobb oldal mindig 0. Ellentmondásra jutottunk, amely bizonyítja a 9.2.4 tételt. □

9.2.5. feladat. Lássuk be, hogy $n \geq 6$ esetén létezik R_n-nel homeomorf, de nem diffeomorf sima négysokaság.

9.2.6. megjegyzés. Az R_n komplex algebrai felületek általános típusúak ha $n \geq 5$ (az általános típusú felületek definíciója a következő fejezetben található meg).

9.3 Donaldson-polinom és összefüggő összeg

1960-ban látta be Wall [W] a következő állítást.

9.3.1. tétel. *Ha X és Y két, egymással homeomorf kompakt, egyszeresen összefüggő sima négysokaság, akkor létezik olyan l ($l \in \mathbb{N}$), hogy $X\#l(S^2 \times S^2)$ diffeomorf $Y\#l(S^2 \times S^2)$-vel.* □

A bizonyítás a h-kobordizmus elmélet ügyes alkalmazásán alapul, de semmilyen információt nem ad arra vonatkozólag, hogy adott esetben hány $S^2 \times S^2$-re van szükség. Az azóta eltelt több mint 30 év alatt sem sikerült megcáfolni vagy bebizonyítani a következő kézenfekvő sejtést:

9.3.2. sejtés. *Ha X és Y két, egymással homeomorf sima, kompakt, egyszeresen összefüggő négysokaság, akkor $X\#S^2 \times S^2$ és $Y\#S^2 \times S^2$ diffeomorf, vagyis $l = 1$ mindig elég.*

Sajnos a Donaldson elmélet csődöt mond ennél a problémánál. Nézzük meg mi ennek az oka!

Tegyük fel, hogy találtunk egy reményteli ellenpéldát és szeretnénk belátni a Donaldson-polinom segítségével, hogy $X\#S^2 \times S^2$ és $Y\#S^2 \times S^2$ nem diffeomorf. Ahhoz viszont, hogy a Donaldson-polinomot értelmezni tudjuk, szükséges hogy $b^+_{X\#S^2\times S^2} \geq 3$ és páratlan legyen. Mivel $b^+_{S^2\times S^2} = 1$, így $b^+_X > 0$ triviálisan teljesül, így Donaldson eltűnési tételéből következik, hogy $X\#S^2 \times S^2$ és $Y\#S^2 \times S^2$ összes Donaldson-polinomja eltűnik. Vagyis a Donaldson-polinom nem elég érzékeny invariáns ahhoz, hogy a reményteli ellenpéldákat megkülönböztesse.

9.3.3. megjegyzés. Fintushel és Stern kifejlesztett egy komplikáltabb, úgynevezett 2-torziós Donaldson-invariánst [FS2], de egyenlőre még ezzel az új eszközzel sem sikerült a fenti sejtést megcáfolni.

Egy másik kemény dió a négydimenziós, sima Poincaré-sejtés.

9.3.4. sejtés. *Ha az M sima négysokaság homeomorf S^4-gyel, akkor diffeomorf is vele.*

Erre a sejtésre több reményteli ellenpélda is ismert, de egyenlőre egyikről sem tudták bebizonyítani, hogy valóban nem diffeomorf S^4-gyel. Vegyük észre, hogy sem S^4-re sem M-re nem definiálható a Donaldson-polinom, hiszen $b^+_{S^4} = b^+_M = 0$. Sőt a Donaldson-polinom érzéketlen arra is, ha egy lehetséges ellenpéldát hozzáadunk egy másik sima négysokasághoz. Hadd illusztráljuk ezt a legegyszerűbb esetben, a 0-dimenziós SO(3) Donaldson-invariáns esetében.

