Négydimenziós topológia

Stipsicz András

Előszó

Az elmúlt két évtized topológiájának leggyorsabban és leglátványosabban fejlődő területe a 4-dimenziós sokaságok topológiájának és geometriájának vizsgálata volt. M. Freedman 1982-ben bizonyított tétele [F] topologikus 4-sokaságok teljes leírását adta meg (legalábbis az egyszeresen összefüggő esetben), míg S. Donaldson [D1] alapvető eredménye sima struktúrák nemlétezését látta be bizonyos topologikus 4-sokaságokra. A két tétel közös következményeként vált lehetővé "egzotikus $\mathbb{R}^4$-ek" (a standard 4-dimenziós euklideszi térrel homeomorf de nem diffeomorf sokaságok) létzésének belátása. Részint fizikai gyökerekből táplálkozó elméletét továbbfejlesztve, Donaldson 4-sokaságok differenciálható struktúráinak invariánsait találta meg [D2]; evvel lehetővé vált, hogy a 4-dimenziós h-kobordizmus tétel hamis voltát is belássa.

4-dimenziós sokaságokkal azonban nehéz dolgozni. S. Smale — fogantyú-felbontásokat használó — híres bizonyítása (mellyel 5-nél magasabb dimenziós sokaságokra belátta a h-kobordizmus tételt) nyomán Kirby és tanítványai egy módszert fejlesztettek ki 4-dimenziós sokaságok ábrázolására. Evvel az ún. "Kirby-kalkulussal" egy 4-sokaság fogantyú-felbontását egy speciális (S^3-beli) lánc kódolja el, a fogantyú-kalkulus műveletei (fogantyú-csúsztatás illetve elhagyható párok elhagyása/bevezetése) pedig a láncon elvégezhető egyszerű műveletekké válnak.

Jelen jegyzet a fent vázolt eredményekből gyűjt össze egy csokorra valót. A fogantyú-kalkulus alapjainak és a Kirby-kalkulusban alkalmazott konvenciók részletes tárgyalása mellett röviden összefoglaljuk a 4-dimenziós sokaságok osztályozásában eddig elért legfontosabb eredményeket. Ezen eredmények megértéséhez röviden áttekintjük a szimmetrikus, bilineáris formák elméletének egy kis fejezetét is. Két előadás szól a h-kobordizmus tételről, az egyikben a magasabb dimenziós vátozat bizonyítását adjuk meg, míg a nyolcadik előadás megmutatja azt a lépést, ahol a korábbi gondolatmenet a 4-dimenziós esetben megakad. E két előadás hivatott demonstrálni a különbséget a 4-dimenziós sokaságok algebrai és geometriai tulajdonságai között — az előbbi a topológiai osztályozáshoz, az utóbbi a sima sokaságok elméletének összetettségéhez vezet. Az utolsó két előadás során a már korábban említett Donaldson-féle sima invariánsok egy továbbfejlesztett vátozatát, az ún. Seiberg-Witten invariánsokat tárgyaljuk nagyon vázlatosan.

A jegyzet az ELTE TTK matematikus szakán tartott sávelőadások anyaga alapján készült, és reményeink szerint további hasonló előadás-sorozatokhoz szolgálhat (legalábbis részben) háttéranyagként. A jegyzet végén található irodalomjegyzék az érdeklődő olvasónak nyújthat segítséget további kutatások elkezdéséhez. Itt szeretnénk köszönetet mondani a Magyary Zoltán Alapítvány és az OTKA támogatásáért.

Stipsicz András
1998. július

Tartalomjegyzék

1. előadás

Fogantyúk, fogantyú-felbontások

1.1 Bevezető

A továbbiakban feltesszük, hogy az olvasó jártas az algebrai topológia alapjaiban, így hivatkozás nélkül használunk homológia- és homotópia-elméleti alaptételeket és fogalmakat (mint pl. Poincaré dualitás ill. irányítás). Ugyanígy feltesszük, hogy nyalábok, principális és asszociált nyalábok, és azok szelései ismert fogalmak; hasonlóan, Morse elméleti fogalmakat is használni fogunk hivatkozás nélkül.

Egy X (szeparábilis) Hausdorff topologikus teret *n-dimenziós topologikus sokaságnak* nevezünk, ha minden $p \in X$ pontra létezik egy olyan $U \subset X$ (p-t tartalmazó) nyílt környezet, mely $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ x_n \geq 0\}$ nyílt részével homeomorf egy $\phi_\alpha: U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^n_+$ leképezés mentén. Egy ilyen (U_α, ϕ_α) párt *térképnek* hívunk; térképek egy halmazát pedig *atlasznak* nevezzük, ha $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$. Az (U_α, ϕ_α) és (U_β, ϕ_β) térképek közötti $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}: \phi_\alpha(U_\alpha) \cap \phi_\beta(U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha) \cap \phi_\beta(U_\beta)$ függvényt *átmenő függvénynek* nevezzük. Egy $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ atlasz *C^r-struktúrát* definiál, ha az atlaszhoz tartozó térképpárokra az átmenő függvények r-szer folytonosan differenciálhatók ($r = 1, \ldots, \infty$). Az $r = \infty$ esetben az X sokaságot (a fenti atlasszal ellátott) *sima* sokaságnak nevezzük. X azon pontjainak halmazát, melyek az $\mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\} \subset \mathbb{R}^n_+$ részre képződnek, X határának nevezzük és ∂X-szel jelöljük.

1.1.1. példa. A $D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 \leq 1\}$ peremes sokaságot n-dimenziós *diszknek* (vagy *golyónak*) hívjuk. Ennek $S^{n-1} = \partial D^n$ peremét $(n-1)$-dimenziós *gömbnek* nevezzük.

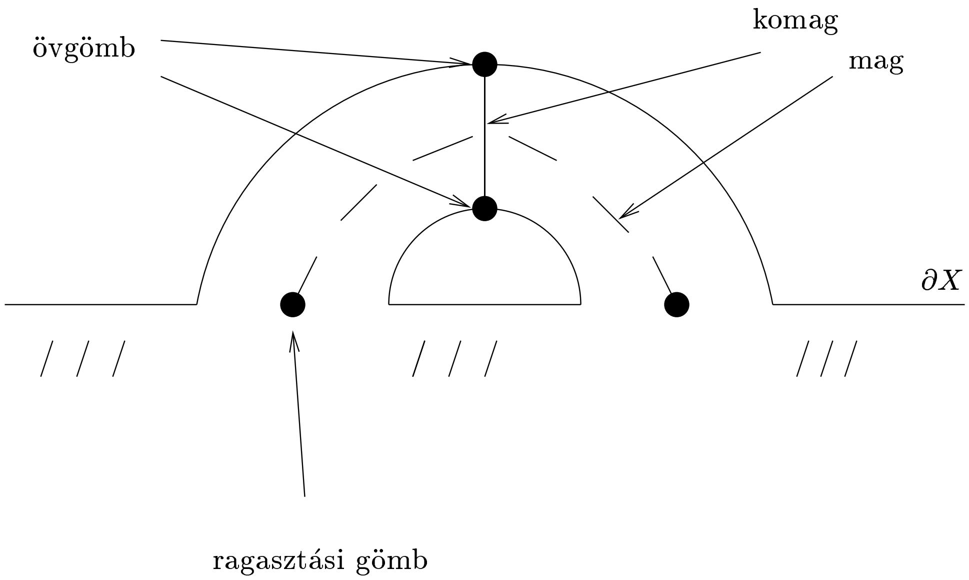
1.2 Fogantyúk

Sokaságokat tehát atlaszukkal adhatunk meg, ezek kezelése azonban nehézkes. A következőkben — a fogantyú-felbontás bevezetésével — sokaságok egy kezelhetőbb leírását adjuk meg. Mint látni fogjuk, fogantyú-felbontások különösen jól írhatók le alacsony (legfeljebb négy) dimenziós esetekben.

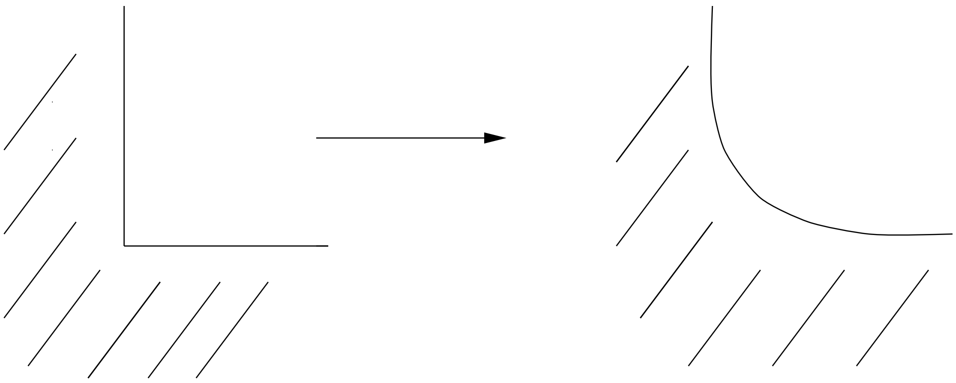
1.2.1. definíció. A $D^k \times D^{n-k}$ szorzatot (mely természetesen a D^n diszkkel diffeomorf) *n-dimenziós k indexű fogantyúnak* nevezzük. $D^k \times \{0\}$ a fogantyú *magja*, $\{0\} \times D^{n-k}$ a *komagja*; $\partial D^k \times \{0\}$-t (tehát a mag határát) a fogantyú *ragasztási gömbjének* míg a $\{0\} \times \partial D^{n-k}$ részt (ami a komag határa) a fogantyú *övgömbjének* nevezzük. (Lásd az 1.1 ábrát.)

Legyen X^n adott n-dimenziós peremes sokaság. Egy $\varphi: \partial D^k \times D^{n-k} \to \partial X$ beágyazással a $D^k \times D^{n-k}$ k-fogantyút X-hez ragaszthatva egy $X \cup_\varphi D^k \times D^{n-k}$ új sokaságot kapunk.

1.2.2. megjegyzés. A fent leírt $X \cup_\varphi D^k \times D^{n-k}$ sokaságnak "sarkai" lesznek — olyan pontok tehát, melyek környezete $\mathbb{R}^n_{++} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{R},\ x_{n-1} \geq 0,\ x_n \geq 0\}$ origójának egy környezetével diffeomorf —, ezeket azonban kanonikusan "le lehet kerekíteni", vagyis $X \cup_\varphi D^k \times D^{n-k}$-n egyértelműen adható meg egy sokaság struktúra. (Lásd az 1.2 ábrát a kétdimenziós esetben.) Ha X sima és φ egy C^∞-beágyazás, akkor a kapott sokaság is sima lesz.



1.1 ábra: Egy fogantyú felépítése



1.2 ábra: Egy sarok lekerekítése

1.2.3. definíció. Legyen X adott sokaság és tegyük fel, hogy $\partial X = \overline{\partial_- X} \cup \partial_+ X$ — vagyis a határt két diszjunkt részre osztjuk és az egyiken az X által indukált irányítást megfordítjuk. Egy olyan, X-szel izomorf (tehát diffeomorf vagy homeomorf) sokaságot, melyet a fent leírt fogantyú-ragasztás $\partial_- X \times I$-re való $\partial X \times \{1\}$ menti (ismételt) alkalmazásával kapunk, $(X, \partial_- X)$ *relatív fogantyú-felbontásának* nevezzük. Amennyiben $\partial_- X = \emptyset$, akkor (abszolút) fogantyú-felbontásról beszélünk.

Vegyük észre, hogy egy X sima sokaságra egy Morse függvény éppen egy fogantyú-felbontást indukál. (Fogantyú-felbontást azonban találhatunk nem feltétlenül sima sokaságokra is — valójában minden olyan topologikus sokaságra létezik fogantyú-felbontás, melynek dimenziója négytől különböző. Négy dimenzióban pontosan azokra a sokaságokra található fogantyú-felbontás, melyek sima struktúrát hordoznak.) Tehát:

1.2.4. tétel. *Az $(X, \partial_- X)$ sima kompakt párra létezik fogantyú-felbontás. Ha X nem-kompakt, de $\partial_- X$ igen, akkor is létezik X-re (esetleg végtelen sok fogantyút tartalmazó) fogantyú-felbontás.* □

Egy fogantyú-felbontás megadásához pusztán a $\varphi\colon \partial D^k \times D^{n-k} \to \partial X$ beágyazásokat kell megadnunk. Egy ilyen leképezést két adat határoz meg:

(I) egy $\varphi_0\colon S^{k-1} \to \partial X$ beágyazás, melynek normálnyalábja triviális;

(II) és a $\nu\varphi_0(S^{k-1})$ normálnyaláb egy $f\colon \nu\varphi_0(S^{k-1}) \cong S^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k}$ trivializációja.

Egy fogantyú odaragasztását tehát φ_0 *ragasztó leképezése* (vagyis egy ∂X-beli beágyazott $(k-1)$-dimenziós gömb) és egy f trivializáció — a fogantyú *tüskézése* — határozza meg. Számos esetben, pusztán dimenzióokokból S^{k-1} egyértelműen ágyazódik be ∂X-be, és sokszor a tüskézés is egyértelmű. Két tüskézés S^{k-1} minden pontjában egy $GL(n-k)$-beli elemben különbözik, tehát a különböző tüskézéseket $S^{k-1} \to GL(n-k)$ leképezésekkel, vagyis a $\pi_{k-1}(GL(n-k)) \cong \pi_{k-1}(O(n-k))$ csoporttal lehet paraméterezni. Vegyük azonban észre, hogy a tüskézéseket általában nem tudjuk $\pi_{k-1}(O(n-k))$ elemeivel azonosítani, mivel (általában) nincs a $0 \in \pi_{k-1}(O(n-k))$ elemnek megfelelő kanonikus választás.

1.2.5. példák. (a) Egy 0-fogantyút (tehát $D^0 \times D^n$-t) a $\partial D^0 \times D^n = \emptyset$ mentén ragasztunk; ezekkel (és csak ezekkel) a fogantyúkkal tudjuk az abszolút esetben a fogantyú-felbontás felépítését elkezdeni. 0-fogantyúk ragasztása nyilván egyértelmű.

(b) Egy 1-fogantyú ragasztó gömbje $S^0 = \{\text{két pont}\}$, így φ_0 egyértelmű ha ∂X összefüggő. Mivel $\pi_0(O(n-1)) \cong \mathbb{Z}_2$, egy 1-fogantyút kétféle tüskézéssel lehet ragasztani; az egyik irányítható, a másik nem-irányítható sokaságot ad (feltéve, hogy X irányítható és ∂X összefüggő).

(c) Mivel $n > 2$ esetén $\pi_{n-2}(O(1)) = \pi_{n-1}(O(0)) = 0$, ezekben az esetekben az n- és $(n-1)$-fogantyúk tüskézése egyértelmű. Vagyis $n > 2$ esetén az n- és $(n-1)$-fogantyúkat a φ_0 ragasztó leképezés meghatározza.

(d) Végül tekintsük a $k = 2$ esetet. Ismert, hogy $n > 4$ esetén $\pi_1(O(n-2)) = \mathbb{Z}_2$ és $\pi_1(O(2)) = \mathbb{Z}$, vagyis $n > 4$-re 2-fogantyúknak kétféle tüskézése van, $n = 4$ esetén pedig a tüskézéseket $\mathbb{Z}$ paraméterezi. Dimenzió okokból a $\varphi_0\colon S^1 \to \partial X$ ragasztó leképezés $n > 4$-re egyértelmű, $n = 4$ esetén pedig egy csomó a ∂X 3-dimenziós sokaságban.

Egy adott fogantyú-felbontást a "feje tetejére" állíthatunk (hasonlóan ahhoz, ahogy Morse elméletben az f függvényt $(1-f)$-re cserélhetjük): tekintsünk egy $D^k \times D^{n-k}$ fogantyút $\overline{\partial_+ X}$-hez az övgömbje mint ragasztási gömb mentén odaragasztott $(n-k)$-fogantyúnak. Ilymódon X-nek egy $(X, \overline{\partial_+ X})$ relatív fogantyú-felbontását kapjuk, amit az eredeti felbontás duálisának hívunk.

Vegyük észre, hogy fogantyúkat tetszőleges sorrendben ragaszthatunk ∂X-hez. Mint azt a következő állítás mutatja, feltehető azonban, hogy a fogantyúkat indexük szerinti növekvő sorrendben ragasztottuk.

1.2.6. tétel. *Legyen h^r és h^t egy-egy r és t indexű fogantyú, legyen továbbá $X' = X \cup h^r \cup h^t$ és tegyük fel, hogy $t \leq r$. Ekkor $X' \approx X \cup h^t \cup h^r$, vagyis a fogantyúk ragasztásának sorrendje felcserélhető.*

Bizonyítás. A h^r fogantyút $\partial D^r \times D^{n-r}$ mentén ragasztjuk ∂X-hez, majd a kapott n-dimenziós sokaság pereméhez ragasztjuk h^t-t. Ha ez utóbbi ragasztásról feltehetjük, hogy diszjunkt h^r övgömbjétől, akkor annak kis környezetétől, következésképp a h^r fogantyútól is diszjunkt lesz, amivel a bizonyítás készen is lenne. Mivel h^r övgömbje S^{n-r-1}, h^t ragasztási gömbje pedig S^{t-1} egy kópiája $\partial(X \cup h^r)$-ben, ezekről $\dim \partial(X \cup h^r) = n-1$ és $t \leq r$ (vagyis $\dim S^{n-r-1} + \dim S^{t-1} = n-r-1+t-1 \leq n-2$) miatt feltehetjük, hogy diszjunktak. □

1.2.7. következmény. *Adott $(X, \partial_- X)$ véges fogantyú-felbontás átrendezhető úgy, hogy a fogantyúk indexük szerint növekvő sorrendben kövessék egymást. Végtelen sok fogantyút tartalmazó felbontásra a fenti állítás nem feltétlenül igaz.* □

1.2.8. feladatok. **(a)** Adjunk egy fogantyú-felbontást S^1-re.

(b) Találjunk egy fogantyú-felbontást a Σ_g zárt, irányítható g génuszú (2-dimenziós) felületre.

1.3 Fogantyú-felbontások homológiái

A definíció alapján könnyen látható, hogy egy fogantyú-felbontás az X sokaságon egy CW-felbontást is megad — a fogantyúk n-dimenzióra megvastagított cellákként is felfoghatók. Tegyük fel tehát, hogy az X irányított sokaságra $(X, \partial_- X)$-en adott egy véges fogantyú-felbontás. Legyen h_1 egy $(k+1)$- míg h_2 egy k-fogantyú a fenti fogantyú-felbontásban. Jelölje $\alpha(h_1, h_2)$ a h_1 fogantyú $S_a(h_1)$ ragasztó gömbjének a h_2 fogantyú $S_b(h_2)$ övgömbjével vett algebrai metszetét.

1.3.1. megjegyzés. Mivel $S_a(h_1)$ és $S_b(h_2)$ komplementer dimenziós gömbök, és feltehető, hogy $S_a(h_1)$ transzverzálisan metszi $S_b(h_2)$-t, az $S_a(h_1) \cap S_b(h_2)$ metszet véges sok pontból áll. A fenti gömbök irányításával minden $p \in S_a(h_1) \cap S_b(h_2)$ ponthoz egy előjel rendelhető: ez az előjel $+$ ha $T_p S_a(h_1)$ egy pozitívan irányított bázisát $T_p S_b(h_2)$ egy pozitívan irányított bázisával összefűzve $T_p X$ egy pozitívan irányított bázisát kapjuk; az előjel $-$ egyébként. (Emlékezzünk vissza arra, hogy X irányíthatóságát feltettük.) Az így kapott előjelek összegét nevezzük h_1 és h_2 *algebrai metszetének*. Vegyük észre, hogy $\alpha(h_1, h_2)$ nemcsak $S_a(h_1)$ és $S_b(h_2)$ irányításától (mely szükséges ahhoz is, hogy a h_1 és h_2 fogantyúk $\mathbb{Z}$ együtthatós homológia elemeket definiáljanak), hanem h_1 és h_2 sorrendjétől is függ.

Jelölje C_k a felbontás k indexű fogantyúi által generált szabad Abel csoportot, és definiáljunk a $\partial h = \sum_j \alpha(h, h_j) h_j$ (h indexe $(k+1)$, míg a h_j fogantyúk indexe k) formulával egy $\partial \colon C_{k+1} \to C_k$ homomorfizmust. Mivel egy fogantyú megvastagított cellaként fogható fel, a következő eredmény adódik:

1.3.2. tétel. *A (C_k, ∂) lánc homológiája izomorf a $H_*(X, \partial X; \mathbb{Z})$ homológia-csoporttal.* □

1.3.3. feladatok. **(a)** Lássuk be, hogy egy g génuszú Σ_g (zárt, irányított) felület minden fogantyú-felbontásában legalább $2g$ darab 1-fogantyú szerepel.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $\partial X = \emptyset$ és X irányítható, akkor X^n minden fogatyú-felbontásában szerepel legalább egy 0- és egy n-fogantyú.