Tegyük fel tehát, hogy X-re definiálható a Donaldson-invariáns és legyen P egy megfelelő SO(3)-nyaláb X felett. A $\mathrm{H}^2(X, Z_2) \cong \mathrm{H}^2(X\#M, Z_2)$ természetes izomorfizmust alkalmazva egy olyan $P' \to X\#M$ nyalábot definiálhatunk, melyre $p_1(P') = p_1(P)$ és $w_2(P') = w_2(P)$.

9.3.5. állítás. *A megfelelő Donaldson-invariánsokra $\gamma_{X,P} = \gamma_{X\#M,P'}$.*

Bizonyítás (vázlat). Akárcsak korábban, vegyünk egy olyan $(X\#M, g_n)$ metrika-sorozatot, mely S^3 mentén széthúzza X-et és M-et. Belátható, hogy a határértékként kapott (A, B) ASD konnexiók közül $A \in \mathcal{M}_{X,P}$, B pedig a triviális konnexió M-en. A ragasztási tételből következik, hogy elég nagy n-re $\mathcal{M}_{X,P}$ diffeomorf $\mathcal{M}_{X\#M,P'}(g_n)$-nel. Tehát $\gamma_{X,P} = \gamma_{X\#M,P'}$, vagyis ilyen módszerrel nem tudjuk M-et S^4-től megkülönböztetni. $\square$

Láttuk tehát, hogy amíg $S^2 \times S^2$ vagy $\mathbb{CP}^2$ hozzáadása a Donaldson-invariánst triviálissá teszi, addig egy S^4 -gyel homeomorf sima négysokaság hozzáadása azt nem változtatja meg. Vizsgáljuk meg végül $\overline{\mathbb{CP}^2}$ hozzáadásának hatását! Mivel $b^+_{\overline{\mathbb{CP}^2}} = 0$, így nem használhatjuk az eltűnési tételt.

9.3.6. állítás. *Tegyük fel hogy X-re definiálható a Donaldson-polinom. Legyen $z_1, ..., z_d \in \mathrm{H}_2(X, \mathbb{Z})$ és jelölje z_i képét $\mathrm{H}_2(X\#\overline{\mathbb{CP}^2}, \mathbb{Z})$-ben y_i. Ekkor*

$$\gamma_k(X)(z_1, ..., z_d) = \gamma_k(X\#\overline{\mathbb{CP}^2})(y_1, ..., y_d).$$

$\square$

A bizonyítás a 9.3.5 állításban szereplő gondolatmenethez hasonló (lásd [FM1]).

Legyen R_5 és Y a 9.2.4 tételben szereplő két sokaság. A fenti állításból azt kapjuk, hogy $R_5\#l\overline{\mathbb{CP}^2}$-nak létezik nem triviális Donaldson-polinomja. Másfelől az eltűnési tételből továbbra is következik, hogy $Y\#l\overline{\mathbb{CP}^2}$ minden Donaldson-polinomja 0. Tehát:

9.3.7. tétel. *Tetszőleges $l \geq 0$-ra $R_5\#l\overline{\mathbb{CP}^2}$ és $Y\#l\overline{\mathbb{CP}^2}$ homeomorf, de nem diffeomorf 4-sokaságok.* $\square$

10. fejezet

Elliptikus felületek

10.1 Komplex felületek

Ebben a fejezetben egyszeresen összefüggő kompakt komplex felületek (tehát valós 4-dimenziós sokaságok) osztályozásának négy szintjét — homotopikus ekvivalencia, homeomorfizmus, diffeomorfizmus és deformáció-ekvivalencia — fogjuk összehasonlítani. Freedman nevezetes tétele szerint a homotopikus ekvivalencia erejéig egyforma felületek már homeomorfak is, így a homotopikus és topologikus osztályozás között semmi különbség nincs. A sima (C^∞) osztályozás azonban már lényegesen el fog térni a fent említett kettőtől, de még mindig nem használja a komplex struktúra létezését.