(c) Lássuk be, hogy S^1 minden fogantyú-felbontásában páros sok fogantyú szerepel. Bizonyítsuk be ugyanezt minden S^n ($n \geq 1$) gömbre is.

2. előadás

Kirby és Heegaard diagramok

2.1 Műveletek fogantyúkkal

Egy adott fogantyú-felbontásra két olyan alapvető művelet létezik, mely csak a felbontást — és nem a sokaság diffeomorfizmus-osztályát — változtatja: ezek a fogantyú-csúsztatás és elhagyható párok bevezetése/elhagyása. A következőkben e két műveletet fogjuk részleteiben tárgyalni. (Egyszerűség kedvéért a továbbiakban mindig feltesszük, hogy a szóbanforgó sokaságok irányíthatók.)

Legyen tehát X rögzített sokaság és h_1, h_2 két X-hez ragasztott k-fogantyú; az 1.2.6 tétel miatt feltehető hogy a két fogantyú diszjunkt. A h_1 fogantyú h_2-n való *átcsúsztatásán* a következőt értjük. Legyen $X' = X \cup h_2$, és vegyük a h_1 fogantyú $S_a(h_1)$ ragasztási gömbjének egy $x \in S_a(h_1) \subset \partial_+ X'$ pontját. Legyen továbbá $y \in S_b(h_2) \subset \partial_+ X'$ a h_2 fogantyú övgömbjének egy rögzített pontja. A fenti két pontot $\partial_+ X'$-ben egy $\gamma\colon [0,1] \to \partial_+ X'$ beágyazott úttal összekötve vehetjük γ nyílt tubuláris környezetét, mely tehát $M = (-\epsilon, 1+\epsilon) \times \operatorname{int} D^{n-2}$-vel diffeomorf. Az M térben könnyen található egy olyan ϑ_t $(t \in [0,1])$ izotópia, melyre $\vartheta_0 = \mathrm{id}_M$, $\vartheta_t(x) \in \gamma([0,1])$ és $\vartheta_1(x) = y$, valamint ϑ_t a γ szakasz egy kis nyílt környezetén kívül (melynek még lezártja is M-beli) az identitás. Ekkor ϑ_t a $\partial_+ X'$ egy izotópiájává terjeszthető ki, mely tehát az $S_a(h_1)$ ragasztási gömböt $\vartheta_1(S_a(h_1))$ gömbbe mozgatja, amikoris az elmetszi $S_b(h_2)$-t. Mivel $\dim S_a(h_1) + \dim S_b(h_2) = n-2$, az y pontban a $T_y\vartheta_1 S_a(h_1) \oplus T_y S_b(h_2)$ összeg $T_y\partial_+ X'$-nek 1-kodimenziós alterét adja: a kimaradó dimenzió negatív iránya azt az irányt mutatja ahonnan $S_a(h_1)$ a ϑ_t izotópiával érkezett, a pozitív pedig azt, amerre az izotópia folytatható.

2.1.1. definíció. Válsszunk egy fenti ϑ_t izotópiát majd folytassuk azt $t \in [0, 1+\epsilon]$-ra és egy további φ_s izotópiával mozgassuk $\vartheta_{1+\epsilon}(S_a(h_1))$-et vissza $\partial_+ X$-be. (Ez megtehető pl. a h_2 fogantyúról a $D^k \times \{p\}$ maggal párhuzamos diszk mentén való radiális letolással, ahol $y = (0,p)$.) Ilymódon tehát egy $\varphi_s \circ \vartheta_t\colon \partial_+ X' \to \partial_+ X'$ izotópiát kapunk, melyre $S'_a(h_1) = \varphi_1 \circ \vartheta_{1+\epsilon}(S_a(h_1)) \subset \partial_+ X$. Ezt az izotópiát az $S_a(h_1)$ normálnyalábjának egy trivializációjára (tehát h_1 egy tüskézésére) alkalmazva $S'_a(h_1)$-nek kapjuk egy tüskézését. Az új fogantyút (amit tehát a fenti $S'_a(h_1)$ gömb mentén ragasztunk a kapott tüskézéssel) a h_1 fogantyú h_2-n való *átcsúsztatottjának* nevezzük.

Mivel a ragasztási leképezéseket csak izotópiával változtattuk, a kapott fogantyú-felbontás az eredetivel diffeomorf sokaságot ad. A fenti operáció nemcsak h_1-től és h_2-től függ, hiszen γ-t és ϑ_t-t is szabadon választhatjuk. A fenti konstrukció alapján az is világos, hogy az új fogantyú — melyet $h_1 \pm h_2$-vel szokás jelölni — ragasztási gömbje éppen h_1 és h_2 ragasztási gömbjeinek γ út menti összefüggő összege lesz. Pontosabban, vegyünk egy, a h_2 ragasztási gömbjével párhuzamos $\partial D^k \times \{p\}$ gömböt, és ennek a γ út menti összefüggő összegét $S_a(h_1)$-gyel — az így kapott gömb lesz a $h_1 \pm h_2$ fogantyú ragasztási gömbje. Látható tehát, hogy a fogantyú-csúsztatás a homológiák szintjén egy $\{h_1, h_2\} \to \{h_1 \pm h_2, h_2\}$ bázistranszformációnak felel meg. Emlékezzünk vissza arra, hogy h_1 előjelét a C_k csoportban csak $S_a(h_1)$ egy irányításának rögzítésével kapjuk meg — ha az összefüggő összeg az irányításokat tartja, akkor a csúsztatással $h_1 + h_2$-t, ha fordítja akkor $h_1 - h_2$-t kapunk C_k-ban.

A másik fent említett alapvető művelet elhagyható párok bevezetése/elhagyása.

2.1.2. definíció. Egy (h_1^k, h_2^{k-1}) fogantyú-párt *elhagyható párnak* nevezünk, ha a két fogantyú uniója D^n-nel diffeomorf, és az unió ∂X-hez $D^{n-1} \subset \partial D^n$ mentén van odaragasztva. (Ebből adódóan X és $X \cup h_2^{k-1} \cup h_1^k$ diffeomorfak.)

2.1.3. állítás. *A D^n n-dimenziós diszk minden $k \leq n$-re felbontható egy (h_1^k, h_2^{k-1}) elhagyható pár uniójára.*

Bizonyítás. Legyen $D^n = D^k \times D^{n-k}$ és osszuk fel ∂D^k-t $D_+^{k-1} \cup D_-^{k-1}$ (az alsó és a felső félgömb) uniójára. Ragasszuk D^n-t a $D_-^{k-1} \times D^{n-k}$ diszk mentén ∂X-hez; ilymódon nyilván nem változtatjuk meg X diffeomorfizmus-típusát. Vegyük $D_+^{k-1} \subset D^k$ egy kis környezetét, ami tehát $D_+^{k-1} \times D^1 \subset D^k$-t, illetve egy $(D_+^{k-1} \times D^1) \times D^{n-k} \subset D^n$ részt definiál. Ilymódon egy h_2 $(k-1)$-fogantyút kapunk, amit $(D_+^{k-1} \cap D_-^{k-1}) \times D^{n-k}$ mentén ragasztottunk ∂X-hez. (Ez utóbbi $(S^{k-2} \times D^1) \times D^{n-k}$-val diffeomorf, vagyis az így definiált h_2 valóban egy $(k-1)$-fogantyú.) Az eredeti D^n diszk h_2-n kívüli része tehát $X \cup h_2$-höz van egy $\partial D^k \times D^{n-k}$-val diffeomorf rész mentén odaragasztva, így valóban egy h_1 k-fogantyút alkot. Vegyük észre, hogy h_1 ragasztási és h_2 övgömbje egy pontban metszik egymást. □

A következő tétel a fenti észrevétel megfordítottját mondja ki:

2.1.4. tétel. *Legyen (h_1^k, h_2^{k-1}) fogantyú-pár egy adott fogantyú-felbontásban. Ha h_1 ragasztási és h_2 övgömbje egy pontban metszik egymást, akkor (h_1, h_2) egy elhagyható párt alkot.*

Bizonyítás. A k-fogantyú ragasztási gömbjének egy (megfelelően kis) diszk-komplementumát a $(k-1)$-fogantyúba olvasztva az előző állításban szereplő modellt kapjuk meg, amiről pedig látható, hogy elhagyható párt alkot. □

A két művelet alapvető fontosságát a következő tétel mutatja.

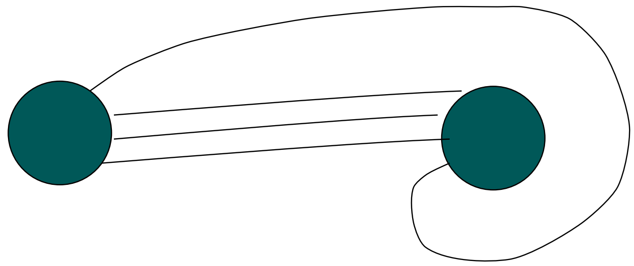
2.1.5. tétel. (Cerf, [Ce]) *Két relatív fogantyú-felbontás pontosan akkor ad diffeomorf sokaságokat, ha az egyik fogantyú-csúsztatások, elhagyható párok elhagyása/bevezetése és izotópiák véges sokszori alkalmazásával a másikba alakítható.* □

2.1.6. megjegyzés. Mivel egyik fent felsorolt módosítás sem változtatja meg a fogantyú-felbontás diffeomorfizmus-típusát, a 2.1.5 tétel egyik iránya kézenfekvő. A másik irány (tehát hogy diffeomorf fogantyú-felbontások a három operációval egymásba alakíthatók) bizonyítása a következő ötleten alapul: vegyünk két, a felbontásokat indukáló Morse függvényt, és kössük össze ezeket a Morse függvények terében egy γ_t úttal. Ezt a függvényteret analizálva belátható, hogy a γ_t út választható úgy, hogy véges sok t értéktől eltekintve a Morse függvények injektívek legyenek kritikus pontjaik halmazán. A véges sok t értékben pedig vagy azonos indexű kritikus pontok képződnek ugyanarra a kritikus értékre (ez felel meg a fogantyú-csúsztatásnak), vagy szomszédos indexű kritikus pontok keletkeznek/tűnnek el (ami elhagyható párok bevezetésének/elhagyásának felel meg). A részletekről lásd [Ce], [K1]. A továbbiakban a 2.1.5 tételnek csak a triviális irányát fogjuk használni.

2.1.7. állítás. *Adott összefüggő fogantyú-felbontásról feltehető, hogy legfeljebb egy 0-fogantyút tartalmaz. (Ha $\partial_- X = \emptyset$, akkor pontosan egyet, ha $\partial_- X \neq \emptyset$, akkor egyet sem.) A duális felbontást véve hasonló látható be n-fogantyúkra is.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\partial_- X = \emptyset$; ekkor a fogantyú-felbontás elkezdéséhez szükség van 0-fogantyúra (lásd még az 1.3.3(b) feladatot). Két 0-fogantyút egy 1-fogantyú köt össze (hiszen az 1-fogantyú az egyetlen olyan fogantyú-típus, melynek ragasztási gömbje nem összefüggő), így az egyik 0- és az 1-fogantyú elhagyható párt alkot. Amennyiben $\partial_- X \neq \emptyset$, a fenti érveléssel minden 0-fogantyú elhagyható. (Vegyük észre, hogy egy fenti tulajdonságú 1-fogantyú létezéséhez fel kellett tennünk, hogy a sokaság összefüggő.) A duális felbontás vételével a fenti átalakítás után belátható, hogy $\partial_+ X = \emptyset$ esetén egyetlen n-fogantyú, $\partial_+ X \neq \emptyset$ esetén pedig egy n-fogantyú sem szerepel a fogantyú-felbontásban. □

2.1.8. feladatok. (a) Lássuk be, hogy egy 0- és k darab 1-fogantyú uniója $\#kS^1 \times D^{n-1}$-gyel diffeomorf. (Emlékezzünk arra, hogy irányíthatóságot minden sokaságról feltettünk.) (*Ötlet:* Lássuk be először $k = 1$-re, majd akalmazzunk indukciót.)



2.1 ábra: Egy Heegaard diagram

(b) Bizonyítsuk be, hogy egy zárt, összefüggő 1-dimenziós sokaság diffeomorf S^1-gyel.

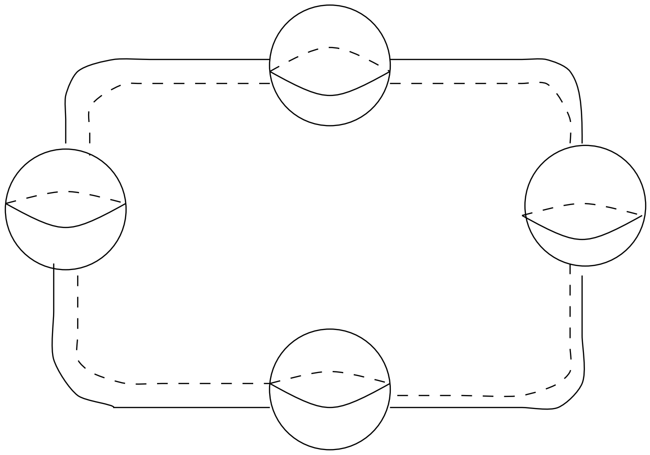
(c) Osztályozzuk a zárt, összefüggő 2-dimenziós sokaságokat.

2.2 Heegaard és Kirby diagramok

A fentiek értelmében tehát egy M zárt 3-sokaság egy 0-, egy 3-, k darab 1- és k darab 2-fogantyúval építhető fel. (Az 1- és 2-fogantyúk száma megegyezik, hiszen a 2.1.8(a) feladat értelmében $M_1 = \{$0-fogantyú $\cup$ 1-fogantyúk$\} = \#k_1 S^1 \times D^2$ a k_1 darab 1-fogantyúra, míg a duális felbontás vételével $M - \mathrm{int}\, M_1 = \{$3-fogantyú $\cup$ 2-fogantyúk$\} = \#k_2 S^1 \times D^2$ a k_2 darab 2-fogantyúra. Mivel $\partial M_1 \approx \overline{\partial(M - M_1)}$, $k_1 = k_2$ következik.) A 0-fogantyú D^3 egy kópiája, melynek S^2 határát $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$-vel azonosítva az 1-fogantyúk ragasztási gömbjei a síkba rajzolhatók. (Emlékezzünk, hogy M irányíthatóságát feltéve egy 1-fogantyú tüskézése egyértelmű.) Az 1-fogantyúkat tehát diszk-párok jelképezik; a 2-fogantyúkat pedig ∂M_1-beli ragasztási köreikkel jelölhetjük. (Ismét, 1.2.5(c) miatt a tüskézés egyértelmű.) Ezek tehát olyan "körök" a síkban, melyek egy 1-fogantyú egyik diszkjébe futva a másikban fognak kijönni, hiszen közben átmennek az 1-fogantyún. Tegyük fel, hogy egy 2-fogantyú ragasztási köre egy 1-fogantyún annak magjával párhuzamosan halad át. Az 1-fogantyúk diszkpárjait a középpontjaikat összekötő szakasz felezőmerőlegesére való tükrözéssel azonosítva a 2-fogantyúk ragasztási köreinek $\mathbb{R}^2$-be eső része meghatározza a köröket a $\partial(\{$0-fogantyúk $\cup$ 1-fogantyúk$\}) = \partial(\#kS^1 \times D^2)$ 2-sokaságban. Ilymódon tehát $M_2 = D^3 \cup \{$1-fogantyúk$\} \cup \{$2-fogantyúk$\}$ egy $\mathbb{R}^2$-beli rajzzal jelképezhető. Mivel a 3-fogantyú ragasztása már egyértelmű, a fent leírt diagram, az M 3-sokaság *Heegaard diagramja* jeleníti meg a 3-sokaságot. A 2.1 ábra példát mutat egy Heegaard diagramra.

2.2.1. megjegyzés. A fentiek szerint M előáll $(\{$0-fogantyú $\cup$ 1-fogantyúk$\}) \cup (\{$2-fogantyúk $\cup$ 3-fogantyú$\})$ unióként; a 2.1.8(a) feladat szerint mindkét rész egy g génuszú felület tömör H_g belsejével azonosítható. Egy 3-sokaság ilyen felbontását *Heegaard felbontásnak* nevezik. Ilymódon tehát egy M 3-sokaság egy g szám és egy $f\colon \partial H_g \to \partial H_g$ diffeomorfizmus segítségével írható le. (A Heegaard diagram éppen ∂H_g megfelelő köreinek képét adja meg ∂H_g egy másik kópiájában.) Az $\{f\colon \partial H_g \to \partial H_g \mid f$ diffeomorfizmus$\}$ csoportnak az identitást tartalmazó komponenssel vett faktorát az $\mathcal{M}_g$ *leképezés-osztály csoportnak* nevezzük. Mivel f-et a fenti $f\colon \partial H_g \to \partial H_g$ azonosításhoz csak izotópia erejéig kell megadnunk, elégséges az $[f] \in \mathcal{M}_g$ elemet leírni ahhoz, hogy M-et visszakapjuk. Következésképp M leírásához pusztán g-t és az $[f] \in \mathcal{M}_g$ csoportelemet kell megadni. Az $\mathcal{M}_g$ csoport azonban még nem teljesen feltérképezett, így a 3-sokaságok osztályozása még nem teljes.

Egy 4-dimenziós (zárt, irányítható) sokaság esetében egy 0-, egy 4- és néhány 1-, 2- és 3-fogantyút kell ábrázolnunk. Ismét tekinthetjük a 0-fogantyú S^3 peremét mint $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$-t; ebben az 1-fogantyúk ragasztási gömbjei tehát gömbpárokként, a 2-fogantyúk ragasztási körei pedig (esetleg az 1-fogantyúk gömbjeibe belefutó, és a másik gömbből ismét előtűnő) körökkel jelképezhetők. (Rajzolni csak $\mathbb{R}^3$-ban tudunk — amennyiben egy 2-fogantyú ragasztási köre egy 1-fogantyún halad át, feltesszük, hogy a fogantyún annak magjával párhuzamosan megy át.) Irányíthatóságot feltételezve az 1-fogantyúk tüskézése egyértelmű; 2-fogantyúkra azonban a tüskézések egy affin $\mathbb{Z}$-teret alkotnak. Egy 2-fogantyú tüskézését (ami tehát a beágyazott S^1 normálnyalábjának trivializációja) egy, a ragasztási körrel párhuzamos $\partial D^2 \times \{p\}$ kör meghatározza; hiszen ν(ragasztási kör)$\cong S^1 \times D^2 \cong S^1 \times \mathbb{C}$-t egy sehol sem eltűnő szelés trivializál. Ilymódon tehát a 0-, 1-



2.2 ábra: Egy Kirby diagram

és 2-fogantyúk unióját egy olyan $\mathbb{R}^3$-beli rajz szemlélteti, ahol az 1-fogantyúkat gömbpárok jelképezik, a 2-fogantyúknak pedig olyan körök felelnek meg, amik egy gömbbe futva a pár másik gömbjében jelennek meg újra (amikor is S^1 átmegy az 1-fogantyún), és minden ilyen ragasztási kör mentén fut egy (esetleg más színnel megkülönböztetett vagy szaggatott vonallal jelzett) kísérő kör, mely a tüskézést mutatja meg. A 3-fogantyúk ragasztási gömbjeinek rajzolása némileg nehezebb feladat, mivel az eddigi fogantyú-felbontás határába ágyazott S^2-ket kellene lerajzolni. A következő tétel értelmében azonban ez szükségtelen.

2.2.2. tétel. ([LP]) *A 3- és 4-fogantyúk uniójának (mely tehát $\#mS^1 \times D^3$-mal diffeomorf) határán értelmezett minden diffeomorfizmus kiterjed a 4-sokaságra.* $\square$

Ilymódon tehát a 3- és 4-fogantyúkat tetszőlegesen odaragasztva ugyanazt a 4-sokaságot kapjuk; következésképp rajzunkban csak azt kell feljegyezni, hogy a megfelelő fogantyúkat odaragasztottuk-e vagy sem. Az így kapott diagramot az X 4-sokaság *Kirby diagramjának* nevezzük. Egy $(X, \partial_- X)$ relatív fogantyú-felbontás Kirby diagramját, illetve egy fogantyú-csúsztatás (ill. elhagyható párok bevezetése/elhagyása) Kirby diagramokra gyakorolt hatását a 6. előadásban fogjuk tárgyalni. Előtte azonban néhány, speciálisan 4-dimenziós sokaságokra vonatkozó definícióval és tétellel fogunk megismerkedni. A 2.2 ábra példát mutat egy Kirby diagramra.