10.1.1. definíció. Az S_1, S_2 kompakt komplex felületek egymásba deformálhatók (deformáció-ekvivalensek), ha léteznek $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ összefüggő komplex sokaságok és egy $\pi: \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ holomorf leképezés, hogy valamely $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$-re S_i biholomorfan ekvivalens $\pi^{-1}(t_i)$-vel $(i = 1, 2)$.

10.1.2. megjegyzés. Könnyen belátható, hogy egymásba deformálható felületek diffeomorfak is, tehát a deformáció-ekvivalencia erejéig történő osztályozás finomabb a sima (C^∞) osztályozásnál.

Először a felületek deformáció-ekvivalencia erejéig történő osztályozásával fogunk — vázlatosan — megismerkedni.

10.1.3. definíció. Egy felület minimális, ha nem állítható elő mint egy másik felület felfújtja. Egy S egyszeresen összefüggő kompakt komplex felület racionális, ha koordinátagyűrűje megegyezik $\mathbb{CP}^2$ koordinátagyűrűjével.

Felületek Kodaira-Enriques klasszifikációja szerint

10.1.4. tétel. *Egy minimális egyszeresen összefüggő kompakt komplex felület*

- *(a) racionális,*
- *(b) elliptikus vagy*
- *(c) általános típusú.*

A racionális felületek elmélete egyszerű, itt a felületek pontosan akkor deformálhatók egymásba, ha homotopikusan ekvivalensek. Ezekre a felületekre tehát a négyféle osztályozás megegyezik. (Valójában egy minimális, egyszeresen összefüggő, racionális felület vagy $\mathbb{CP}^2$-vel, vagy $S^2 \times S^2$-vel, vagy $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$-tal diffeomorf.) Az általános típusú felületek definíciója nem túl sokatmondó, ide soroljuk azokat, melyek nem racionálisak vagy elliptikusok (az elliptikusok definíciójával a következő részben részletesen foglalkozunk). Bár ez a definíció nem tűnik használhatónak, és a deformáció-ekvivalencia erejéig történő osztályozás sincs kész (az ilyen irányú kutatásokat "térképezés" vagy "botanika" névvel illetik), általános típusú felületekről egy nagyon erős tételt bizonyított be Gieseker:

10.1.5. tétel. ([Gi]) *Adott homotópia-típusban általános típusú felületeknek csak véges sok különböző deformáció-típusa van.* □

Hasonló tétel elliptikus felületekre — mint látni fogjuk — nem igaz.

10.2 Elliptikus felületek

10.2.1. definíció. Egy S egyszeresen összefüggő kompakt komplex felület elliptikus, ha létezik egy olyan $\pi: S \to \mathbb{CP}^1$ holomorf leképezés, hogy általános $t \in \mathbb{CP}^1$-re $\pi^{-1}(t)$ egy sima elliptikus görbe (így a T^2 tórusszal diffeomorf).

Az elliptikus felületek deformáció-típusaira Kodaira adott leírást a 60-as években, először evvel ismerkedünk meg. Zárásként a sima osztályozásban elért legújabb eredményeket soroljuk majd fel.

10.2.2. tétel. *Megadható komplex felületeknek egy olyan*

$$\{E(n)_{p,q} \mid n, p, q \in \mathbb{N},\ (p,q) = 1\}$$

családja, melyre igaz az, hogy minden S minimális egyszeresen összefüggő elliptikus felület a család valamely tagjába deformálható. $n \geq 2$ esetén a különböző $\{p, q\}$ párokhoz tartozó felületek nem deformálhatók egymásba. $E(1)_{p,1}$ és $E(1)_{1,1}$ deformáció-ekvivalens, de bármely két $E(1)_{p,q}$ különböző, ha $p, q > 1$.

A család konstrukciója a következő módon történik. $\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2}$ -at elliptikus felületté tehetjük: legyen F_1, F_∞ két általános helyzetű, p_1, p_∞ homogén harmadrendű polinommal definiált görbe $\mathbb{CP}^2$-ben. Vegyük a $\{p_t = t_0 p_1 + t_1 p_\infty \mid t = [t_0 : t_1] \in \mathbb{CP}^1\}$ polinomokkal definiált $\mathcal{F} = \{F_t = p_t^{-1}(0) \mid t = [t_0 : t_1] \in \mathbb{CP}^1\}$ görbecsaládot. Mivel F_1 és F_∞ általános helyzetű (tehát $F_1 \cap F_\infty$ 9 pontból áll), az $\{F_t \mid t \in \mathbb{CP}^1\}$ görbecsalád $\mathbb{CP}^2 \setminus (F_1 \cap F_\infty)$ egyrétű fedését adja, és bármely két görbe $F_1 \cap F_\infty$-ben transzverzálisan metszi egymást. A $\pi: \mathbb{CP}^2 \setminus (F_1 \cap F_\infty) \to \mathbb{CP}^1$ függvény értéke $p \in \mathbb{CP}^2 \setminus (F_1 \cap F_\infty)$-re legyen az a $t \in \mathbb{CP}^1$ paraméter, melyre $p \in F_t$. $F_1 \cap F_\infty$ 9 pontját felfújva $\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2}$ -ra is kiterjed a fenti π függvény, és könnyen látható, hogy így egy elliptikus struktúrát kaptunk $\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2}$-on. Nevezzük ezt $E(1)$-nek.

10.2.3. megjegyzés. Az algebrai geometriában ismeretes felfújás differenciáltopológiai szemszögből $\overline{\mathbb{CP}^2}$-tal való összefüggő uniót ($\#$) jelent.

$E(1)$-ből egy egyszerű operáció — a fibrum-összeg — segítségével kapjuk meg $E(n)$-t (ami $E(n)_{1,1}$ rövidítése). Legyen $\pi_i: S_i \to \mathbb{CP}^1$ elliptikus felület, $t_i \in \mathbb{CP}^1$ pedig olyan pont, melynek kis $\Delta_i \subset \mathbb{CP}^1$ környezetében a $\pi_i: \pi_i^{-1}(\Delta_i) \to \Delta_i$ fibrálás a $\Delta_i \times T^2 \to \Delta_i$ projekcióval egyezik meg ($i = 1, 2$). $S_i \setminus \pi_i^{-1}(\Delta_i)$ tehát egy T^3 3-tórusz peremű sokaság. A határoló 3-tóruszok mentén $S_1 \setminus \pi_1^{-1}(\Delta_1)$ és $S_2 \setminus \pi_2^{-1}(\Delta_2)$ egy fibrumtartó leképezéssel összeragasztható úgy, hogy a kapott — $S_1\#_f S_2$-vel jelölt — felületre nemcsak a fibrálás, hanem a komplex struktúra is természetesen kiterjed (a $\pi_i^{-1}(\Delta_i) \to \Delta_i$ nyalábok egy holomorf trivializációját alapul véve válasszuk az $f = \mathrm{id}_{T^2} \times \rho: T^3 \to T^3$ irányításfordító ragasztóleképezést, ahol $\rho: S^1 \to S^1$ a komplex konjugálás). Ezzel tehát egy $S_1\#_f S_2$ komplex felületet kaptunk, melynek komplex struktúrája ugyan függ a választásoktól (a t_i pontok, Δ_i környezetek, a trivializációk), a deformáció-ekvivalencia osztály azonban már nem. Legyen tehát $E(n) = E(n-1)\#_f E(1)$.