2.2.3. megjegyzés. A fentiekben csak irányítható és zárt sokaságokkal foglalkoztunk. A nem-irányítható eset hasonlóan intézhető el — pusztán az 1-fogantyúk tüskézésére kell egy új szimbólumot bevezetnünk, lásd például [A]. Amennyiben a sokaság nem zárt (vagyis $\partial X \neq \emptyset$), a 0-, 1- és 2-fogantyúk ábrázolása a fent leírt módon történik; a 2.2.2 tétel azonban felteszi, hogy a 4-sokaság zárt. Belátható [Tr], hogy ha X egyszeresen összefüggő és ∂X összefüggő, akkor a 3-fogantyúk ragasztása egyértelmű — következésképp ez utóbbi esetekben megtarthatjuk korábbi konvencióinkat. Nem egyszeresen összefüggő határos X esetében azonban a 3-fogantyúk ragasztási gömbjeinek változtatása megváltoztathatja X diffeomorfizmus-típusát is — erre az esetre nincs kidolgozott szimbólum-rendszer.

3. előadás

Szimmetrikus formák

3.1 4-sokaságok kohomológiái

Legyen X egy zárt, irányított, topologikus 4-sokaság. Definiáljuk a $Q_X\colon H^2(X;\mathbb{Z}) \times H^2(X;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ bilineáris függvényt a következő formulával: $Q_X(a,b) = \langle a \cup b, [X] \rangle$. Az ilymódon $H^2(X;\mathbb{Z})$-n értelmezett szimmetrikus bilineáris formát az X sokaság *metszetformájának* nevezzük. (Az elnevezés okára később még visszatérünk.) A Q_X forma az X 4-sokaság egyik legfontosabb invariánsa, hiszen pl. az egyszeresen összefüggő esetben meghatározza a $H^*(X;\mathbb{Z})$ kohomológia-gyűrűt, sőt X homotópia és (lényegében) homeomorfia típusát is.

3.1.1. megjegyzés. A Q_X forma definíciója kiterjeszthető peremes és nyílt sokaságokra is (relatív illetve kompakt tartójú kohomológiákat alkalmazva), és a nem-irányítható esetre is, amikor pedig $\mathbb{Z}_2$-együtthatókat kell választani. A továbbiakban jobbára zárt, irányítható (a legtöbb esetben egyszeresen összefüggő) sokaságokkal fogunk foglalkozni.

3.1.2. feladat. Legyen G egy végesen prezentált csoport. Találjunk olyan sima 4-dimenziós zárt (irányított) 4-sokaságot, melyre $\pi_1(X) \cong G$.

Mivel csoportok izomorfizmusa algoritmussal el nem dönthető probléma, a továbbiakban (a fenti feladat állításából eredő komplikációk elkerülése végett) tegyük fel, hogy $\pi_1(X) = 1$. Legyen tehát X egyszeresen összefüggő, zárt, irányított 4-sokaság. Mivel $H^1(X;\mathbb{Z}) = H_1(X;\mathbb{Z}) = H^3(X;\mathbb{Z}) = H_3(X;\mathbb{Z}) = 0$ és $H^0(X;\mathbb{Z}) = H_4(X;\mathbb{Z}) = H^4(X;\mathbb{Z}) = H_0(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, X kohomológiáját $H^2(X;\mathbb{Z}) \cong H_2(X;\mathbb{Z})$ határozza meg; a gyűrűstruktúra éppen Q_X-szel adható meg.

3.1.3. lemma. *A $H^2(X;\mathbb{Z})$ kohomológia csoport egy $\{a_1,\ldots,a_n\}$ bázisát rögzítve a $B = [Q_X(a_i,a_j)]_{ij}$ mátrix determinánsa ± 1.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha_i \in H_2(X;\mathbb{Z})$ a fenti bázis (algebrai) duálisa (vagyis $a_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$), és legyen $\beta_i = PD(a_i)$ az a_i elem Poincaré duálisa. Könnyen látható, hogy az $\{\alpha_i\} \to \{\beta_i\}$ bázistranszformáció mátrixa éppen B; mivel egy bázistranszformáció $\mathbb{Z}$ felett invertálható, $\det B = \pm 1$ adódik. □

Jelölje $\overline{X}$ az X 4-sokaságot az adottal ellentétes irányítással ellátva. A definíció alapján könnyen látható, hogy $Q_{\overline{X}} = -Q_X$. A szimmetrikus formáknak a 4-dimenziós topológiában játszott fontos szerepe miatt a fejezet hátralevő részét szimmetrikus formák tárgyalásának szenteljük, és csak a következő fejezetben térünk vissza a 4-dimenziós sokaságok témaköréhez.

3.1.4. definíció. Egy Q szimmetrikus, bilineáris, egész értékű formát egy A szabad Abel csoporton *unimodulárisnak* nevezünk, ha determinánsa egy bázisban ± 1. (Mivel egy A szabad Abel csoport bázistranszformációjának determinánsa ± 1, és Q egy M mátrixát a C bázistranszformáció $M \mapsto C^T M C$ szerint transzformálja, így $\det Q$ bázisválasztástól függetlenül jóldefiniált.)

Legyen $x \in A$-ra $L_x\colon A \to \mathbb{Z}$ az $L_x(y) = Q(x,y)$ formulával definiált homomorfizmus; ilymódon egy $L\colon A \to A^* = \mathrm{Hom}(A;\mathbb{Z})$ leképezést kapunk.

3.1.5. lemma. *Q pontosan akkor unimoduláris, ha L izomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyen $\{a_1, \dots, a_n\}$ A-nak egy bázisa, és vegyük az $\{a_1^*, \dots, a_n^*\} \subset A^*$ duális bázist, amelyre tehát $a_i^*(a_j) = \delta_{ij}$. Könnyen látható, hogy L mátrixa éppen $[Q(a_i, a_j)]_{ij}$ lesz; mivel L pontosan akkor izomorfizmus, ha mátrixa invertálható, a lemma adódik. □

3.2 Szimmetrikus unimoduláris formák osztályozása

Tegyük fel, hogy Q egy, az A szabad Abel csoporton megadott szimmetrikus bilineáris forma.

3.2.1. definíció. A Q forma $rk(Q)$ *rangja* az A csoport rangja. Terjesszük ki Q-t az $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ vektortérre lineárisan, és írjuk fel diagonális alakban (ilyen bázis mindig létezik). A főátlóban lévő 1-ek száma legyen $b^+(Q)$, a (-1)-eké pedig $b^-(Q)$. A $\sigma(Q) = b^+(Q) - b^-(Q)$ különbséget a Q forma *szignatúrájának* hívjuk. Nevezzük Q-t *párosnak*, ha $Q(a, a)$ minden $a \in A$ esetén páros, és *páratlannak* egyébként. A Q formát *pozitív (negatív) definitnek* hívjuk, ha $rk(Q) = \sigma(Q)$ $(rk(Q) = -\sigma(Q))$. Ha Q_i adott formák A_i-n $(i = 1, 2)$, akkor a $Q = Q_1 \oplus Q_2$ formát $A_1 \oplus A_2$-n a következő formula adja meg: $Q(a, b) = Q_1(a_1, b_1) + Q_2(a_2, b_2)$ ahol $a_i, b_i \in A_i$. Egy $k > 0$ egész esetén kQ-t Q önmagával vett k-szoros direkt összegeként értelmezzük; $k < 0$-ra $kQ = |k|(-Q)$. (A $k = 0$ esetben kQ definíció szerint a 0 forma a triviális Abel csoporton.) A Q_1 és Q_2, A-n értelmezett formák ekvivalensek, ha létezik olyan $\varphi \in Aut(A)$ melyre $Q_1(a, b) = Q_2(\varphi(a), \varphi(b))$. Ez pontosan akkor fordul elő, ha léteznek olyan bázisok, melyekben Q_1 és Q_2 mátrixai megegyeznek.

Definit formákat meglehetősen nehéz osztályozni; ismert például, hogy 40 rangú definit unimoduláris formából legalább 10^{50} különböző (nem-ekvivalens) van. Az indefinit eset — amit most tárgyalni fogunk — azonban sokkal egyszerűbb; mint látni fogjuk, a 4-dimenziós sokaságok szempontjából (szerencsés módon) éppen az indefinit formák fontosak.

3.2.2. tétel. *A Q_1 és Q_2 indefinit, unimoduláris, szimmetrikus bilineáris formák pontosan akkor ekvivalensek, ha $rk(Q_1) = rk(Q_2)$, $\sigma(Q_1) = \sigma(Q_2)$ és Q_1, Q_2 paritása megegyezik.*

A fenti tétel bizonyításához a következő — bonyolult algebrai geometriát igénylő — tételt fogjuk felhasználni (lásd [MH]):

3.2.3. tétel. *Ha Q indefinit és $A \neq 0$, akkor létezik olyan $a \neq 0$ elem A-ban melyre $Q(a, a) = 0$.* □

Jelölje H a $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ mátrixszal reprezentált formát. Ekkor

3.2.4. lemma. *Ha a Q indefinit forma szignatúrája 0, akkor Q vagy az $n\langle 1\rangle \oplus n\langle -1\rangle$ vagy az lH formával ekvivalens.*

Bizonyítás. Legyen $a \in A - \{0\}$ olyan, hogy $Q(a, a) = 0$; tegyük fel továbbá, hogy ha $a = da'$, akkor $d = \pm 1$. (Az ilyen elemeket *primitív* elemeknek szokás nevezni.) Ekkor létezik olyan $b \in A$, melyre $Q(a, b) = 1$, és könnyen belátható, hogy az $\langle a, b\rangle$ altér merőlegesén Q továbbra is unimoduláris.

3.2.5. feladat. Lássuk be, hogy $Q|_{\langle a,b\rangle} \cong \langle 1\rangle \oplus \langle -1\rangle$ ha $Q(b, b)$ páratlan, és $Q|_{\langle a,b\rangle} \cong H$ ha $Q(b, b)$ páros.

Vegyük észre, hogy mivel H és $\langle 1\rangle \oplus \langle -1\rangle$ szignatúrája 0, Q-t az $\langle a, b\rangle^{\perp}$ altérre megszorítva továbbra is 0 szignatúrájú formával van dolgunk. Indukciót alkalmazva tehát Q-t $n_1 H \oplus n_2(\langle 1\rangle \oplus \langle -1\rangle)$ alakban bontottuk fel. Amennyiben $n_1 = 0$ vagy $n_2 = 0$, éppen a lemma által kívánt felbontást kaptuk. A következő lemma már befejezi a 3.2.4 lemma bizonyítását. □

3.2.6. lemma. *$H \oplus \langle -1\rangle \cong 2\langle -1\rangle \oplus \langle 1\rangle$, így $H \oplus \langle 1\rangle \oplus \langle -1\rangle \cong 2(\langle 1\rangle \oplus \langle -1\rangle)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy Q mátrixa az $\{a,b,c\}$ bázisban $H \oplus \langle -1\rangle$. A formát az $\{a-c, b-c, a+b-c\}$ új bázisban felírva $2\langle -1\rangle \oplus \langle 1\rangle$ adódik, ami bizonyítja a fenti lemmát. □

Térjünk most vissza a 3.2.2 tétel bizonyítására. Tegyük fel, hogy $\sigma(Q_1) = \sigma(Q_2) > 0$ és alkalmazzunk $\sigma(Q)$ szerinti indukciót. (A negatív szignatúrájú eset analóg módon intézhető el, úgyhogy arra nem fogunk külön kitérni.) Legyen tehát $Q = Q_1 \oplus \langle -1\rangle$; vegyük észre, hogy $Q_2 \oplus \langle -1\rangle$ azonos rangú és szignatúrájú, szintén páratlan forma. Következésképp — indukció szerint — $Q \cong Q_2 \oplus \langle -1\rangle$. Tegyük fel, hogy Q_i az A_i Abel csoporton értelmezett forma $(i=1,2)$; így Q-t az $A = A_1 \oplus \langle x\rangle \cong A_2 \oplus \langle y\rangle$ eggyel nagyobb rangú csoporton definiáltuk. A fenti definíció szerint $Q(x,x) = Q(y,y) = -1$.

3.2.7. definíció. Egy $a \in A$ elem *karakterisztikus* ha minden $b \in A$-ra $Q(a,b) \equiv Q(b,b) \pmod 2$. Vegyük észre, hogy Q pontosan akkor páros, ha $0 \in A$ karakterisztikus.

A fenti konstrukcióban tehát x (illetve y) pontosan akkor karakterisztikus ha Q_1 (ill. Q_2) páros, hiszen $Q(x,q) = 0$ minden $q \in \langle x\rangle^{\perp}$-re. Ilymódon tehát — mivel Q_1 és Q_2 paritása megegyezik — x és y egyszerre karakterisztikusak. A következő tétel szerint ebből az következik, hogy a Q formának létezik egy x-et y-ba, így Q_1-et Q_2-be vivő automorfizmusa, mely a tételt már bizonyítja.

3.2.8. tétel. (Wall, [W1]) *Legyen Q unimoduláris forma A-n és tegyük fel, hogy $x,y \in A$-ra $Q(x,x) = Q(y,y) = -1$. Ha x és y karakterisztikusak, akkor létezik egy $\varphi \in Aut(A,Q)$ automorfizmus, melyre $\varphi(x) = y$. Hasonló φ létezik akkor is ha sem x sem y nem karakterisztikus.* □

Evvel a 3.2.2 tétel bizonyítását befejeztük. □

3.3 Néhány unimoduláris forma

Egy Q unimoduláris formára (a $b_+(Q) + b_-(Q) = rk(Q)$ és $b_+(Q) - b_-(Q) = \sigma(Q)$ azonosságok miatt) $|\sigma(Q)| \leq rk(Q)$ és $\sigma(Q) \equiv rk(Q) \pmod 2$ mindig teljesül. Legyen Q páratlan indefinit, és vegyük a $Q' = \frac{1}{2}(rk(Q) + \sigma(Q))\langle 1\rangle \oplus \frac{1}{2}(rk(Q) - \sigma(Q))\langle -1\rangle$ formát. Könnyen látható, hogy Q' rangja, szignatúrája és paritása megegyezik Q-éval, így a 3.2.2 tétel értelmében ekvivalens Q-val.

3.3.1. következmény. *A $(rk(Q), \sigma(Q)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ pár egy páratlan indefinit Q forma teljes invariáns rendszerét alkotja. Továbbá, ha $|\sigma| < rk$ és $rk \equiv \sigma \pmod 2$, akkor létezik az előírt (rk, σ) invariánsokkal rendelkező (páratlan, indefinit) unimoduláris forma.* □

A fenti két reláció természetesen páros formákra is áll. Ebben az esetben azonban egy további oszthatósági reláció is teljesül:

3.3.2. lemma. *Legyen Q tetszőleges unimoduláris forma és x egy karakterisztikus elem. Ekkor $\sigma(Q) \equiv Q(x,x) \pmod 8$. Ilymódon, ha Q páros, akkor $\sigma(Q)$ osztható nyolccal.*

Bizonyítás. Vegyük a $Q \oplus \langle 1\rangle \oplus \langle -1\rangle$ formát. Mivel ez indefinit és páratlan, a 3.3.1 következmény alapján $Q \oplus \langle 1\rangle \oplus \langle -1\rangle \cong (b_+(Q)+1)\langle 1\rangle \oplus (b_-(Q)+1)\langle -1\rangle$. Tegyük fel, hogy a $Q \oplus \langle 1\rangle \oplus \langle -1\rangle$ felbontában lévő $\langle 1\rangle$ részt e_+, a $\langle -1\rangle$ részt pedig e_- generálja. Könnyen látható, hogy $x + e_+ + e_-$ karakterisztikus elem $Q \oplus \langle 1\rangle \oplus \langle -1\rangle$-re nézve (mivel x karakterisztikus volt Q-ra nézve). Abban az $\{a_1, \ldots a_n\}$ bázisban, melyben $Q \oplus \langle 1\rangle \oplus \langle -1\rangle$ diagonális alakú, $x + e_+ + e_-$ minden együtthatója páratlan, hiszen $Q(x + e_+ + e_-, a_i) \equiv Q(a_i, a_i) = \pm 1$. Ilymódon $x + e_+ + e_- = \sum \alpha_i a_i + \sum \beta_j a_j$, tehát $Q(x + e_+ + e_-, x + e_+ + e_-) = \sum_{i=1}^{b_+(Q)+1} \alpha_i^2 - \sum_{i=1}^{b_-(Q)+1} \beta_i^2$, ahol az α_i-k és a β_j-k páratlanok. Mivel egy páratlan szám négyzete 1-gyel kongruens moduló 8, a fenti azonosság $Q(x,x) = Q(x + e_+ + e_-, x + e_+ + e_-) \equiv (b_+(Q)+1) - (b_-(Q)+1) = \sigma(Q) \pmod 8$ kongruenciát adja, amivel a bizonyítás kész. Mivel Q pontosan akkor páros, ha $0 \in A$ karakterisztikus, a fenti kongruencia azt mutatja, hogy páros Q-ra $\sigma(Q)$ osztható 8-cal. □

Legyen tehát $H = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ és

$$E_8 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

páros formák. Mivel $rk(H) = 2$, $\sigma(H) = 0$, $rk(E_8) = 8$ és $\sigma(E_8) = 8$, a következő állítás könnyen következik.

3.3.3. állítás. *Tegyük fel, hogy egy $(rk, \sigma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ számpárra $|\sigma| < rk$, $\sigma \equiv rk \pmod 2$ és $\sigma \equiv 0 \pmod 8$ teljesül. Ekkor létezik (pontosan egy) olyan Q páros unimoduláris forma, melyre $rk(Q) = rk$ és $\sigma(Q) = \sigma$. A fentiek értelmében minden indefinit páros formára teljesülnek a fenti relációk.*

Bizonyítás. Adott (fenti tulajdonságokkal bíró) (rk, σ) esetén vegyük a $\frac{\sigma}{8}E_8 \oplus \frac{rk-|\sigma|}{2}H$ páros formát. Az állítást könnyű számolás és a fenti tételek alkalmazása adja. $\square$

Összefoglalva tehát, egy Q unimoduláris (szimmetrikus, bilineáris) forma vagy definit (és ekkor nincs jó leírásunk), vagy indefinit, amikor is (paritásától függően) $n\langle 1\rangle \oplus m\langle -1\rangle$ vagy $aE_8 \oplus bH$ alakú.

3.3.4. megjegyzés. A fenti E_8 formát az E_8 kivételes Lie-algebra Cartan mátrixából származtattuk — ez a leírás magyarázza az elnevezést.

4. előadás

Nevezetes tételek 4-sokaságokra

4.1 4-sokaságok homotópia és homeomorfia típusai

Mint azt már korábban láttuk, egy egyszeresen összefüggő (topologikus) 4-sokaság (ko)homológia-gyűrűjét a Q metszetforma egyértelműen meghatározza. Ha az X sokaság zárt és irányított, akkor (a Poincaré-dualitás miatt) a Q_X metszetforma egy szimmetrikus, bilineáris, unimoduláris forma. A következőkben a metszetforma és a sokaság homotópia-típusa, később a homeomorfizmus- majd diffeomorfizmus-osztálya közötti kapcsolatot vizsgáljuk meg.

4.1.1. tétel. *Az X_1 és X_2 egyszeresen összefüggő topologikus 4-sokaságok pontosan akkor homotóp ekvivalensek, ha metszetformáik izomorfak.*

A fenti tétel bizonyítását a következő fejezetben adjuk meg. A 4.1.1 tétel finomításának tekinthető a következő, M. Freedmantól származó eredmény.

4.1.2. tétel. (Freedman, [F]) *Minden Q szimmetrikus, bilineáris, unimoduláris formára létezik olyan X egyszeresen összefüggő topologikus négysokaság, melyre $Q_X \cong Q$. Ha Q páros, akkor a fenti X homeomorfizmus erejéig egyértelmű. Páratlan Q esetén pontosan két, nem-homeomorf fenti tulajdonságú 4-sokaság létezik; ezek közül legfeljebb az egyik látható el sima struktúrával.* □

E tétel bizonyítása meglehetősen bonyolult; a későbbiekben röviden vázolni fogjuk a bizonyítás menetét. A fenti két tétel szerint tehát páros metszetformájú topologikus 4-sokaságok pontosan akkor homeomorfak, ha homotóp ekvivalensek, valamint két sima egyszeresen összefüggő 4-sokaság pontosan akkor homeomorf ha homotóp ekvivalens. A 4.1.2 tétel egy speciális esete (az ún. *topologikus 4-dimenziós Poincaré sejtés*) kiemelést érdemel:

4.1.3. következmény. *Ha az X topologikus 4-sokaság homotóp ekvivalens az S^4 4-dimenziós gömbbel, akkor homeomorf is vele.* □

Tegyük most fel, hogy X egyszeresen összefüggő sima 4-sokaság; a fenti tétel értelmében X topológiáját Q_X egyértelműen meghatározza. Az azonban nem világos, milyen Q szimmetrikus bilineáris forma fordul elő mint egy *sima* 4-sokaság metszetformája, illetve hogy Q_X meghatározza-e X-et diffeomorfizmus erejéig is. A következőkben ezekre a kérdésekre adunk majd (részleges) választ.

4.1.4. tétel. (Donaldson, [D1]) *Ha X sima egyszeresen összefüggő 4-sokaság és Q_X negatív definit, akkor $Q_X \cong n\langle -1\rangle$. Hasonlóan, pozitív definit Q_X esetén $Q_X \cong n\langle 1\rangle$.* □

Emlékezzünk vissza, hogy definit metszetformákra nem tudtunk egyszerű osztályozási sémát találni (szemben az indefinitekkel, melyeket rangjuk, szignatúrájuk és paritásuk meghatározott). A fenti tétel értelmében *sima* 4-sokaságok szempontjából csak a legegyszerűbb, úgynevezett *diagonális* definit metszetformák ($\pm n\langle 1\rangle$) érdekesek. A továbbiakban szorítkozzunk ismét indefinit metszetformákra.

4.1.5. tétel. (Rohlin, [R]) *Ha X sima egyszeresen összefüggő 4-sokaság és Q_X páros, akkor $\sigma(X) \equiv 0 \pmod{16}$, vagyis $Q_X \cong 2kE_8 \oplus lH$ ($k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$).* □

4.1.6. megjegyzés. A fenti tétel általánosítható nem egyszeresen összefüggő 4-sokaságokra is; az általános tétel a következőképpen szól: Tegyük fel, hogy X sima spin 4-sokaság. Ekkor 16 osztja $\sigma(X)$-et. (Spin sokaságokról a későbbiekben még lesz szó.)

4.1.7. tétel. (Furuta, [Fu]) *Ha X egyszeresen összefüggő sima 4-sokaság és Q_X páros (tehát $Q_X \cong 2kE_8 \oplus lH$), akkor $l \geq 2|k| + 1$.* □

A fenti három tétel szerint tehát egy sima egyszeresen összefüggő 4-sokaság metszetformája $n\langle 1\rangle \oplus m\langle -1\rangle$ vagy $2kE_8 \oplus lH$ ($l \geq 2|k| + 1$) alakú lehet. Mint azt később látni fogjuk, a fenti páratlan, és $l \geq 3|k|$ esetén a páros metszetformák elő is fordulnak mint sima 4-sokaságok metszetformái. A következő sejtés bizonyítása így megválaszolná azt a kérdést, hogy mely formák állnak elő sima 4-sokaságok metszetformájaként.

4.1.8. sejtés. ($\frac{11}{8}$-sejtés) *Ha X sima egyszeresen összefüggő és Q_X páros, akkor $l \geq 3|k|$.*

Későbbi előadásokban a 4.1.2 és a 4.1.4 tételek bizonyításának fő gondolataival fogunk megismerkedni. Hasonló technikák segítségével látható be, hogy majdnem minden olyan topologikus 4-sokaság, melyre van sima struktúra, végtelen sokféle képpen simítható ki. Például

4.1.9. tétel. *Rögzített k és N esetén a $2kE_8 \oplus (4k-1)H$ ($k \geq 1$) és a $(2k-1)\langle 1\rangle \oplus N\langle -1\rangle$ ($k \geq 1$, $N \geq 10k-1$) metszetformákhoz tartozó topologikus 4-sokaságok végtelen sok, páronként nem diffeomorf sima 4-sokasággal homeomorfak.* □

4.2 A 4.1.1 tétel bizonyítása

Az előadás hátralévő részében a 4.1.1 tétel bizonyítását adjuk meg.

4.2.1. definíció. Legyen X véges (4-dimenziós) CW-komplexus és $[X] \in H_4(X;\mathbb{Z})$ egy rögzített homológia-osztály. Az $(X,[X])$ párt *Poincaré dualitási térnek* nevezzük, ha az $\alpha \mapsto \alpha \cap [X]$ leképezés egy $H^i(X;\mathbb{Z}) \to H_{4-i}(X;\mathbb{Z})$ izomorfizmust ad meg. Vegyük észre, hogy ha X Poincaré dualitási tér, akkor a metszetforma korábbi definíciója minden módosítás nélkül alkalmazható, így a Q_X (szimmetrikus, bilineáris, unimoduláris) metszetforma definiált.

4.2.2. tétel. (Whitehead) *X_1, X_2 egyszeresen összefüggő 4-dimenziós Poincaré dualitási terek pontosan akkor homotóp ekvivalensek, ha $Q_{X_1} \cong Q_{X_2}$. Minden Q unimoduláris, szimmetrikus bilineáris formára létezik olyan X Poincaré dualitási tér, melyre $Q_X \cong Q$.*

A fenti tétel bizonyításához szükségünk lesz néhány lemmára.

4.2.3. lemma. *Adott X Poincaré dualitási térre létezik egy olyan $f\colon S^3 \to \bigvee_{i=1}^k S_i$ leképezés, hogy X és a $\bigvee_{i=1}^k S_i^2 \cup_f D^4$ CW-komplexus homotóp ekvivalensek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\{e_i \mid i = 1, ..., k\}$ egy bázisa $H_2(X;\mathbb{Z})$-nek. Mivel X egyszeresen összefüggő, a Hurewicz-tétel szerint $\pi_2(X) \cong H_2(X;\mathbb{Z})$, vagyis minden i-re létezik egy olyan $\phi_i\colon (S^2, s_0) \to (X, x_0)$ leképezés, melyre $(\phi_i)_*([S^2]) = e_i$. Ezekből a ϕ_i-kből tehát egy $\phi\colon W = \bigvee_{i=1}^k S_i^2 \to X$ leképezés áll össze. Mivel a fenti konstrukció szerint $i < 4$-re $H_i(X, \phi(W);\mathbb{Z}) = 0$ és $H_4(X, \phi(W);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, a relatív Hurewicz-tétel miatt $H_4(X, \phi(W);\mathbb{Z}) = \pi_4(X, \phi(W))$. Eszerint léteznek $f\colon S^3 \to W$ és $F\colon D^4 \to X$ függvények úgy, hogy $F|S^3 = \phi \circ f$ és $(F, f)_*\colon H_4(D^4, S^3;\mathbb{Z}) \to H_4(X, \phi(W);\mathbb{Z})$ izomorfizmus. Legyen $Y = \bigvee_{i=1}^k S_i^2 \cup_f D^4$ és $g = \phi \cup F\colon Y \to X$. A fentiek szerint g_* izomorfizmust ad meg a homológiák között, vagyis g_* gyenge homotóp ekvialencia. Mivel X és Y CW-komplexusok, a lemma bizonyítása következik. □

Követve a bizonyításban használt konvenciót, jelölje W a $\bigvee_{i=1}^k S_i$ csokrot. Könnyen látható, hogy ha f_1 és f_2 homotóp $S^3 \to W$ függvények, akkor $W \cup_{f_1} D^4$ és $W \cup_{f_2} D^4$ homotóp ekvivalensek. Következésképp a homotópikus osztályozás szempontjából a $\pi_3(W)$ csoportot kell megvizsgálnunk. Jelölje $M(k\times k)$ a $k\times k$-as egész értékű szimmetrikus mátrixok additív csoportját. Rögzítsünk $x_i \in S_i^2$ pontokat és tegyük fel, hogy az $f\colon S^3 \to W$ függvény transzverzális az $x_i \in S_i^2$ pontokra, és sima $f^{-1}(x_i)$ egy környezetében. (Könnyen látható, hogy minden $[f]\in\pi_3(W)$ homotópia-osztályban található ilyen függvény.) Legyen $L_i = f^{-1}(x_i) \subset S^3$, és definiáljuk a $\lambda_{ij}(f)$ számot mint az L_i és L_j láncok $\ell k(L_i, L_j)$ hurkolódási számát. (Az $i=j$ esetben vegyünk egy x_i', az előbbi x_i-hez közeli pontot, és definiáljuk $\lambda_{ii}(f)$-et mint az $\ell k(f^{-1}(x_i), f^{-1}(x_i'))$ hurkolódási számot.) Könnyen belátható, hogy a fenti módon f-hez rendelt $[\lambda_{ij}(f)] \in M(k\times k)$ mátrix csak az $[f]\in\pi_3(W)$ homotópia-osztálytól függ.

4.2.4. lemma. *A fent definiált $L\colon \pi_3(W) \to M(k\times k)$ függvény egy csoportizomorfizmus.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $[f] = [f_1] + [f_2]$ a $\pi_3(W)$ csoportban. Reprezentáljuk $[f]$-et az S^3 egyenlítőjét a bázispontba vivő, a felső félgömbön f_1-gyel, az alsón pedig f_2-vel egyenlő f leképezéssel. Mivel $f^{-1}(x_i) = f_1^{-1}(x_i) \cup f_2^{-1}(x_i)$ (vegyük észre, hogy az L_i inverz képekről nem tettük fel, hogy összefüggők), a fenti L leképezés csoporthomomorfizmus. A $h\colon S^3 \to S_i^2$ Hopf-leképezés mutatja, hogy az E_{ii} mátrix (melynek minden eleme 0 kivéve az i-edik sor i-edik elemét, mely 1) az L leképezés képében van. Hasonlóan, ha $h'\colon S^3 \to S^2 \vee S^2$ adja meg a 4-cellát ragasztó leképezést $S^2\times S^2$ kézenfekvő cella-felbontásában, és $S^2\vee S^2$-t azonosítjuk $S_i^2 \vee S_j^2 \subset W$-vel, akkor $L([h']) = E_{ij} + E_{ji}$ adódik. Mivel ezek a mátrixok generálják $M(k\times k)$-t, az L homomorfizmus ráképezés.

4.2.5. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $L([f]) = 0 \in M(k\times k)$, akkor $[f]=0$ a $\pi_3(W)$ csoportban.

A feladat megoldása bizonyítja a lemmát. □

Legyen tehát $X = W \cup_f D^4$, és jelölje $e_i \in H_2(X;\mathbb{Z})$ az i-edik W-beli S_i^2 gömb homológia-osztályát. Legyen $\{e_i^* \mid i = 1, ..., k\} \subset H^2(X;\mathbb{Z})$ a megfelelő duális bázis.

4.2.6. tétel. *Az $L(f)$ mátrix az X 4-sokaság metszetformáját adja meg; pontosabban, $\lambda_{ij}(f) = \langle e_i^* \cup e_j^*, [X]\rangle$.*

Bizonyítás. Legyen $Z_i \subset D^4$ olyan 2-dimenziós felület, melyre $\partial Z_i = L_i \subset S^3$. (Ilyen felület minden $L\subset S^3$ láncra létezik — egy ilyent L *Seifert-felületének* nevezünk.) A $\lambda_{ij}(f)$ számok definíció szerint megegyeznek a $Z_i\cap Z_j$ metszetben lévő pontok előjeles összegével. (Feltehetjük, hogy a Z_i felületek transzverzálisan metszik egymást.) Mivel a $Z_i\cup\{x_i\}$ 2-ciklus az $e_i\in H_2(X;\mathbb{Z})$ elemet reprezentálja és $\langle e_i^*\cup e_j^*, [X]\rangle = (Z_i\cup\{x_i\}) \cap (Z_j \cup\{x_j\}) = Z_i\cap Z_j$, a bizonyítás kész. (Lásd még az 5.1.3 lemmát.) □

4.2.7. következmény. *Ha Q egy unimoduláris, szimmetrikus, bilineáris forma, akkor létezik olyan X Poincaré dualitási tér, melyre $Q_X \cong Q$.*

Bizonyítás. Legyen $A\in M(k\times k)$ egy Q-t reprezentáló mátrix, és vegyük $L^{-1}(A)\in\pi_3(W)$ egy f reprezentánsát. (A W tér definíciójában szereplő k éppen Q rangjával legyen egyenlő.) A fenti f-fel D^4-et W-hez ragasztva egy X Poincaré dualitási teret kapunk (itt használjuk ki Q unimodularitását), melyre a fentiek szerint $Q_X\cong Q$. □

4.2.8. tétel. *Tegyük fel, hogy X és Y egyszeresen összefüggő Poincaré dualitási terek és $\alpha\colon H^2(Y;\mathbb{Z}) \to H^2(X;\mathbb{Z})$ egy metszetforma-őrző izomorfizmus. Ekkor létezik $X\to Y$ homotopikus ekvivalencia, mely α-t indukálja.*

Bizonyítás. Legyen $k = rk\ H_2(X;\mathbb{Z}) = rk\ H_2(Y;\mathbb{Z})$, és jelölje (mint eddig) W a $\vee_{i=1}^k S_i^2$ csokrot. Az eddigiek szerint feltehető, hogy $X = W\cup_f D^4$ valamely $f\colon S^3\to W$ leképezésre. Legyen $e_i = (\phi_i)_*[S_i^2] \in H_2(X;\mathbb{Z})$, és jelöljük e_i'-vel ($e_i'\in H_2(Y;\mathbb{Z})$) ennek $PD_Y\circ\alpha\circ PD_X^{-1}$ izomorfizmusnál vett képét. Az eddigieket Y-ra alkalmazva egy $\psi\colon W\to Y$ leképezést és egy $Y = W\cup_{f'} D^4$ cella-felbontást kapunk. Mivel α megőrzi a metszeformát, könnyen látható, hogy $L([f]) = L([f'])$, vagyis (L injektivitása miatt) f és f' homotópok. Eszerint a $\phi\colon W\to X$ leképezés egy $Y = W\cup_{f'} D^4 \to X$ homotopikus ekvivalenciává terjeszthető ki, mely éppen az α izomorfizmust indukálja a második kohomológia-csoportokon. □

A fenti tétel könnyen látható módon bizonyítja a 4.2.2 tételt. Mivel egy X topologikus 4-sokaság homotopikusan ekvivalens egy CW-komplexussal, az irányítás által definiált fundamentális osztályt választva $[X]$-nek, X kanonikusan egy Poincaré dualitási térré tehető, következésképp a fenti tétel bizonyítja 4.1.1 tételt. □

5. előadás

Példák 4-sokaságokra

5.1 Néhány egyszerű példa

Az $S^4 = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid ||x|| = 1\}$ 4-dimenziós gömbfelület a legegyszerűbb zárt, sima, egyszeresen összefüggő 4-sokaság; mivel $H_2(S^4;\mathbb{Z}) = 0$, metszetformájára $Q_{S^4} = \emptyset$ adódik. Némileg összetettebb a következő példa: hasson $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ a $\mathbb{C}^3$ 3-dimenziós komplex vektortéren a $\lambda(z_1, z_2, z_3) = (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3)$ hatással. A $\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^3 - \{0\}/\mathbb{C}^*$ faktorról könnyen látható, hogy egy zárt, egyszeresen összefüggő 4-sokaság. (Ez a tény például abból is látszik, hogy $\mathbb{C}^3 - \{0\}/\mathbb{C}^* = S^5/S^1$.) A fenti előállítás azonban azt mutatja, hogy a $\mathbb{CP}^2$ komplex projektív sík *komplex sokaság*, és mint ilyen, kanonikusan irányítható.

5.1.1. megjegyzés. Az n-dimenziós komplex vektortér természetes irányítását kapjuk a következő módon: Legyen $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{C}^n$ bázis $\mathbb{C}$ felett, ekkor a $\{v_1, iv_1, v_2, iv_2, \ldots, v_n, iv_n\}$ halmaz a $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ vektortérnek egy $\mathbb{R}$ feletti bázisa lesz, mely egy irányítást ad meg; ez az irányítás könnyen látható módon nem függ a választott komplex bázistól.

$\mathbb{CP}^2$ fenti definíciójához hasonlóan kapjuk a $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}^2 - \{0\}/\mathbb{C}^*$ komplex projektív egyenest (mely S^2-vel diffeomorf); $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ pedig újabb példát ad egyszeresen összefüggő zárt 4-sokaságra. Mielőtt a fenti 4-sokaságok metszetformáját meghatároznánk, néhány tételt bizonyítunk metszetformákra.

5.1.2. lemma. *Tegyük fel, hogy X egy sima 4-sokaság és $\alpha \in H_2(X;\mathbb{Z})$. Ekkor létezik egy olyan Σ irányított, zárt, 2-dimenziós felület és $f\colon \Sigma \to X$ beágyazás, melyre $f_*([\Sigma]) = \alpha$.*

Bizonyítás. Legyen $a = PD(\alpha) \in H^2(X;\mathbb{Z})$ és vegyük azt az $L_a \to X$ komplex vonalnyalábot, melyre $c_1(L_a) = a$. Legyen σ ennek a nyalábnak egy generikus szelése; a $\sigma^{-1}(0)$ nullhelyek egy $\Sigma \subset X$ 2-dimenziós részsokaságot adnak, melyre könnyen látható, hogy $[\Sigma] = \alpha$ teljesül. □

5.1.3. lemma. *Tegyük fel, hogy $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta$ irányított, beágyazott, transzverzális 2-dimenziós részsokaságok az X 4-sokaságban; legyen továbbá $a = PD[\Sigma_\alpha]$ és $b = [\Sigma_\beta]$. Ekkor $Q_X(a,b) = \#(\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta)$ (ahol a metszéspontok számát, az 1.3.1 megjegyzéshez hasonlóan, előjellel számoljuk).*

Bizonyítás (vázlat). Reprezentáljuk a-t (illetve b-t) egy olyan η_1 (ill. η_2) 2-formával, melynek tartója Σ_α (ill. Σ_β) kis környezetében van, és ha (x, y, u, v) egy térkép a $p \in \Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$ metszéspont körül, akkor alkalmas f függvényre (melynek integrálja 1 és az origó $\in \mathbb{R}^2$ körül lokalizálódik) $\eta_1 = f(x,y)dx \wedge dy$ és $\eta_2 = f(u,v)du \wedge dv$. Mivel $Q_X(a,b) = \int_X \eta_1 \wedge \eta_2$, a lemma következik. □

Ez utóbbi lemma magyarázza, miért nevezzük a Q_X bilineáris formát *metszetformának.*

5.1.4. feladatok. (a) Lássuk be, hogy $Q_{\mathbb{CP}^2} = \langle 1 \rangle$ és $Q_{\overline{\mathbb{CP}^2}} = \langle -1 \rangle$ (itt $\overline{\mathbb{CP}^2}$ jelöli a $\mathbb{CP}^2$ 4-sokaságot a kanonikussal ellentétes irányítással ellátva).

(b) Bizonyítsuk be, hogy $Q_{S^2\times S^2} = H$. (*Ötlet*: A Künneth-formula segítségével lássuk be, hogy $H_2(S^2 \times S^2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ és $S^2 \times \{\text{pt.}\}$, $\{\text{pt.}\} \times S^2$ beágyazott gömbök egy bázist határoznak meg. Számítsuk ki $Q_{S^2\times S^2}$-t ebben a bázisban.)

Tegyük fel, hogy $U_i \subset \partial X_i$ $(i = 1,2)$ kompakt részsokaságok, $\dim U_i = \dim \partial X_i$ és $\varphi\colon U_1 \to U_2$ irányítás-fordító diffeomorfizmus; ekkor (a keletkező sarkok lekerekítése után) egy $X_1 \cup_{U_2=\varphi(U_1)} X_2$ sima sokaságot készíthetünk. Ha $U_1 \cong D^3$ és a ∂X_i határok összefüggők, akkor a fenti konstrukció eredménye nem függ φ-től; ekkor X_1 és X_2 *határösszegét*, $X_1 \natural X_2$-t kapjuk.