A 10.2.2 tételbeli család konstrukciójához a *logaritmikus transzformációval* kell még megismerkednünk, ennek először egy C^∞ változatát ismertetjük. (Ez a megadás nem mutatja, hogy az eredményül kapott felület kanonikus komplex struktúrát hordoz.) Ezután nagyon vázlatosan az eredeti — algebrai geometriai — definíciót is ismertetni fogjuk (lásd [FM1], [GH]). Legyen tehát ismét $\pi: S \to \mathbb{CP}^1$ elliptikus felület, $\pi^{-1}(t)$ pedig egy reguláris fibrum. Hagyjuk ki S-ből a $\pi^{-1}(\Delta) \cong D^2 \times T^2$ fibrumkörnyezetet, majd ragasszuk vissza T^3 egy f diffeomorfizmusával. Ilymódon egy $S_f = (S \setminus D^2 \times T^2) \cup_f D^2 \times T^2$ sokaságot kapunk. f izotópia-osztályát egy $GL(3;\mathbb{Z})$-beli elem (az $f_*: \mathrm{H}_1(T^3;\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}_1(T^3;\mathbb{Z})$ indukált homomorfizmus mátrixa) határozza meg. Gompf [G] azonban belátta, hogy S_f diffeomorfizmus-osztálya ennek a mátrixnak csak egyetlen elemétől (a $T^3 = \text{fibrum} \times S^1$ felírásban a jobb alsótól) függ, ami pedig pozitívnak választható. Tehát diffeomorfizmus erejéig S_f egyetlen

$p \in \mathbb{N}$ számtól függ, a továbbiakban ezért a kapott sokaságot S_p-vel fogjuk jelölni. A fenti eljárást az $E(n)$ felületekre k-szor alkalmazva $E(n)_{p_1,\ldots,p_k}$ sokaságokat kapunk. Van Kampen tételének alkalmazásával belátható, hogy $E(n)_{p_1,\ldots,p_k}$ egyszeresen összefüggő ha $k \leq 2$ és $(p_1, p_2) = 1$. Ilymódon tehát — a fibrum összeget és a logaritmikus transzformációt $E(1)$-re ismételten alkalmazva — megkaptuk az $\{E(n)_{p,q}\}$ családot. A $p = 1$ eset annak felel meg, amikor f =id, vagyis nem történt semmi. Ilyen esetben a p multiplicitást nem írjuk ki, például $E(n) = E(n)_{1,1}$. Nézzük meg végül, hogyan lehet a $p \in \mathbb{N}$ multiplicitású logaritmikus transzformációt a komplex kategóriában elvégezni.

Vegyük $t \in \mathbb{CP}^1$ egy Δ, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$-gyel izomorf környezetét. Legyen α egy holomorf szelése a $\pi\colon \pi^{-1}(\Delta) \to \Delta$ nyalábnak. Mivel minden fibrum egy elliptikus görbe, az $\alpha(z)$ $(z \in \Delta)$ pontot mint origót rögzítve $C_z = \pi^{-1}(z)$ egyértelmű csoportstruktúrával látható el. A p-edrendű elemek halmaza Δ-nak egy fedését adja, vegyük ennek egy ágát (ilymódon egy olyan β holomorf szelést definiáltunk, melyre $\beta(z)$ p-edrendű). Húzzuk vissza a $\pi^{-1}(\Delta)$ nyalábot a $\varphi\colon \Delta \to \Delta$ $\varphi(z) = z^p$ leképezés mentén, vagyis vegyük a

$$\Sigma = \{(w, r) \in \Delta \times \pi^{-1}(\Delta) \mid \pi(r) = w^p\} \subset \Delta \times \pi^{-1}(\Delta)$$

halmazt. Tehát $\Sigma \to \Delta$ elliptikus fibrálás, valamint az $e^{\frac{2\pi i}{p}n}w \in \Delta$ feletti fibrumok $\pi^{-1}(w^p)$-vel kanonikusan azonosítva vannak. A $(w, r) \to (e^{\frac{2\pi i}{p}}w, r)$ (nem szabad) hatással faktorizálva $\pi^{-1}(\Delta) \to \Delta$-t kapnánk vissza. Hasson azonban a Z_p csoport szabadon Σ-n a