5.1.5. definíció. Legyen $D_i^4 \subset X_i^4$ beágyazott golyó, $\varphi\colon D_1 \to D_2$ pedig irányítás-fordító diffeomorfizmus. Ekkor az $X_1\#X_2 = (X_1 - \text{int } D_1) \cup_{\varphi|\partial D_1} (X_2 - \text{int } D_2)$ sokaságot X_1 és X_2 *összefüggő összegének* nevezzük. Ha X_i összefüggő, akkor a $D_i \subset X_i$ beágyazás lényegében egyértelmű, így ekkor (mint azt a jelölés is érzékelteti) az $X_1\#X_2$ sokaság nem függ a választásoktól. Vegyük észre, hogy $\partial(X_1 \natural X_2) = \partial X_1 \# \partial X_2$.

5.2 4-sokaságok metszetformái

5.2.1. tétel. *4-sokaságok összefüggő összegére a metszetformák összeadódnak, vagyis* $Q_{X_1\#X_2} = Q_{X_1} \oplus Q_{X_2}$.

Bizonyítás. Legyenek $\Sigma_1^i, \ldots, \Sigma_{n_i}^i \subset X_i$ beágyazott felületek, melyekre $[\Sigma_1^i], \ldots, [\Sigma_{n_i}^i]$ a $H_2(X_i;\mathbb{Z})$ homológia-csoport egy bázisa $(i = 1,2)$. Feltehető, hogy $D_i \cap \Sigma_j^i = \emptyset$, így $\Sigma_j^i \subset X_1\#X_2$. Könnyen látható, hogy a $[\Sigma_1^1], \ldots, [\Sigma_{n_1}^1]$, $[\Sigma_1^2], \ldots, [\Sigma_{n_2}^2]$ bázisban a $Q_{X_1\#X_2}$ metszetforma mátrixa éppen $Q_{X_1} \oplus Q_{X_2}$; evvel a tétel bizonyítása kész. □

5.2.2. következmény. *Az* $\#n\mathbb{CP}^2\#m\overline{\mathbb{CP}^2}$ *4-sokaság metszetformája* $n\langle 1\rangle \oplus m\langle -1\rangle$, *a* $\#kS^2\times S^2$ *négysokaságé pedig* kH. □

Vegyük észre, hogy a fenti metszetformák lefedik a lehetséges definit, páratlan indefinit, illetve 0 szignatúrájú páros metszetformákat. További példákat kapunk egyszeresen összefüggő zárt 4-sokaságokra a következő módon. Legyen

$$S_d = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{CP}^3 \mid \sum z_i^d = 0\} \subset \mathbb{CP}^3,$$

legyen továbbá $g \in H^2(\mathbb{CP}^3;\mathbb{Z})$ a $H^*(\mathbb{CP}^3;\mathbb{Z})$ gyűrű generátora, $x = i^*g \in H^2(S_d;\mathbb{Z})$ pedig ennek megszorítása az $i\colon S_d \hookrightarrow \mathbb{CP}^3$ beágyazás mentén. Az implicit függvénytétel egyszerű alkalmazásával belátható, hogy S_d sima (sőt komplex) sokaság.

5.2.3. tétel. *Az S_d komplex felület Chern-osztályaira* $c_1(S_d) = (4-d)x$ *és* $c_2(S_d) = (d^2 - 4d + 6)x^2$ *adódik, ebből pedig* $c_2[S_d] = \chi(S_d) = (d^2 - 4d + 6)d$ *és* $c_1^2[S_d] = (4-d)^2 d$ *kapható meg.*

Bizonyítás. Mivel $c(T\mathbb{CP}^3|_{S_d}) = i^*c(T\mathbb{CP}^3) = i^*(1+g)^4 = (1+x)^4$, a Whitney szorzat-formula alapján $c(TS_d) = c(T\mathbb{CP}^3|_{S_d}) \cdot c(\nu S_d)^{-1}$; a $\nu S_d \to S_d$ normálnyaláb Chern-osztálya ismeretében tehát a tétel könnyen bizonyítható. Egyszerűen látható be, hogy $c_1(\nu S_d) = dx$: legyen S_d' egy olyan másik, S_d-t transzverzálisan metsző d-edfokú felület, mely egyben a $\nu S_d \to S_d$ normálnyaláb szelése is. Ekkor $c_1(\nu S_d) = e(S_d) = PD([S_d \cap S_d']) \in H^2(S_d;\mathbb{Z})$; mivel pedig $[S_d'] = d[S_1] \in H_4(\mathbb{CP}^3;\mathbb{Z})$ és $PD([S_1]) = g \in H^2(\mathbb{CP}^3;\mathbb{Z})$, a $c_1(\nu S_d)$ Chern-osztály meghatározása egyszerű számolásra redukálódik. Ebből $c(\nu S_d)^{-1} = 1 - c_1(\nu S_d) + c_1^2(\nu S_d) = 1 - dx + d^2x^2$ adódik, amiből a tétel $(1 + 4x + 6x^2)(1 - dx + d^2x^2) = 1 + (4-d)x + (d^2 - 4d + 6)x^2$ miatt következik. Vegyük észre, hogy a fentiekből $\langle x^2, [S_d]\rangle = d$ is adódik: $\langle x^2, [S_d]\rangle = \langle g^2, i_*[S_d]\rangle = \langle g^2, di_*[S_1]\rangle = \langle g^2 \cdot dg, [\mathbb{CP}^3]\rangle = d$. Ebből pedig $c_1^2[S_d]$ és $c_2[S_d]$ értéke adódik. □

A Lefschetz-féle hipersík-tétel alkalmazásával belátható, hogy

5.2.4. állítás. *Az* $S_d \subset \mathbb{CP}^3$ *4-sokaság egyszeresen összefüggő.* □

5.2.5. megjegyzés. A Lefschetz hipersík-tétel azt állítja, hogy ha $X \subset \mathbb{CP}^N$ zárt, komplex n-dimenziós részsokaság, és $H \subset \mathbb{CP}^N$ egy hipersík, akkor a $\pi_i(H \cap X) \to \pi_i(X)$ homomorfizmus $i \leq n-1$ esetén ráképezés (és $i < n-1$-re izomorfizmus). A tétel Morse-elméleti bizonyítása az [M1] könyvben található meg. (Egy általános $y \in \mathbb{CP}^N$ pontra az $f(x) = \operatorname{dist}(x,y)$ távolságfüggvény egy olyan Morse függvényt ad meg, mely megmutatja, hogy a $\pi_i(X, X \cap H)$ relatív homotópia-csoportok $i < n$ esetén eltűnnek; ebből a fenti állítás a pár hosszú egzakt homotópia-sorozatából adódik.) A Lefschetz-féle hipersík-tétel egyszerű (de nem triviális) alkalmazása bizonyítja az 5.2.4 állítást, lásd pl. [GS].

A következő tétel összefüggést mutat egy 4-dimenziós X sima sokaság szignatúrája és érintőnyalábjának első Pontrjagin-száma között.

5.2.6. tétel. (Hirzebruch szignatúra-tétele) *Egy X 4-sokaság $\sigma(X)$ szignatúrájára $\sigma(X) = \langle \frac{1}{3}p_1(X), [X]\rangle$.* □

5.2.7. következmény. *Ha S egy komplex felület, akkor $c_1^2[S] = 3\sigma(S) + 2\chi(S)$.*

Bizonyítás. Mivel egy komplex 2-sokaságra $p_1(S) = c_1^2(S) - 2c_2(S)$ és $c_2[S] = \chi(S)$ teljesül, a fenti 5.2.6 tétel adja a bizonyítást. □

5.2.8. tétel. *Az S_d komplex felület Q_{S_d} metszetformája páratlan d esetén a $\lambda_d\langle 1\rangle \oplus \mu_d\langle -1\rangle$, páros d esetén pedig az $l_d(-E_8) \oplus m_d H$ formákkal izomorf — itt $\lambda_d = m_d = \frac{1}{3}(d^3 - 6d^2 + 11d - 3)$, $\mu_d = \frac{1}{3}(d-1)(2d^2 - 4d + 3)$ és $l_d = \frac{1}{24}d(d^2-4)$.*

Bizonyítás. A fenti tételek ismeretében $\chi(S_d)$ és $\sigma(S_d)$ a $c_2[S_d]$ és $c_1^2[S_d]$ Chern-számokból könnyen adódnak. Az 5.2.9(a) feladat értelmében c_1 karakterisztikus elem, így $Q_{S_d}(a,a) \equiv Q_{S_d}(c_1(S_d), a) \pmod 2$ minden $a \in H^2(S_d;\mathbb{Z})$-re, ami 0-val kongruens, ha d páros (hiszen ekkor a $c_1(S_d) = (4-d)x$ egy kohomológia-osztály páros számszorosa); páratlan d-re $Q_{S_d}(x,x) = d$ miatt Q_{S_d} páratlan. A metszetformák klasszifikációja alapján a tétel bizonyítása innen elemi aritmetika. □

Ebből adódóan $Q_{S_4} = -2E_8 \oplus 3H$, így $l \geq 3|k|$ és $k < 0$ esetén $\#kS_4\#(l-3|k|)S^2 \times S^2$ 4-sokaság metszetformája éppen $2kE_8 \oplus lH$. (Ha $k > 0$, akkor $\#\overline{S}_4\#(l-3|k|)S^2 \times S^2$ lesz a megfelelő választás, ahol $\overline{S}_4$ az S_4 sokaság a kanonikussal ellentétes irányítással ellátva.) Ilymódon tehát minden, a $\frac{11}{8}$-sejtés (4.1.8 sejtés) által megengedett metszetformára találtunk azt reprezentáló sima, egyszeresen összefüggő 4-sokaságot.

5.2.9. feladatok. **(a)** Bizonyítsuk be, hogy ha S egy komplex felület, akkor $c_1(S) \in H^2(S;\mathbb{Z})$ egy karakterisztikus elem. (*Ötlet*: Reprezentáljuk $\alpha \in H_2(X;\mathbb{Z})$-t egy $\Sigma \subset X$ beágyazott (irányítható) felülettel és alkalmazzuk (az 5.2.3 tételhez hasonlóan) a Whitney szorzat-formulát. Mivel $c_1(T\Sigma) = 2 - 2g(\Sigma)$ páros, a megoldás adódik.)

(b) Lássuk be, hogy $\alpha \in H_2(X;\mathbb{Z})$-re $w_2(X)([\alpha]|_2) \equiv Q_X(PD(\alpha), PD(\alpha)) \pmod 2$. (Itt $[\alpha]|_2 \in H_2(X;\mathbb{Z}_2)$ jelöli az $\alpha \in H_2(X;\mathbb{Z})$ egész együtthatós homológia-osztály mod 2 redukcióját.)

(c) Bizonyítsuk be, hogy ha S egy zárt komplex felület, akkor 12 osztja a $c_2[S] + c_1^2[S]$ összeget. Lássuk be, hogy ebből egyszeresen összefüggő S-re $b_2^+(S)$ páratlansága következik.

5.3 Felfújás

Legyen $\tau = \{(l,p) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2 \mid p \in l\} = \{([u:v],(x,y)) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2 \mid vx = uy\} \subset \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2$ a $\mathbb{CP}^1$ feletti *tautologikus vonalnyaláb*; ismert, hogy $\langle c_1(\tau), [\mathbb{CP}^1]\rangle = -1$. τ-t a második koordinátára vetítve egy érdekes $\pi\colon \tau \to \mathbb{C}^2$ függvényt kapunk: ha $p \in \mathbb{C}^2$ és $p \neq 0$, akkor $\pi^{-1}(p) = \{\text{pt.}\}$ egyetlen pont, míg $\pi^{-1}(0) \approx \mathbb{CP}^1$ (hiszen $\pi^{-1}(p)$ éppen a p-n és origón átmenő egyenesek terével azonos).

5.3.1. lemma. *A tautologikus nyaláb totális terére $\tau \approx \overline{\mathbb{CP}^2} - \{\text{pt.}\}$.*

Bizonyítás. Legyen $p \in \overline{\mathbb{CP}^2}$ rögzített, és vegyünk egy $L \subset \overline{\mathbb{CP}^2}$ projektív egyenest, mely p-t nem tartalmazza. A $q \mapsto L_{pq} \cap L \in L \approx \mathbb{CP}^1$ leképezés (ahol L_{pq} a p-n és q-n áthaladó egyetlen egyenest jelöli) egy $\overline{\mathbb{CP}^2} - \{p\} \to \mathbb{CP}^1$ fibrálást ad, melynek első Chern-száma -1 (pl. egy másik, p-t nem tartalmazó L' egyenes a nyaláb egy generikus szelése); mely bizonyítja a lemmát. □

Mivel $\tau - \pi^{-1}(0) \approx \mathbb{C}^2 - \{0\}$, egy $p \in S$ pont környezetét az S komplex felületben $\mathbb{C}^2$-vel azonosítva, majd ezt τ-ra cserélve egy S' új komplex felületet kapunk, melyet S *felfújtjának* nevezünk.

5.3.2. következmény. *Az S' felfújtra $S' \approx S\#\overline{\mathbb{CP}^2}$.* □

Könnyen belátható, hogy ha L_1 és L_2 origón átmenő különböző komplex egyenesek $\mathbb{C}^2$-ben, akkor τ-ban a $\overline{\pi^{-1}(L_i - \{0\})}$ lezártak diszjunktak lesznek.

5.3.3. feladat. Legyen $L_1 = \{x = 0\}$ és $L_2 = \{y = 0\}$. Határozzuk meg az $\tilde{L}_i = \overline{\pi^{-1}(L_i - \{0\})}$ lezártakat és lássuk be, hogy diszjunktak.

5.3.4. definíció. A $C \subset S$ komplex görbére a $\tilde{C} = \overline{\pi^{-1}(C - \{p\})} \subset S'$ görbét a C *valódi transzformáltjának* nevezzük. A $C' = \pi^{-1}(C)$ inverz képet C *teljes transzformáltjának* hívjuk.

5.3.5. példa. Legyenek p_0, p_1 harmadfokú homogén 3-változós polinomok, melyekre a $V_{p_i} = \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 \mid p_i(x, y, z) = 0\}$ görbék $(i = 0, 1)$ simák és egymást transzverzálisan metszik. Könnyen belátható, hogy V_{p_i} a T^2 2-dimenziós tórusszal diffeomorf, és hogy a $V_{p_0} \cap V_{p_1}$ metszet 9 pontból áll. Ilymódon ezt a kilenc pontot felfújva a $\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2}$ komplex felületben $F_0 = \tilde{V}_{p_0}$ és $F_1 = \tilde{V}_{p_1}$ diszjunkt tóruszokat kapunk. Vegyük észre, hogy a $p_t = p_{[t_0:t_1]} = t_0p_0 + t_1p_1$ definícióval egy olyan, $\mathbb{CP}^1$-gyel paraméterezett görbesereget kapunk, melyre a görbék egyrétűen lefedik a $\mathbb{CP}^2 - \{V_{p_0} \cap V_{p_1}\}$ teret. A metszetpontokat felfújva így $\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2}$-nek kapjuk egy ($\mathbb{CP}^1$-gyel paraméterezett) egyrétű lefedését — vagyis egy $\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2} \to \mathbb{CP}^1$ fibrálást. Mivel a fibrumok harmadfokú (ún. *elliptikus*) görbék, ezt a fibrálást *elliptikus fibrálásnak* is nevezik.

Legyen $X = (\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2} - \nu F_0) \cup_{T^3} (\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2} - \nu F_0)$ 4-dimenziós sima sokaság.

5.3.6. állítás. *A fent megadott X egyszeresen összefüggő, páros metszési formájú 4-sokaság, melyre $\chi(X) = 24$ és $\sigma(X) = -16$.*

Bizonyítás. Mivel létezik olyan $S^2 \subset \mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2}$ beágyazott gömb, melyre $S^2 \cap F_0 = \{\text{pt.}\}$, $\pi_1(\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2} - \nu F_0) = 1$ adódik; ebből pedig a Van Kampen tétel alapján $\pi_1(X) = 1$ triviálisan következik. A $\chi(X) = 24$ egyenlőség belátása elemi feladat $\chi(\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2}) = 12$ és $\chi(\nu F_0) = 0$ alapján; így tehát $H_2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{22}$. A következőkben ennek a második homológia-csoportnak fogjuk egy olyan bázisát megadni, mely mind a metszetforma paritását, mind a szignatúra értékét mutatni fogja. Jelölje h a $H_2(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z}) \leq H_2(\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2}; \mathbb{Z})$ rész generátorát, míg e_i az i-edik $H_2(\overline{\mathbb{CP}^2}; \mathbb{Z}) \leq H_2(\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2}; \mathbb{Z})$ részt generálja. Ilymódon $H_2(\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2}; \mathbb{Z}) = \langle h\rangle \oplus \langle e_1\rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_9\rangle$; vegyük a következő bázist: $\{f = 3h - \sum_{i=1}^{9} e_i, e_9, e_1 - e_2, \ldots, e_7 - e_8, -h + e_6 + e_7 + e_8\}$. Könnyen látható, hogy $[F_0] = f$, és az egyetlen e_9-et leszámítva a fenti bázis elemeinek négyzete páros — a metszetforma ebben a bázisban $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \oplus E_8$ mátrixszal reprezentálható. Mivel f-et csak az e_9 elem metszi nemtriviálisan, a $H_2(\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2} - \nu F_0; \mathbb{Z})$ csoportban a fenti bázis (e_9-et leszámítva) minden eleme megjelenik; mivel $\chi(\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2} - \nu F_0) = 12$ és $H_4(\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2} - \nu F_0; \mathbb{Z}) = 0$, a fenti 9 homológia-elem mellett két továbbira van szükségünk $H_2(\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2} - \nu F_0; \mathbb{Z})$ egy bázisához. Ezek pedig éppen azok a peremen ($\approx T^3$) lévő 2-tóruszokkal reprezentálhatók, melyek nem homológok f-fel. A két $\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2} - \nu F_0$ kópia összeragasztásánál feltehető, hogy a perem 3-tórusz körei egymásba képződnek, így a fenti két $(-E_8)$-at adó 16 elem mellett további hármat kapunk: a három peremen lévő 2-tóruszt (melyek négyzete 0). Minden ilyen tóruszhoz természetesen tartozik egy duális kör (a "harmadik kör" egy $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ felbontásban); mivel $\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2} - \nu F_0$ egyszeresen összefüggő, ezek a körök mindkét oldalon egy-egy felületet határolnak. A felületeket összeragasztva 3 további homológia-elemet kapunk — ezek négyzete nyilván választható párosnak például úgy, hogy a két féltérben ugyanazokat a felületeket választjuk. Mivel a fent felsorolt elemek négyzetei párosak, Q_X párossága következik. A metszési számok alaposabb vizsgálata azt is mutatja, hogy ebben a bázisban valójában a metszetformát a $-2E_8 \oplus 3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cong -2E_8 \oplus 3H$ mátrix reprezentálja; evvel a bizonyítás kész. □

5.3.7. megjegyzés. Mivel tehát $Q_X = -2E_8 \oplus 3H$, Freedman tétele szerint S_4 és X homeomorf 4-sokaságok; valójában ez a két sima 4-sokaság diffeomorf is. X-et természetes módon láthatjuk el komplex struktúrával — a fenti definíció pusztán annak topológiai lefordítása, hogy X a $\mathbb{CP}^2 \# 9\overline{\mathbb{CP}^2}$ komplex felület $F_0 \cup F_1$ menti dupla elágazó fedése.

6. előadás

Kirby diagramok

6.1 Egy új jelölés

Idézzük fel, hogy egy Kirby diagramban az 1-fogantyúkat S^3-beli gömbpárokkal (az 1-fogantyú ragasztó gömbjeivel), míg a 2-fogantyúkat két "párhuzamos" görbével (a 2-fogantyú ragasztó illetve tüskéző köreivel) jelképeztünk. Mint azt már említettük, a 3- és 4-fogantyúkat egyértelműen lehet az $X_2 = \cup\{0-,\ 1-, \text{ és } 2\text{-fogantyúk}\}$ peremes sokasághoz ragasztani úgy, hogy egy zárt 4-sokaságot kapjunk, így ezekre nem fejlesztünk ki külön jelöléseket.

Legyen $U \subset S^3$ a *triviális csomó*: S^1-nek tehát az a beágyazott képe, mely egy S^3-ba beágyazott D^2-t határol. (A fenti U-t ez a tulajdonság izotópia erejéig meghatározza.) Legyen továbbá $i\colon (D^2, S^1) \hookrightarrow (D^4, S^3)$ a $(D^2, S^1) = (\{0\} \times D^2, \{0\} \times \partial D^2) \subset (D^4, S^3)$ beágyazás; könnyen látható, hogy $i(S^1) \subset S^3$ az U triviális csomóval izotóp. Jelölje $\nu(i(D^2))$ az $i(D^2)$ részsokaság egy (nyílt) csőszerű környezetét. A következő tétel alkalmazásával 1-fogantyúk egy új reprezentációja lehetséges.

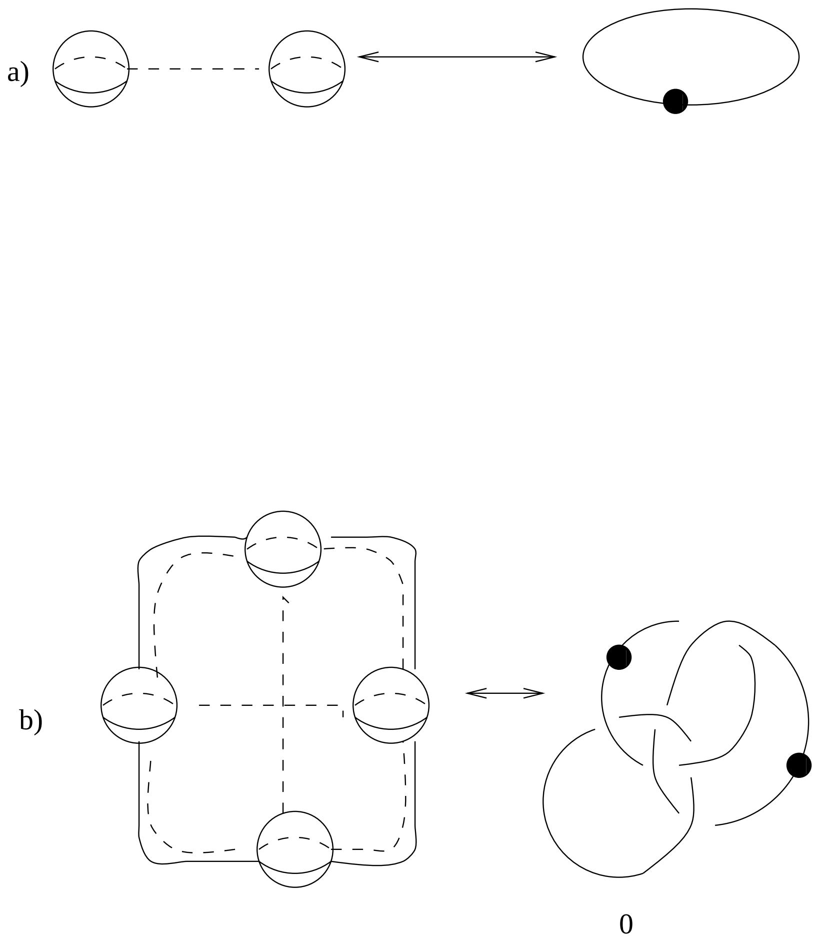
6.1.1. tétel. *A $D^4 - \nu(i(D^2))$ peremes 4-sokaság $S^1 \times D^3$-mal diffeomorf, vagyis avval a (peremes) 4-sokasággal, mely egy 0- és egy 1-fogantyúból áll.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $D^4 - \nu(i(D^2)) = (D^2 - \nu\{\text{pt.}\}) \times D^2$, és mivel $D^2 - \nu\{\text{pt.}\}$ diffeomorf $S^1 \times D^1$-gyel, a tétel D^2-vel való szorzás után következik. □

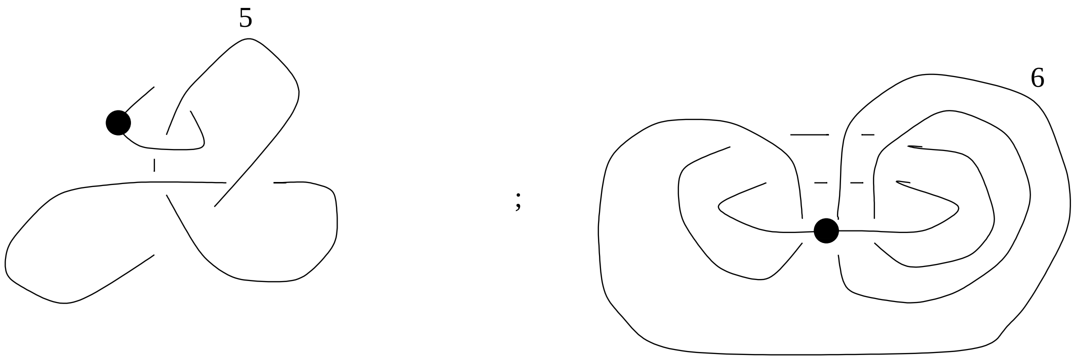
Indukciót alkalmazva látható be a fenti tétel általánosítása.

6.1.2. következmény. *Legyenek $p_j \in D^2$ $(j = 1, \ldots, n)$ különböző pontok a D^2 diszkben, és vegyük azt az $i\colon \cup_j (D_j^2, S_j^1) \hookrightarrow (D^4, S^3)$ beágyazást, melyet $(D_j^2, S_j^1) \to (\{p_j\} \times D^2, \{p_j\} \times \partial D^2) \subset (D^4, S^3)$ határoz meg. Ekkor $D^4 - \nu(\cup_j i(D_j^2))$ az $\# n S^1 \times D^3$ sokasággal diffeomorf, vagyis avval a 4-sokasággal, mely egy 0- és n darab 1-fogantyúból áll.* □

Következésképp egy 1-fogantyú ragasztására úgy is gondolhatunk, mint $\nu(i(D^2))$-nek D^4-ből való elhagyására. Könnyen látható, hogy egy $f\colon S^1 \to \partial(S^1 \times D^3)$ 2-fogantyút ragasztó leképezés pontosan akkor megy át az 1-fogantyún, ha hurkolódik az $i(S^1)$, U-val izotóp csomóval. Evvel tehát új jelölést vezethetünk be 1-fogantyúkra: a triviális csomó S^3-ban egy ponttal ellátva jelentsen egy 1-fogantyút, lásd a 6.1 ábrát. (Ebből tehát $S^1 \times D^3$-at úgy kapjuk meg, hogy egy, a triviális csomó által határolt diszk belsejét D^4-be nyomunk és elhagyjuk egy kis nyílt környezetét.) Amennyiben ezt az új jelölést alkalmazzuk, a 2-fogantyúk ragasztó leképezései (1-fogantyúk jelenlétében is) S^3-ba mennek; itt pedig a tüskéző kör megrajzolása helyett elég a két kör hurkolódási számát feljegyezni. (Emlékezzünk vissza arra, hogy egy 4-dimenziós 2-fogantyú tüskézései $\pi_1(SO(2)) \cong \mathbb{Z}$-re nézve affin teret alkotnak; S^3-ban azonban a csomóra illesztett Seifert-felület kanonikusan kijelöl egy 0 tüskézésű elemet, a többi tüskézés ettől éppen a hurkolódási számban tér el.)



6.1 ábra: Új jelölés 1-fogantyúkra



elhagyható pár

nem-elhagyható pár

6.2 ábra: Elhagyható és el nem hagyható fogantyú-párok

6.2 Kirby-kalkulus

Egy 4-sokaság Kirby diagramja tehát nem más, mint egy lánc, melyben minden csomóra vagy egy egész szám vagy egy pont van elhelyezve — a pontozott csomók mind triviálisak és egymással nem hurkolódnak. Azt jelzendő, hogy zárt sokaságról beszélünk, a rajz mellé általában odaírjuk a 3- és 4-fogantyúk számát (bár ezt a számot a rajz már meghatározza).

Két fogantyú-felbontás pontosan akkor diffeomorf ha izotópiával, fogantyú-csúsztatással és elhagyható párok bevezetésével/elhagyásával egyik felbontás a másikba alakítható (2.1.5 tétel). A következőkben e két utóbbi operáció (elhagyható párok bevezetése/elhagyása ill. fogantyú-csúsztatás) Kirby diagram-beli megjelenítését fogjuk tárgyalni.

6.2.1. tétel. *A h_1 1- és h_2 2-fogantyú pontosan akkor alkot elhagyható párt, ha a 2-fogantyú ragasztó köre egy pontban metszi az 1-fogantyú (pontozott) körére illeszthető S^3-ba beágyazott D^2 golyót; vagyis a 2-fogantyú ragasztási köre és az 1-fogantyú pontozott köre geometriailag egyszer hurkolódik.*

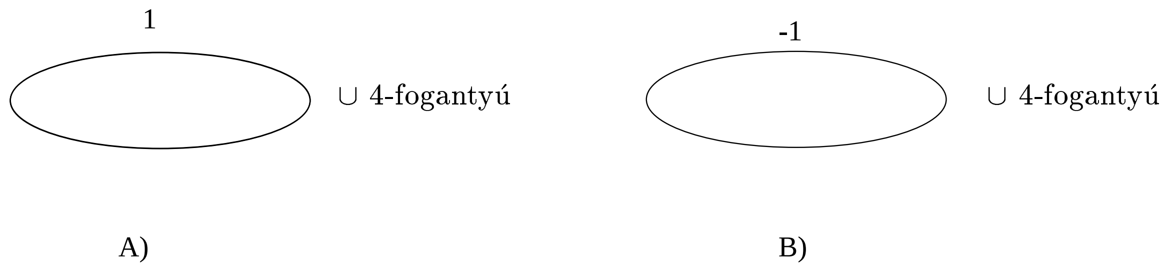
Bizonyítás. A fenti D^2 éppen a h_1 övgömbje egy darabjának választható, így a tétel pusztán a 2.1.4 tétel Kirby diagramokra való átfogalmazása. □

6.2.2. megjegyzés. A fenti tételben fontos, hogy a 2-fogantyú ragasztási köre az 1-fogantyú pontozott körét *geometriailag* hurkolja egyszer; amennyiben csak az (algebrai) hurkolódási számuk 1, az $\alpha(h_1, h_2)$ algebrai metszet lesz csak egyenlő eggyel, ami nem elégséges ahhoz, hogy h_1 és h_2 elhagyható párt alkosson, lásd például a 6.2 ábrát.

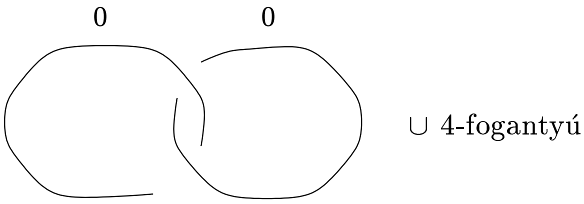
6.2.3. tétel. *A h_2 2- és h_3 3-fogantyú által alkotott (h_2, h_3) pár pontosan akkor hagyható el, ha h_2 megfelelő fogantyú-csúsztatások után a triviális, az ábra többi részétől elválasztható csomó mentén 0 tüskézéssel van odaragasztva.*

Bizonyítás. Az egyik irány kézenfekvő: a triviális csomó mentén 0 tüskézéssel odaragasztott 2-fogantyú $S^2 \times D^2$-t ad, melyhez egy 3-fogantyút ragaszthatunk úgy, hogy az eredmény D^4 legyen — és az elhagyhatóság tényén fogantyú-csúsztatás nem változtat. Ha h_2 és h_3 elhagyható párt alkot, akkor h_3 ragasztó gömbjének (mely S^2-vel diffeomorf) alsó félgömbje mentén h_2-t egy, a többi fogantyútól diszjunkt $\partial D^4 = S^3$-ban levő körbe lehet izotópiával mozgatni. A tüskézés a fenti félgömb szerint triviális, így a tétel következik. □

Legyen most h_1 és h_2 két 2-fogantyú, és csúsztassuk át h_1-et h_2-n. Ekkor h_2 ragasztó leképezése természetesen nem vátozik (a csúsztatás $\partial(X \cup h_2)$-ben egy izotópia), h_1-é azonban igen:



6.3 ábra: Kirby diagram $\mathbb{CP}^2$-re és $\overline{\mathbb{CP}^2}$-ra



6.4 ábra: $S^2 \times S^2$ egy Kirby diagramja

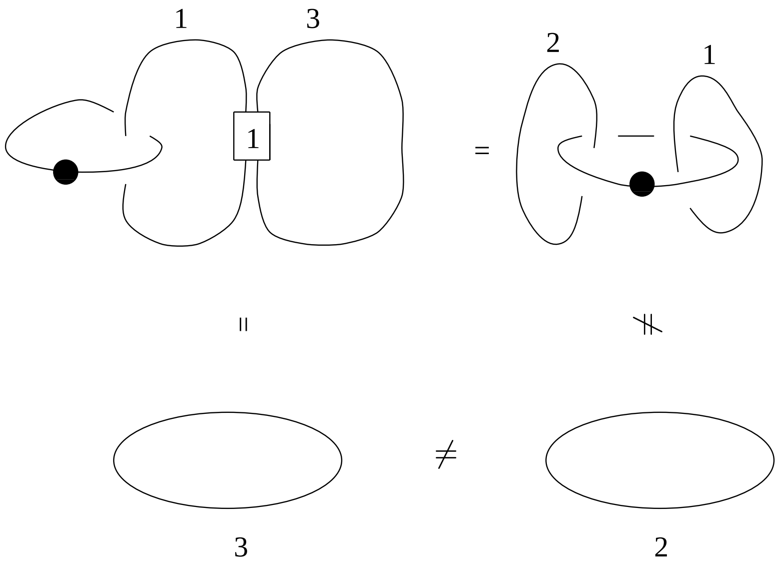
6.2.4. tétel. *Legyen (K_i, n_i) a h_i fogantyú ragasztási köre és tüskézése $(i = 1, 2)$, és csúsztassuk át h_1-et h_2-n. Ekkor az új h_1' fogantyú ragasztó köre $K_1 \# K_2$ lesz, melynek tüskézése $n_1 + n_2 \pm \ell k(K_1, K_2)$-vel egyenlő. (A $\pm$ előjel attól függ, hogy a szalag, mely mentén az $\#$ összefüggő összeget vesszük, tartja-e az irányítást vagy sem. Ez a szalag egyébként tetszőleges lehet.)*

Bizonyítás. Emlékezzünk arra, hogy h_1-et úgy tudjuk h_2-n átcsúsztatni, hogy K_1 ragasztási gömbjének (ami esetünkben egy kör) egy kis darabját izotópiával addig mozgatjuk, míg az egy pontban nem metszi h_2 övgömbjét (esetünkben ez is egy kör), lásd a magyarázatot a 2.1 fejezet elején. A $\partial(X \cup h_2)$ 3-sokaságban a metszéspontok érintőterében a két érintő egyenes (h_1 ragasztási és h_2 övgömbjének érintője) egy 1-kodimenziós alteret feszít ki; a kimaradó dimenzió a ragasztási gömb mozgásának irányát mutatja meg. Visszafelé tolva az eredeti állapotot kapjuk meg újra, előre haladva K_1 kis darabkája párhuzamosan halad K_2-vel, majd visszatér K_1-hez. Az út, melyen ez a kis darab K_1-ből K_2-be mozog, egy előre rögzített szalagtól függ; ezt tetszőlegesen választhatjuk meg. A tüskézésre adott formuláról legkönnyebben úgy győződhetünk meg, ha K_1 kis darabkájával együtt egy kísérő kört is mozgatunk. Vegyük észre, hogy a $K_1 \# K_2$-vel jelölt csomó a szalag választásától is függ (a tüskézés azonban csak attól függ, összeadjuk-e vagy levonjuk a két fogantyút). $\square$

6.2.5. példák. **(a)** A triviális csomó mentén n tüskézéssel D^4-hez egy 2-fogantyút ragasztva az S^2 feletti n Chern-számú komplex vonalnyaláb totális terét kapjuk. Korábban láttuk, hogy $\mathbb{CP}^2$-ből (illetve $\overline{\mathbb{CP}^2}$-ból) egy pontot (pontosabban egy 4-fogantyút) elhagyva egy $+1$ (illetve -1) Chern-számú nyalábot kapunk. Következésképp $\mathbb{CP}^2$ Kirby diagramja egy 1 tüskézésű triviális csomó és egy 4-fogantyú — hasonlóan, $\overline{\mathbb{CP}^2}$ Kirby diagramját egy -1 tüskézésű triviális csomó adja a megfelelő 4-fogantyúval; lásd a 6.3 ábrát.

(b) Mivel $S^2 \times S^2$ a triviális S^2 feletti komplex vonalnyaláb duplázásaként állítható elő, így a 0 tüskézésű Hopf lánc (plusz egy 4-fogantyú) $S^2 \times S^2$ egy Kirby diagramját adja (6.4 ábra).

Összefoglalva, 2-fogantyúk csúsztatását úgy tudjuk egy Kirby diagramban megjeleníteni, hogy a (K_1, K_2) ragasztási köröket $(K_1 \# K_2, K_2)$-re cseréljük, a tüskézéseket pedig $(n_1, n_2) \mapsto (n_1 + n_2 \pm \ell k(K_1, K_2), n_2)$ szerint változtatjuk. (Emlékezzünk arra, hogy $\#$ egy választott γ úttól is függ; ez a γ egyébként tetszőleges. Következésképp a csúsztatás utáni Kirby diagram nem egyértelmű.) Egy 2/3 pár elhagyása egy, az ábra többi részétől elválasztható, 0 tüskézésű triviális csomó és egy 3-fogantyú elhagyását jelenti. Ha h_1 és h_2 elhagyható 1/2 párt alkot, akkor minden, h_1 pontozott körével hurkolódó 2-fogantyút először h_2-n alkalmasan (esetleg



6.5 ábra: Elhagyható párok egy Kirby diagramban

többször is) átcsúsztatva elérhető, hogy h_1 a h_2-n kívüli fogantyúktól elválasztható legyen — ekkor az elhagyható párnak megfelelő két csomó a diagramból egyszerűen elhagyható. (Az elhagyható pár 2-fogantyújának ragasztási köre hurkolódhat esetleg más 1- vagy 2-fogantyúk köreivel — az 1-fogantyú pontozott köre azonban nem teheti ezt, lásd a 6.5 ábrát. Ez természetes, ha meggondoljuk, hogy olyan 1-fogantyúra nem ragaszthatunk további 2-fogantyúkat, melyet el akarunk hagyni.) Végül egy 1-fogantyút úgy tudunk egy másik 1-fogantyún átcsúsztatni, hogy pontozott köreiket 0 tüskézésű köröknek tekintve alkalmazzuk a 2-fogantyúk csúsztatására tanultakat. A γ út választásával azonban vigyáznunk kell — mivel az eredmény is egy 1-fogantyú pontozott köre (tehát egy triviális, a többi pontozott körtől elválasztható kör) kell hogy legyen, γ nem lehet tetszőleges. (Ha azonban teljesíti az előbbiekben leírt feltételt, a csúsztatás γ mentén végrehajtható.) Természetesen a fenti transzformációk inverzei sem változtatják meg a fogatyú-felbontás diffeomorfizmus típusát, így például bevezethetők elhagyható párok, lásd például a 6.6 ábrát.

Mint már korábban láttuk, egy fogantyú-felbontás fogantyúinak metszései és a sokaság homológiái között szoros összefüggés van — lásd az 1.3 fejezetet. A következőkben ezt a kapcsolatot egy olyan egyszeresen összefüggő X 4-sokaságra vizsgáljuk, melynek adott fogantyú-felbontásában nem szerepelnek sem 1- sem 3-fogantyúk.