$$\varphi(w, r) = (e^{\frac{2\pi i}{p}}w, r + \beta(w^p))$$

függvény által generált módon (emlékezzünk arra, hogy $\beta(w^p)$ a C_{w^p} görbe egy kijelölt p-edrendű eleme). Evvel a hatással faktorizálva egy $\psi\colon \Sigma_1 \to \Delta$ elliptikus fibrálást kapunk. Könnyen látható, hogy a hatás $w \neq 0$-ra különböző fibrumokat azonosít, így $\psi^{-1}(\Delta \setminus \{0\})$ és $\pi^{-1}(\Delta \setminus \{0\})$ között izomorfizmus adható meg például a

$$(w, r) \to r + (\frac{1}{2\pi i}\log w)\beta(w^p)$$

függvénnyel. E függvényt használva ragasszuk $\pi^{-1}(\Delta)$ helyére $\psi\colon \Sigma_1 \to \Delta$-t, az így kapott felületet pedig nevezzük S_p-nek. A Σ-n definiált Z_p hatás definíciójából látszik, hogy ha w-vel 0 felé tartunk, a C_w fibrum a C_0 fibrumnak egy p-szeres fedését adja.

10.2.4. állítás. **(a)** *Ha n páratlan, akkor $E(n)_{p,q}$ és $E(n)$ homeomorfak.*

(b) *Ha n páros, akkor $E(n)_{p,q}$ és $E(n)_{p',q'}$ pontosan akkor homeomorfak, ha $pq \equiv p'q' \pmod 2$.* □

10.2.5. megjegyzés. Könnyen látható, hogy $b_2(E(n)_{p,q}) = 12n - 2$, $b^+(E(n)_{p,q}) = 2n - 1$ és $sign(E(n)_{p,q}) = -8n$, így a metszetforma paritása dönti el $E(n)_{p,q}$ homeomorfizmus-osztályát. $E(n)_{p,q}$ pedig pontosan akkor spin, ha n páros és pq páratlan.

Tehát ha egy homotopikus ekvivalencia-osztályban van elliptikus felület, rögtön végtelen sok egymásba nem deformálható is található. Kézenfekvő kérdés, hogy ezek a felületek diffeomorfak-e vagy sem. Erre a kérdésre ad — az $n = 1$ esetet leszámítva teljes — választ a következő tétel.

10.2.6. tétel. *Tegyük fel, hogy $n \geq 2$ valamint $E(n)_{p,q}$ és $E(n)_{p',q'}$ diffeomorfak. Ekkor $\{p, q\} = \{p', q'\}$, vagyis $E(n)_{p,q}$ és $E(n)_{p',q'}$ deformáció-ekvivalensek.*

10.2.7. megjegyzés. Tehát $n \geq 2$ esetén elliptikus felületekre a deformáció-ekvivalencia erejéig történő osztályozás megegyezik a sima osztályozással.

A fenti tétel bizonyítása úgy történik, hogy az $E(n)_{p,q}$ sokaság Donaldson-polinomjának részleges kiszámolásával megmutatjuk, hogy a $\{p, q\}$ pár a sokaság sima invariánsa. Ebből a tétel már adódik. A pontos eredmény kimondásához némi előkészítésre van szükségünk.

10.2.8. definíció. Legyenek Q_1 és Q_2 szimmetrikus d_1- illetve d_2-fokú függvények $\mathrm{H}_2(E(n)_{p,q};\mathbb{Z})$-n. Ekkor Q_1 és Q_2 szimmetrikus szorzatát, a Q_1Q_2 d_1+d_2-fokú szimmetrikus függvényt a következő formula definiálja:

$$Q_1Q_2(x_1,\dots,x_{d_1+d_2}) =$$

$$\frac{1}{d_1!d_2!}\sum_{\sigma\in S_{d_1+d_2}} Q_1(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(d_1)})\cdot Q_2(x_{\sigma(d_1+1)},\dots,x_{\sigma(d_1+d_2)}).$$

E definíció ad értelmet a következő állításban szereplő $Q^i\kappa^{d-2i}$ kifejezéseknek:

10.2.9. állítás. ([FM1]) *Az $E(n)_{p,q}$ elliptikus felület γ_k Donaldson-polinomja*

$$\gamma_k(E(n)_{p,q}) = \sum_{i=0}^{[\frac{d}{2}]} c_i Q^i \kappa^{d-2i}$$

alakú, ahol $d=4k-3n$, Q az $E(n)_{p,q}$ metszési formája, $\kappa\in\mathrm{H}^2(E(n)_{p,q};\mathbb{Z})$ pedig a fibrum Poincaré-duálisának $\frac{1}{pq}$-szorosa. □

10.2.10. megjegyzés. Mivel γ_k diffeomorfizmus-invariáns, $E(n)_{p,q}\to E(n)_{p,q}$ megfelelően sok diffeomorfizmusának találásával bizonyítható be, hogy elliptikus felületekre γ_k ilyen speciális alakú.

10.2.11. tétel. *Legyen $n\geq 2$ és $k=3n-1$ (ekkor $d=9n-4$). A $\gamma_k(E(n)_{p,q})$ Donaldson-polinom c_i együtthatóinak értéke*

(a) $c_i = 0$ *ha* $i > 4n-1$,

(b) $c_{4n-1} = C(pq)^{n-1}$ $\quad (C=\frac{(9n-4)!}{2^{4n-1}(4n-1)!})$, *és*

(c) $c_{4n-2} = C'(pq)^{n-1}(np^2q^2-(p^2+q^2))$ $\quad (C'=\frac{(9n-4)!}{62^{4n-2}(4n-2)!})$. □

Mivel a c_i együtthatók sima invariánsai a szóbanforgó 4-sokaságnak, (b)-ből pq, (c)-ből pedig p^2+q^2 invarianciája adódik, ez pedig bizonyítja a 10.2.6 tételt. A 10.2.11 tétel bizonyításának leírása messze túlmutat jegyzetünk keretein, így csak néhány megjegyzést fűzünk az elmondottakhoz.

10.2.12. megjegyzések.

- Vegyük észre, hogy tételünk nem szól az $n=1$ esetről. Ekkor ugyanis $b^+(E(1)_{p,q})=1$, így a Donaldson-polinom definíciójában nem tudjuk a metrikától való függetlenséget belátni. Friedman és Morgan bebizonyította [FM2], hogy $(p^2q^2-p^2-q^2-1)$ az $E(1)_{p,q}$ sokaságnak sima invariánsa. $q=1$ esetén ez az invariáns nem különbözteti meg $E(1)$-et és $E(1)_p$-t; mint már említettük, ezek a felületek egymásba deformálhatók.
- (a) és (b) bizonyítása [FM1]-ben és [SSz]-ben található meg. (c)-t $n=2$ esetre Morgan és O'Grady [MO] bizonyította, az általános eset bizonyítása [MM1]-ben és [SSz]-ben található meg.

Irodalomjegyzék

[AHS] M. Atiyah, N. Hitchin, I. Singer *Self-duality in Four-Dimensional Riemannian Geometry*, Trans. R. Soc. Lond. **A362** (1978) 425-61.

[BPV] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven *"Compact Complex Surfaces"* Ergebnisse der Mathematik, Springer-Verlag, Berlin 1984.

[DW] A. Dold, H. Whitney *Classification of Oriented Sphere Bundles over a 4-Complex*, Annals of Mathematics, **69** (1959) 667-77.

[D1] S.K. Donaldson *Polynomial Invariants for Smooth 4-Manifolds*, Topology **29** (1990) 257-315.

[D2] S.K. Donaldson *An Application of Gauge Theory to the Topology of 4-Manifolds*, Journal of Differential Geometry **18** (1983) 269-316.

[D3] S.K. Donaldson *Connections, Cohomology and the Intersection Forms of 4-Manifolds*, Journal of Differential Geometry **24** (1986) 275-341.