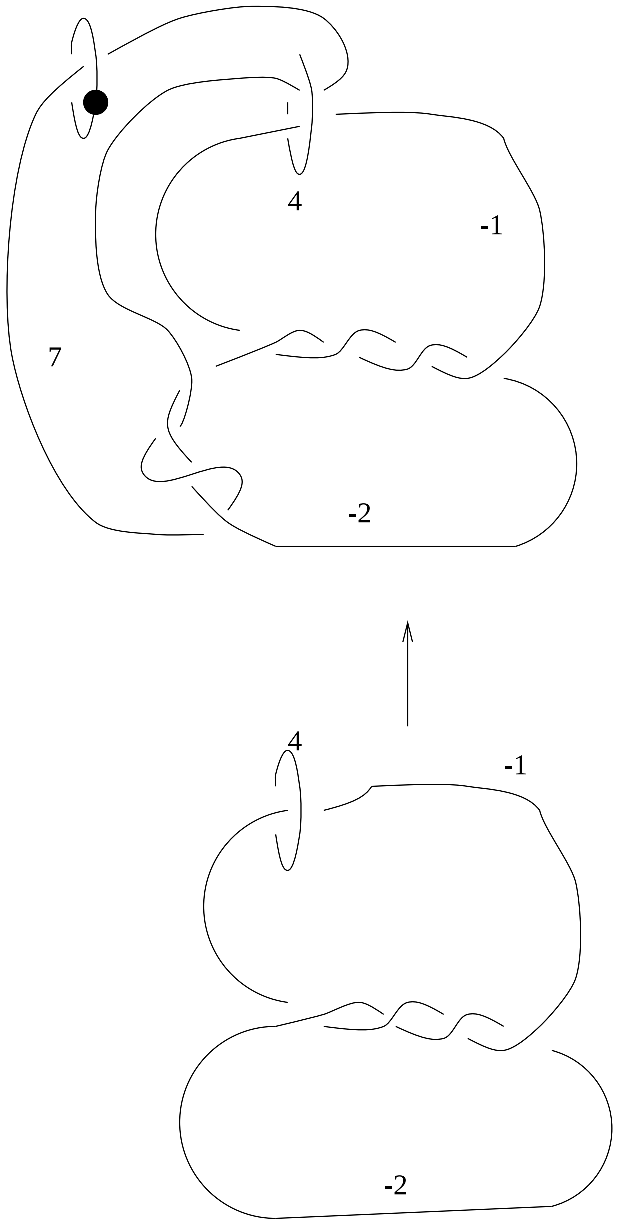
6.2.6. tétel. *A 2-fogantyúk ragasztó köreinek hurkolódási mátrixa (a tüskézésekkel a diagonálisban) éppen Q_X-et adja meg $H_2(X;\mathbb{Z})$-nek a 2-fogantyúk által meghatározott bázisában.*

Bizonyítás. Az 1.3.2 tétel szerint a 2-fogantyúk éppen $H_2(X;\mathbb{Z})$ egy bázisát adják (hiszen a feltétel szerint $C_1 = C_3 = 0$). Legyen $(Z_i, \partial Z_i) \subset (D^4, S^3)$ olyan beágyazott felület, melyre $\partial Z_i = K_i$ az i-edik 2-fogantyú ragasztási köre. Ekkor Z_i-ket a 2-fogantyúk magjaival zárt felületekké téve $H_2(X;\mathbb{Z})$ fenti bázisának kapjuk felület-reprezentánsait. Mivel a fogantyúk magjai diszjunktak és az $\ell k(K_i, K_j)$ hurkolódási szám megegyezik Z_i és Z_j algebrai metszetével, az állítás következik. □

6.2.7. megjegyzés. Egy egyszeresen összefüggő CW-komplexusra mindig található olyan cella-felbontás, melyben sem 1- sem 3-cellák nem szerepelnek. Nyitott kérdés azonban az, hogy egyszeresen összefüggő zárt 4-sokaságra létezik-e olyan fogantyú-felbontás, melyben nem szerepelnek 1-fogantyúk.

A következő állítás az összefüggő összeg és a Kirby diagramok közötti kapcsolatot mutatja meg.

6.2.8. állítás. *Rögzítsünk egy Kirby diagramot az X_1 illetve az X_2 sokaságra. Ekkor a két diagram unióját véve az $X_1 \# X_2$ 4-sokaság egy Kirby diagramját kapjuk.*



6.6 ábra: Példa egy elhagyható pár bevezetésére

Bizonyítás. Távolítsuk el X_1 és X_2 4-fogantyúját, és vegyük az így kapott (S^3 peremű) sokaságok határösszegét. Ez nem jelent mást, mint egy 1-fogantyú bevezetését, mellyel a két 0-fogantyú közül az egyiket rögtön el is hagyhatjuk. Tehát a peremes sokaságok határösszege örökli a fogantyú-felbontásokat, így egy 4-fogantyú visszaragasztása után a diagram éppen a két diagram diszjunkt (egymástól síkkal elválasztható) uniója lesz. □

6.2.9. feladatok. (a) Lássuk be a fenti Kirby diagramok és fogantyú-csúsztatás segítségével, hogy $S^2 \times S^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$ és $\mathbb{CP}^2 \# 2\overline{\mathbb{CP}^2}$ diffeomorfak.

(b) Általánosabban, bizonyítsuk be, hogy ha X-nek van egy olyan fogantyú-felbontása, melyben nem szerepelnek 1-fogantyúk, és Q_X páratlan, akkor $X \# S^2 \times S^2$ és $X \# \mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$ diffeomorf 4-sokaságok.

Egy $(X, \partial_- X)$ relatív fogantyú-felbontásra a következő módon adhatunk Kirby diagramot. Legyen Y olyan 4-sokaság, melynek pereme $\partial_- X$, és vegyük ennek az Y-nak egy fogantyú-felbontását. Feltehető (Y esetleges olyan megváltoztatásával, mely a peremét nem befolyásolja), hogy a felbontásban sem 1- sem 3-fogantyúk nem szerepelnek. A kapott tüskézett lánc tehát egy $\partial_- X$ határú 4-sokaságot jelképez, erre kell X fogantyúit ragasztani — ezekre már megvan a kifejlesztett jelölésrendszer. Ahhoz, hogy X és Y fogantyúit megkülönböztessük, a következő konvenciót alkalmazzuk: az Y-beli tüskézéseket tegyük zárójelbe. Természetesen egy Y-beli fogantyú nem csúsztatható át egy X-belin, más fogantyú-csúsztatások azonban elvégezhetők, és az eddig megismert módon transzformálják rajzunkat. A korábbiakhoz hasonóan lehet (természetesen csak X-ben) elhagyható párokat elhagyni/bevezetni. Relatív fogantyú-felbontások Kirby diagramjait a továbbiakban nem fogunk alkalmazni, így ezek részletes tárgyalásától eltekintünk (a további részletekről lásd [GS]).

7. előadás

Kobordizmusok, h-kobordizmusok

Ebben a fejezetben sokaságok kobordizmusaival illetve h-kobordizmusaival fogunk foglalkozni; a 4-dimenziós esetre a következő fejezetben fogunk külön kitérni. Az X_0 és X_1 zárt, irányított n-dimenziós sokaságok *kobordánsak*, ha létezik olyan W^{n+1} $(n+1)$-dimenziós sokaság, melyre $\partial W = \overline{X}_0 \cup X_1$ teljesül. Az n-dimenziós zárt, irányított sokaságok kobordizmus-osztályai a diszjunkt unióra ($\amalg$) mint összeadásra nézve egy Abel-csoportot alkotnak, melyet Ω_n-nel jelölünk. Könnyű számolás mutatja, hogy $\Omega_0 \cong \mathbb{Z}$, $\Omega_1 = 0$ és $\Omega_2 = 0$. Rohlin egy tétele szerint $\Omega_3 = 0$, vagyis minden irányított, zárt 3-sokaság előáll egy irányított 4-sokaság határaként. Az $[X] \mapsto \sigma(X)$ leképezés (mely tehát X^4 kobordizmus-osztályához X szignatúráját rendeli) egy $\Omega_4 \to \mathbb{Z}$ homomorfizmust ad meg, melyről belátható, hogy izomorfizmus, következésképp $\Omega_4 \cong \mathbb{Z}$. (A fenti állítások bizonyításai például Kirby [K2] könyvében találhatók meg.)

7.1 h-kobordizmusok

7.1.1. definíció. Az X_0 és X_1 zárt, irányított, egyszeresen összefüggő n-dimenziós sokaságok *h-kobordánsak* (vagyis homotopikusan kobordánsak), ha létezik közöttük egy olyan W^{n+1} kobordizmus, melyre az $i_j \colon X_j \hookrightarrow W$ $(j = 0, 1)$ beágyazások homotopikus ekvivalenciák.

A következőkben h-kobordizmusokat fogunk részletesen vizsgálni, és a következő eredményt fogjuk belátni.

7.1.2. tétel. (h-kobordizmus tétel) *Tegyük fel, hogy W egy h-kobordizmus az egyszeresen összefüggő X_0, X_1 n-dimenziós sokaságok között és $n \geq 5$. Ekkor W diffeomorf a triviális $X_0 \times I$ kobordizmussal.*

7.1.3. következmény. *Ha X_0 és X_1 h-kobordáns (egyszeresen összefüggő) n-sokaságok és $n \geq 5$, akkor X_0 és X_1 diffeomorfak.* □

7.2 A h-kobordizmus tétel bizonyítása

Legyen W^{n+1} egy h-kobordizmus X_0 és X_1 között, és vegyük W egy relatív fogantyú-felbontását $\partial_- W = X_0$ választással. Célunk megmutatni azt, hogy ez a felbontás triviálisnak is választható, vagyis feltehető, hogy nem tartalmaz egyetlen fogantyút sem. Korábbiakból (2.1.7 állítás) következik, hogy feltehetjük, a felbontás nem tartalmaz 0- és $(n+1)$-fogantyúkat.

7.2.1. állítás. *Legyen W egyszeresen összefüggő kobordizmus, és tegyük fel, hogy $n \geq 4$. Ekkor a fogantyú-felbontásról feltehető, hogy nem tartalmaz 1-fogantyút.*

Bizonyítás. Adott fogantyú-felbontás h 1-fogatyújához egy elhagyható 2-fogantyú/3-fogantyú párt fogunk találni, melyre h és a 2-fogantyú szintén elhagyható párt alkot. Ilymódon (elhagyva a h/2-fogantyú párt) h-t a fenti 2-fogantyú/3-fogantyú pár 3-fogantyújára cseréltük; ezt a műveletet minden 1-fogantyún elvégezve az állítás következik.

Legyen tehát $W_2 = X_0 \times I \cup \{1\text{-fogantyúk}\} \cup \{2\text{-fogantyúk}\}$, és legyen K_1 olyan beágyazott kör $\partial_+ W_2$-ben, mely h övgömbjét egyszer metszi, K_2 pedig a többi fogantyútól diszjunkt $X_0 \times \{1\}$-beli triviális csomó a triviális tüskézéssel. A korábbiak szerint K_1 mentén (tetszőleges tüskézéssel) W_2-höz egy 2-fogantyút ragasztva h-t egy elhagyható pár 1-fogantyújává tehetjük. K_2 mentén pedig (a triviális tüskézéssel) olyan 2-fogantyú ragasztható, melyhez alkalmas 3-fogantyút ragasztva egy elhagyható 2-fogantyú/3-fogantyú párt kapunk. Ezt az utóbbi elhagyható párt bevezetve csak azt kell belátnunk tehát, hogy K_1 és K_2 a $\partial_+ W_2$ peremben izotópak. Mivel $\pi_1(W) = \pi_1(X_0) = 1$, és így W_2 is egyszeresen összefüggő (hiszen $\pi_1(W)$-ben az 1-fogantyúk adják a generátorokat, míg a 2-fogantyúk a relációkat), azt rögtön megkapjuk, hogy K_1 és K_2 a W_2 sokaságban homotópok. Egy ilyen homotópiáról dimenzió okok miatt feltehető, hogy diszjunkt W_2 minden 1- és 2-fogantyújának magjától (melyeket függőlegesen lefolytattunk egész $X_0 \times \{0\}$-ig). Ebből következőleg a homotópia $\partial_+ W_2$-ben is választható. Ebben az n-dimenziós sokaságban ($n \geq 4$) azonban egy homotópiáról feltehető, hogy izotópia: $n > 4$-re egyszerűen a homotópia (a 2-dimenziós cső folytonos képe) beágyazottnak választható; $n = 4$ esetében pedig (ismét dimenzió okokból) a csőnek véges sok önátmetszése van, melyekről feltehetjük, hogy különböző t paraméter-értékekhez tartoznak. Evvel az észrevétellel a bizonyítás kész. $\square$

7.2.2. következmény. *Egy W^{n+1} ($n \geq 4$) h-kobordizmusról feltehető, hogy nem tartalmaz 0-, 1-, n- és $(n+1)$-fogantyúkat.*

Bizonyítás. Az előző állítást a duális felbontásra alkalmazva (és használva, hogy $n \geq 4$) a következmény adódik. $\square$

Jelölje $\{h_1^i, \ldots, h_{n_i}^i\}$ a W egy fenti fogantyú-felbontásának i-fogantyúit. Mint azt már láttuk, a $\{h_j^i \mid j = 1, \ldots, n_i\}$ szabad generátorokkal generált C_i szabad Abel-csoportok az 1.3 részben definiált $\partial\colon C_i \to C_{i-1}$ határoperátorokkal egy olyan (C_i, ∂) lánckomplexust alkotnak, melyre $H_*(C, \partial) = H_*(W, \partial_- W; \mathbb{Z})$. Mivel ez utóbbi csoport triviális (hiszen W h-kobordizmus), könnyű algebrai megfontolás bizonyítja a következő állítást.

7.2.3. tétel. *A C_i csoportoknak léteznek olyan $\{k_1^i, \ldots, k_{n_i}^i\}$ bázisai, hogy ezekben a bázisokban a ∂ leképezést olyan mátrix reprezentálja, melynek diagonálisában 1 vagy 0 áll, a diagonálison kívüli elemek pedig mind 0-k.* $\square$

A fenti tétel más szavakkal azt jelenti, hogy a bázisok $\{k_j^i \mid i = 2, \ldots, n-1;\ j = 1, \ldots, n_i\}$ uniójának létezik egy $\{(k_{j_1}^i, k_{j_2}^{i-1})\}$ párokra történő partíciója úgy, hogy $\partial k_{j_1}^i = k_{j_2}^{i-1}$.

7.2.4. tétel. *Egy fenti típusú bázistranszformáció C_i-ben fogantyú-csúsztatással is megvalósítható. Következésképp feltehetjük, hogy a $k_j^i \in C_i$ báziselemek i-fogantyúknak felelnek meg.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $i > k$ esetén elvégeztük a szükséges fogantyú-csúsztatásokat, és megtaláltuk a C_i csoportok megfelelő bázisait. Indukciót alkalmazva tehát pusztán egy olyan (h^k, h^{k-1}) fogantyú-párt kell találnunk, melyre $\partial h^k = h^{k-1}$. (Ebből $\partial^2 = 0$ miatt $\partial h^{k-1} = 0$ már következik.) Ekkor (esetleg h^k-t a többi fogantyún — esetleg többször is — átcsúsztatva) feltehető, hogy h^{k-1} nem szerepel más k-fogantyú határában, így az eljárás folytatható. A (h^k, h^{k-1}) fenti pár megtalálásához azonban elég egy olyan párt találni, melyre $\partial h^k = h^{k-1} +$ további $(k-1)$-fogantyúk lineáris kombinációja, hiszen h^{k-1} alkalmas (esetleg többszöri) csúsztatásával ez a pár már egy $\partial h^k = h^{k-1}$-et teljesítő párrá alakítható. Legyen tehát $n = \{|n_{ij}| \mid h_j^{k-1}$ együtthatója ∂h_i^k-ban $n_{ij}\}$. Az euklideszi algoritmust alkalmazva könnyen látható, hogy $n > 1$ esetén n értéke csökkenthető, ami bizonyítja az állítást. $\square$

Ilymódon tehát a $k_{j_1}^i$ fogantyú $S_a(k_{j_1}^i)$ ragasztó gömbje algebrailag egyszer metszi $k_{j_2}^{i-1}$ övgömbjét, és $S_a(k_{j_1}^i)$ algebrailag nulla pontban metszi minden további $(i-1)$-fogantyú övgömbjét. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy $S_a(k_{j_1}^i)$ ténylegesen diszjunkt ezektől az övgömböktől (és $k_{j_2}^{i-1}$ övgömbjét pontosan egy pontban metszi) — az algebrai metszetszám kiszámításánál a pontokat előjelesen számoljuk össze, így az ellentétes előjelű pontpárok az algebrai metszetszámon nem, csak a geometriain változtatnak.

7.2.5. megjegyzés. Két fogantyú (vagy általánosabban, két komplementer dimenziós Σ_1, Σ_2 zárt részsokaság) algebrai metszetszámát már az 1.3.1 megjegyzésben tisztáztuk. A $\gamma(\Sigma_1, \Sigma_2)$ *geometriai metszetszámon* pusztán a transzverzális metszet (véges) $|\Sigma_1 \cap \Sigma_2|$ elemszámát értjük. Nyilván $|\alpha(\Sigma_1, \Sigma_2)| \leq \gamma(\Sigma_1, \Sigma_2)$ (és az utóbbi mindig nem-negatív) és $\alpha(\Sigma_1, \Sigma_2) \equiv \gamma(\Sigma_1, \Sigma_2) \pmod 2$. Mint azt a fenti okfejtésben már említettük, $\alpha(\Sigma_1, \Sigma_2) = \gamma(\Sigma_1, \Sigma_2)$ nem feltétlenül áll fenn minden Σ_1, Σ_2 esetén.

A következő tétel éppen a két számítási mód közti különbséget "tünteti le". Ez az a pont, ahol az $n \geq 5$ feltétel nagyon fontos lesz — mint látni fogjuk, $n = 4$ esetén sem a következő tétel (a "Whitney trükk"), sem a h-kobordizmus tétel maga nem igaz.

7.2.6. tétel. (Whitney trükk) *Tegyük fel, hogy $Y_1^n, Y_2^m \subset X^{n+m}$ összefüggő, irányított, zárt, sima n- és m-dimenziós részsokaságok az X $(n+m)$-dimenziós egyszeresen összefüggő sima sokaságban és Y_1 transzverzálisan metszi Y_2-t. Tegyük fel továbbá, hogy $m \geq 3$ és $n \geq 2$ (valamint ha $n = 2$ akkor $\pi_1(X - Y_2) = 1$). Ekkor ha $p, q \in Y_1 \cap Y_2$ előjele különböző, akkor található egy olyan $\varphi: X \times [0,1] \to X$ leképezés, melyre rögzített $t \in [0,1]$ mellett $\varphi_t(x) = \varphi(x,t)$ diffeomorfizmus, $\varphi_0 = \mathrm{id}_X$ és $\varphi_1(Y_1) \cap Y_2 = Y_1 \cap Y_2 - \{p, q\}$.* □

Következésképp X egy φ izotópiájával Y_1 elmozdítható úgy, hogy $\gamma(Y_1, Y_2)$ kettővel csökken (hiszen p és q eltűnik a metszetből), míg $\alpha(Y_1, Y_2)$ változatlan marad. A fenti eljárás véges sokszori alkalmazásával feltehető tehát, hogy (a tétel feltételeinek teljesülése esetén) $\alpha(Y_1, Y_2) = \pm\gamma(Y_1, Y_2)$, vagyis minden metszéspont azonos előjelű lesz.

7.2.7. megjegyzés. A 7.2.6 tétel bizonyítása vázlatosan a következő módon történik: Legyen C_1 (illetve C_2) egy p-t q-val Y_1-ben (ill. Y_2-ben) összekötő út. A kettőt összefűzve tehát egy $C_{p,q}$ kört (egy, a $\{p, q\}$ párhoz tartozó *Whitney kört*) kapunk. A feltételek szerint $X - (Y_1 \cup Y_2)$ egyszeresen összefüggő, így $C_{p,q}$ egy $f: D^2 \to X$ (ahol is $f(\mathrm{int}\, D^2) \subset X - (Y_1 \cup Y_2)$) leképezés $f|_{\partial D^2}$ megszorításának képeként állítható elő. Mivel $\dim X \geq 5$, a fenti f leképezésről feltehető, hogy beágyazás. (Az $f(\mathrm{int}\, D^2) = D_{p,q} \subset X - (Y_1 \cup Y_2)$ képet szokás a $\{p, q\}$ párhoz tartozó *Whitney diszknek* nevezni.) Mivel p és q előjele különböző, belátható, hogy a fentiek valójában egy $D^2 \times D^{n+m-2}$ 2-fogantyú beágyazására is elmondhatók; mégpedig úgy, hogy Y_1-ben a perem képe $C_1 \times D^{n-1}$ (ill. Y_2-ben $C_2 \times D^{m-1}$) lesz. (Ez az a pont, ahol kihasználjuk, hogy p és q ellentétes előjelű metszéspontok.) Az ilymódon megtalált 2-fogantyúban (lokálisan) könnyen található egy p-t és q-t eltüntető izotópia, ami bebizonyítja a tételt.

7.2.8. feladat. Ellenőrizzük le, hogy a 7.2.2 következmény által adott fogantyú-felbontás megfelelő fogantyú-párjainak ragasztási és övgömbjeire teljesülnek a Whitney trükk (7.2.6 tétel) feltételei. (*Ötlet*: Mivel nincsenek 0-, 1-, n- és $(n+1)$-fogantyúk, a dimenzió-feltétel automatikus; így pusztán $\pi_1(X - Y_2) = 1$-et kell leellenőrizni; evvel kapcsolatban lásd a 8.2.1 feladatot.)