[DK] S.K. Donaldson, P. Kronheimer *"The Geometry of Four-Manifolds"* Oxford Mathematical Monography, Oxford University Press, Oxford 1990.

[FU] D. Freed, K. Uhlenbeck *"Instantons and Four-Manifolds"*, M.S.R.I. Publications, Vol.1, Springer New York 1984.

[F] M. Freedman *The Topology of Four-Dimensional Manifolds*, Journal of Differential Geometry **17** (1982) 357-454.

[FS1] R. Fintushel, R. Stern *Surgery in Cusp Neighborhoods*, megjelenés előtt.

[FS2] R. Fintushel, R. Stern *2-Torsion Instanton Invariants*, Journal of the AMS Vol. **6** Number 2 (1993) 299-339.

[FS3] R. Fintushel, R. Stern *SO(3) Connections and the Topology of 4-Manifolds*, Journal of Differential Geometry **20** (1984) 523-39.

[FM1] R. Friedman, J. Morgan *"Smooth Four-Manifolds and Complex Surfaces"*, megjelenés előtt.

[FM2] R. Friedman, J. Morgan *On the Diffeomorphism Types of Certain Algebraic Surfaces I.,II.*, Journal of Differential Geometry **27** (1988) 297-369.

[Gi] D. Gieseker *On Moduli Spaces of Vector Bundles on an Algebraic Surface*, Annals of Mathematics **106** (1977) 45-60.

[G] R. Gompf *Nuclei of Elliptic Surfaces*, Topology **30** (1991) 479-511.

[GH] P. Griffiths, J. Harris *"Principles of Algebraic Geometry"*, Wiley, New York 1978.

[HM] D. Husemoller, J. Milnor *"Symmetric Bilinear Forms"*, Springer, Berlin 1973.

[K] R. Kirby *"The Topology of 4-Manifolds"*, Lecture Notes in Math 1374 Springer Verlag 1989.

[Kr] P. Kronheimer *Instanton Invariants and Flat Connections on the Kummer Surface*, Duke Math. J. **64** (1991) 229-241.

[Ma] T. Matsumoto *On the Diffeomorphisms of a K3 Surface*, in "Algebraic and Topological Theories" Kinosaki (1986) 616-621.

[M1] J. Milnor *"Morse Theory"*, Annals of Mathematics Studies 51, Princeton University Press 1963.

[M2] J. Milnor *On Manifolds Homeomorphic to the 7-Sphere*, Ann. Math. **64** (1956) 399-405.

[MS] J. Milnor, J. Stasheff *"Characteristic Classes"*, Annals of Mathematics Studies 76, Princeton University Press 1974.

[MM1] J. Morgan, T. Mrowka *On the Diffeomorphism Classification of Regular Elliptic Surfces*, Duke Math. J. **70** (1993) 183-84.

[MM2] J. Morgan, T. Mrowka *A Note on Donaldson's Polynomal Invariants*, Duke Math. J. **68** (1992) 223-230.

[MMR] J. Morgan, T. Mrowka, D. Ruberman *The L^2-Moduli Space on Manifolds with Cylindrical Ends*, megjelenés előtt.

[MO] J. Morgan, K. O'Grady *Elliptic Surfaces with $p_g = 1$: Smooth Classification*, megjelenés előtt.

[R] V. Rohlin *New Results in the Theory of Four Dimensional Manifolds*, Dok. Akad. Nauk. USSR **84** (1952) 221-24.

[Sm] S. Smale *On the Structure of Manifolds*, American Journal of Mathematics **87** (1964) 387-99.

[SSz] A. Stipsicz, Z. Szabó *The Smmoth Classification of Elliptic Surfaces with $b^+ > 1$*, Duke Math. J. **75** (1994) 1-50.

[W] C.T.C Wall *Diffeomorphisms of 4-Manifolds*, Journal of the London Mathematical Society **39** (1964) 131-149.

Tárgymutató