A 7.2.6 tételt sorra a $\{(k^i_{j_1}, k^{i-1}_{j_2})\}$ párokra alkamazva azokat elhagyható párokká tehetjük; ugyanígy a 0 algebrai metszést mutató fogantyú-párok ragasztó és övgömbjeit is diszjunkttá tehetjük. (Vegyük észre, hogy a 7.2.7 megjegyzésben leírt vázlat azt mutatja, hogy a Whitney trükk lokális, vagyis p és q eltüntetés során nem keletkeznek újabb metszéspontok.) Az elhagyható párokat egymás után elhagyva végülis W egy olyan felbontását kapjuk, melyben egyetlen fogantyú szerepel sem, így a h-kobordizmus tételt beláttuk. □

A h-kobordizmus tételnek számos fontos és érdekes alkalmazása található a magasabb dimenziós sokaságok topológiájának tanulmányozásában; ezen témákra jelen jegyzetben nem térünk ki, lásd például Milnor [M3] könyvét.

8. előadás

h-kobordizmusok 4-dimenziós sokaságok között

Az előző előadásban belátott h-kobordizmus tétel (7.1.2 tétel) bizonyításában többször is használtuk az $n \geq 5$ feltételt. Ebben az előadásban (egy 10. előadás-beli tételt alkalmazva) belátjuk, hogy $n = 4$ esetén a h-kobordizmus tétel nem igaz, majd a témához kapcsolódó érdekes eredményeket mutatunk meg.

8.1 h-kobordizmusok és metszetformák

Legyen tehát W^5 egy egyszeresen összefüggő h-kobordizmus X_0^4 és X_1^4 egyszeresen összefüggő 4-dimenziós sokaságok között. A 7.2.2 következmény (mely csak $n \geq 4$-et kíván meg) alapján W-nek választható olyan fogantyú-felbontása, melyben csak 2- és 3-fogantyúk szerepelnek. Jelölje W_2 az $X_0 \times I$-hez ragasztott 2-fogantyúk unióját.

8.1.1. lemma. *Ha W_2-ben k darab 2-fogantyú szerepel, akkor $\partial_+ W_2$ diffeomorf $X_0 \# k(S^2 \times S^2)$-vel.*

Bizonyítás. Legyen $S \subset \partial_+(X_0 \times I)$ a h 2-fogantyú ragasztási gömbje. Mivel $\partial_+(X_0 \times I) = X_0 \times \{1\}$ egy egyszeresen összefüggő 4-dimenziós sokaság, feltehető, hogy S (izotópia erejéig) egy $S^4 \# X_0$ felbontásban a standard $S^1 \subset S^4$-gyel azonos. Ebben az esetben pedig a fogantyú-ragasztás egy kobordizmust jelent S^4 és $S^2 \times S^2$ között; az érvelést a többi 2-fogantyúra elismételve a lemma adódik. □

8.1.2. feladat. Lássuk be, hogy $S^4 \times I$-hez a standard $S^1 \subset S^4 \times \{1\}$ mentén egy (5-dimenziós) 2-fogantyút ragasztva a kapott V sokaságra $\partial_+ V \approx S^2 \times S^2$ teljesül.

8.1.3. következmény. *Ha X_0 és X_1 h-kobordáns 4-sokaságok, akkor létezik olyan k hogy $X_0 \# k(S^2 \times S^2) \approx X_1 \# k(S^2 \times S^2)$.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző lemmát a duális felbontásra, és vegyük észre, hogy a duális vételével pusztán felcseréljük X_0 és X_1, illetve a 2- és 3-fogantyúk szerepét. Mivel X_0 és X_1 h-kobordánsak, tehát $Q_{X_0} \cong Q_{X_1}$, a 8.1.1 lemmából X_0-ra és X_1-re kapott két k érték megegyezik, így a következmény adódik. □

A következő tétel azt mutatja, hogy egy 4-sokaság h-kobordizmus-osztálya a sokaság algebrai tulajdonságaitól függ csak. Ez a tétel az első lépésnek bizonyul majd a korábban már többször említett topologikus osztályozás irányába.

8.1.4. tétel. *Az X_0 és X_1 egyszeresen összefüggő 4-sokaságok között pontosan akkor létezik egy W^5 h-kobordizmus, ha $Q_{X_0} \cong Q_{X_1}$.*

Bizonyítás. A W^5 h-kobordizmus léte egy $i_1^* \circ (i_0^*)^{-1}\colon H^*(X_0;\mathbb{Z}) \to H^*(X_1;\mathbb{Z})$ gyűrű-izomorfizmust ad, mely bizonyítja, hogy $Q_{X_0} \cong Q_{X_1}$. Ha $Q_{X_0} \cong Q_{X_1}$, akkor speciálisan $\sigma(X_0) = \sigma(X_1)$, így létezik egy V kobordizmus X_0 és X_1 között. Ennek 1-fogantyúit kiműtve egy olyan V' kobordizmust kapunk, melynek van csak 2- és 3-fogantyúkat használó fogantyú-felbontása (alkalmazzuk 7.2.2 következményt). Legyen $V_2' = (X_0 \times I) \cup \{2\text{-}$fogantyúk$\}$, míg DV_2' ennek komplementuma V'-ben. Mint azt már láttuk, $\partial_+ V'$ diffeomorf $X_0 \# kS^2 \times S^2$-vel (itt k a V'-beli 2-fogantyúk számát jelöli). Ha V_2'-re úgy tudjuk DV_2'-t ráragasztani, hogy a 2-fogantyúk övgömbjei algebrailag δ_{ij} szerint messék a 3-fogantyúk ragasztó gömbjeit, akkor a választott f ragasztással $V_2' \cup_f DV_2' = W$ egy h-kobordizmus lesz. Következésképp, a tétel bizonyításához pusztán egy előírt $\varphi\colon H_2(\partial_+ V_2';\mathbb{Z}) \to H_2(\partial_- DV_2';\mathbb{Z})$ izomorfizmusra kell egy olyan f diffeomorfizmust találni, melyre $f_* = \varphi$. Ezt garantálja a következő tétel, mellyel a 8.1.4 tétel bizonyítása kész. □

8.1.5. tétel. (Wall, [W2]) *Legyen X egyszeresen összefüggő, indefinit metszetformájú 4-sokaság. Ekkor $(H_2(X\#S^2 \times S^2;\mathbb{Z}), Q_{X\#S^2\times S^2})$ minden α automorfizmusához létezik egy olyan $f\colon X\#S^2\times S^2 \to X\#S^2\times S^2$ diffeomorfizmus, hogy $\alpha = f_*$.* □

8.1.6. megjegyzés. Vegyük észre, hogy a fenti érveléssel valójában minden $\varphi\colon H_2(\partial_+ V_2';\mathbb{Z}) \to H_2(\partial_- DV_2';\mathbb{Z})$ izomorfizmusra kapunk egy olyan W_φ h-kobordizmust, mely éppen φ-t indukálja.

A 8.1.5 tétel bizonyítása algebrai és Kirby-kalkulus érvek érdekes kombinációja. Először az $\mathrm{Aut}(H^2(X\#S^2 \times S^2;\mathbb{Z}), Q_{X\#S^2\times S^2})$ automorfizmus-csoport egy alkalmas generátorrendszerét kell megtalálni, majd ezekre az automorfizmusokra látható be — Kirby-kalkulust alkalmazva —, hogy diffeomorfizmusokkal indukálhatók. A bizonyítás részletei Wall [W2] cikkében találhatók meg.

A magasabb dimenziós h-kobordizmus tétel bizonyítását imitálva megpróbáljuk a 3-fogantyúk ragasztó gömbjeit izotópiával úgy elmozdítani, hogy azok a megfelelő 2-fogantyúkkal elhagyható párokat alkossanak, és így belátni azt, hogy a W h-kobordizmus triviális. Jelölje tehát $A_i \subset \partial_+ W_2$ az i-edik 3-fogantyú ragasztási gömbjét, B_j pedig a j-edik 2-fogantyú övgömbjét. Tegyük fel, hogy $A_i \cdot B_j = \delta_{ij}$, vagyis a fogantyúk algebrailag elhagyható párokat alkotnak. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy $A_i \cap B_j = \emptyset$ ($i \neq j$ esetén) és $A_i \cap B_i = \{\text{pt.}\}$, hiszen az algebrai metszet számításakor az ellentétes előjelű pontpárokat nem vettük figyelembe. Magasabb dimenzióban a Whitney trükk segítségével értük el, hogy az algebrai metszet egyenlő legyen a geometriaival, amiből a h-kobordizmus tétel könnyen adódott. A 4-dimenziós esetben azonban több problémával is szembe kell néznünk.

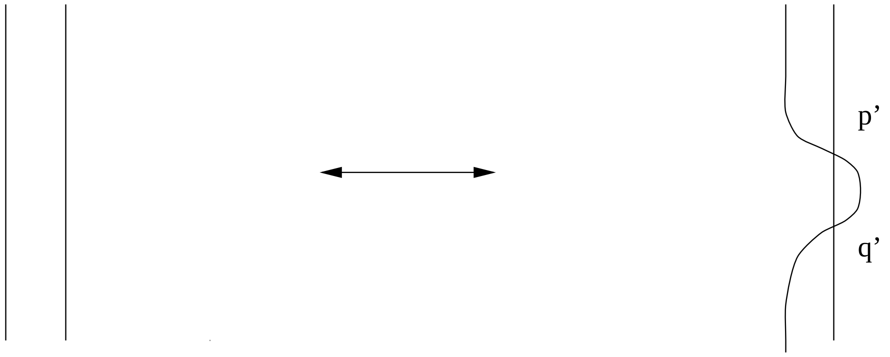
8.2 Casson tornyok és fogantyúk

Legyen tehát $p, q \in A_i \cap B_j$ és tegyük fel, hogy p és q ellentétes előjelűek. Vegyük a nekik megfelelő $C_{p,q}$ Whitney kört, vagyis kössük össze p-t és q-t A_i-ben és B_j-ben, majd vegyük e két görbe által alkotott kört. Hasonlóan a magasabb dimanziós esethez, B_j-k komplementuma (ill. A_i-k komplementuma) egyszeresen összefüggő lesz, az azonban nem világos, miért lesz $C_{p,q}$ a $\partial_+ W_2 - (\cup A_i \cup B_j)$ térben pontrahúzható.

8.2.1. feladat. Lássuk be, hogy $\pi_1(\partial_+ W_2 - (\cup_{i=1}^n A_i)) = \pi_1(\partial_+ W_2 - (\cup_{j=1}^n B_j)) = 1$. (*Ötlet*: Lássuk be azt, hogy $\partial_+ W_2 - (\cup_{i=1}^n B_j)$ az $X_0 - \{$az n darab 2-fogantyú ragasztási köre$\}$ térrel homeomorf; innen dimenzió okokból következik az egyszeres összefüggőség. Hasonló érvelés (a duális felbontásra) adja, hogy $\pi_1(\partial_+ W_2 - (\cup_{i=1}^n A_i)) = 1$.)

8.2.2. lemma. (Casson) *Esetleg további $p', q' \in A_i \cap B_j$ ellentétes előjelű metszéspontokat bevezetve (vagyis B_j-ket megfelelő izotópiával mozgatva) elérhető, hogy $\pi_1(\partial_+ W_2 - (\cup_i A_i \cup_j B_j)) = 1$.* □

8.2.3. megjegyzés. Casson fenti lemmája látszólag eredeti célunk ellen működik, hiszen az újabb (ellentétes előjelű) metszéspontok bevezetésével növeljük az algebrai és geometriai metszetszám közti különbséget. Ez az az ár, amit a gömbök komplementumának egyszeres összefüggőségéért (mely a gondolatmenet kezdetéhez szükséges) fizetnünk kell. A 8.2.2 lemma bizonyítása [C] és [K2] könyvekben található meg; a fő ötlet a következő: alkalmas (a 8.1 ábrán bemutatott) izotópiával — és p', q' metszetpontok bevezetésével — a $\pi_1(\partial_+ W_2 - (\cup A_i \cup B_j))$ fundamentális csoport generátorai sorban megölhetők.



8.1 ábra: Egy Casson-féle izotópia

Végezzük el tehát a szükséges izotópiákat, a (p_k, q_k) ellentétes előjelű metszéspontokra vegyük a megfelelő Whitney köröket, és rögzítsünk diszjunkt $D_k \to \partial_+ W_2 - (\cup A_i \cup B_j)$ immertált Whitney diszkeket. Amennyiben D_k beágyazott, a Whitney trükk alkalmazható. Az $n = 4$ esetben azonban a D_k diszkekről nem tehető fel, hogy beágyazottak; azt azonban feltehetjük, hogy csak véges sok dupla pontot tartalmazó immerzióval vannak $\partial_+ W_2 - (\cup A_i \cup B_j)$-ba beképezve. (A diszjunktság eléréséhez valójában esetleg további dupla pontokat kell bevezetni a diszkeken; Casson fenti lemmája értelmében így elérhető, hogy a már rögzített diszkek komplementuma is egyszeresen összefüggő maradjon.) A Whitney diszkek dupla pontjainak eltüntetéséhez újabb Whitney köröket és újabb immertált Whitney diszkeket vezetünk be, melyek komplementumát Casson lemmáját alkalmazva egyszeresen összefüggővé tehetjük, majd az eljárást tovább ismételjük. Az m-edik lépés után ilymódon minden eredeti $C_{p,q}$ Whitney körre egy m magasságú $CT^m_{p,q}$ *Casson tornyot* definiáltunk. Rögzített p, q-ra vegyük ezek $\cup_m CT^m_{p,q}$ unióját, és hagyjuk el a határ azon részét, melyet nem ragasztottunk az első lépésben $C_{p,q}$ egy környezetéhez. Az így kapott $CH_{p,q}$ topologikus teret *Casson fogantyúnak* hívjuk. A következő alapvető eredmény a fent leírt Casson fogantyúk topológiáját adja meg; ezen tétel alapján bizonyítható be a 4-dimenziós *topologikus* h-kobordizmus tétel. A 8.2.4 tétel bizonyítása rendkívül bonyolult, mind terjedelmében mind mélységében messze túlnyúlik jelen jegyzetünk keretein. (A bizonyítás megtalálható például Freedman eredeti cikkében [F], valamint a [FQ], [K2] könyvekben.)

8.2.4. tétel. (Freedman, [F]) *A fent leírt módon elkészített $(CH, \partial CH)$ Casson fogantyú (a megmarad határral) a $(D^2 \times D^2, \partial D^2 \times D^2)$ 2-fogantyúval, mint térpárral homeomorf.* □

Következésképp *topologikusan* minden $C_{p,q}$ Whitney körre található egy Whitney diszk, így a magasabb dimenziós h-kobordizmus tétel bizonyítását elismételve azt kapjuk, hogy W homeomorf $X_0 \times I$-vel. (Hiszen topologikus izotópiákat alkalmazva a megfelelő Whitney trükkök elvégezhetők, tehát — topologikus változtatások után — a geometriai és algebrai metszetszámok egyenlővé tehetők.) Következésképp h-kobordáns 4-sokaságokról beláttuk, hogy homeomorfak. Ebből adódóan megkapjuk Freedman 4.1.2 tételének egy speciális (de nagyon fontos) esetét:

8.2.5. tétel. *Két egyszeresen összefüggő, sima, zárt 4-sokaság pontosan akkor homeomorf, ha metszetformáik izomorfak.* □

Mivel a fenti 8.2.4 Tétel nem garantál diffeomrofizmust, W nem feltétlenül diffeomorf $X_0 \times I$-vel. A fenti érvelés egy (egyszerű) részét elismételve azonban a következő, a sokaságok sima struktúrájára vonatkozó (sokkal gyengébb) eredményt kaphatunk:

8.2.6. tétel. ([CFHS]) *A (W, X_0, X_1) h-kobordizmusnak létezik egy olyan (V, U_0, U_1) rész-h-kobordizmusa (ami a peremen triviális), melyre U_i pontrahúzható része X_i-nek és a $(W - \text{int } V, X_0 - \text{int } U_0, X_1 - \text{int } U_1)$ hármas a triviális h-kobordizmus, azaz mint hármas diffeomorf $X_0 - \text{int } U_0 \times I$-vel.* □

Ilymódon tehát 4-dimenziós sokaságok közötti h-kobordizmusok egy pontrahúzható részt leszámítva triviálisak — ez a pontrahúzható rész azonban meglehetősen komplikált lehet.

8.3 Egzotikus $\mathbb{R}^4$-ek

A 4-dimenziós topológia talán legmeglepőbb eredménye egzotikus $\mathbb{R}^4$-ek létezésének bizonyítása.

8.3.1. definíció. Az X sima 4-dimenziós sokaság egy *egzotikus* $\mathbb{R}^4$, ha X homeomorf de nem diffeomorf a standard euklideszi $\mathbb{R}^4$-gyel.

Hasonlóan definiálhatnánk egzotikus $\mathbb{R}^n$-t minden n-re, ilyenek azonban $n \neq 4$ esetén nem léteznek, hiszen egy klasszikus eredmény szerint:

8.3.2. tétel. *Ha az X sima n-dimenziós sokaság $\mathbb{R}^n$-nel homeomorf és $n \neq 4$, akkor X és $\mathbb{R}^n$ diffeomorfak.* □

A következőkben — egy későbbi eredményt és Freedman fenti alapvető eredményét (8.2.4 tétel) felhasználva — a következő egzisztencia-tételt fogjuk belátni.

8.3.3. tétel. *Létezik egzotikus $\mathbb{R}^4$.*

8.3.4. megjegyzések. Az első egzotikus $\mathbb{R}^4$ megtalálása után hamar kiderült, hogy rengeteg ilyen sokaság van. A következők igazak például (a teljesség igénye nélkül):

(a) A sík minden rögzített (x, y) pontjához hozzárendelhetünk kontinuum sok, páronként nem diffeomorf egzotikus $\mathbb{R}^4$-et; a sík különböző pontjaihoz tartozó egzotikus $\mathbb{R}^4$-ek sem diffeomorfak.

(b) A standard $\mathbb{R}^4$ nyílt részhalmazaként kontinuum sok egzotikus $\mathbb{R}^4$ áll elő.

(c) Az $\mathbb{R}^2$ síknak létezik a standard $\mathbb{R}^4$-be olyan sima beágyazása, mely mentén dupla elágazó fedést véve az eredmény egy egzotikus $\mathbb{R}^4$ lesz.

Az előadás hátralevő részében a 8.3.3 tétel bizonyítását vázoljuk majd. Legyen tehát W egy h-kobordizmus (egy később meghatározandó) X_0 és X_1 térpár között. Ha találunk olyan X_0, X_1 párt, melyek nem diffeomorfak (de homeomorfak), akkor W simán nem (csak topologikusan) triviális.

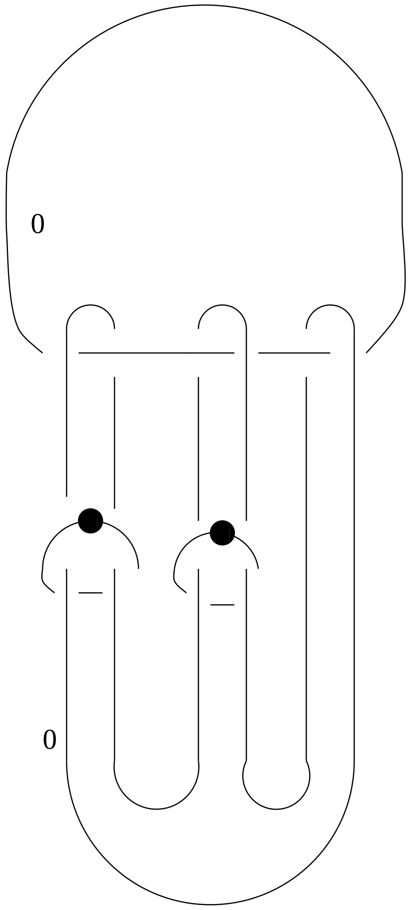
8.3.5. tétel. (Lásd még 10.2.7 következményt.) *Legyen X_0 a korábban megismert $K3$-felület felfújtja, X_1 pedig $3\mathbb{CP}^2\#20\overline{\mathbb{CP}^2}$. Ekkor $Q_{X_0} \cong Q_{X_1}$ (így X_0 és X_1 h-kobordánsak), de X_0 és X_1 nem diffeomorfak (tehát a h-kobordizmus simán nem triviális).*

A $Q_{X_0} \cong Q_{X_1}$ állítás könnyen következik a korábbiakból. Ahhoz, hogy belássuk, X_0 és X_1 nem diffeomorfak, Seiberg-Witten invariánsok (részleges) kiszámítására van szükség (lásd a 10. előadást).

Vegyünk tehát egy W h-kobordizmust X_0 és X_1 között, és végezzük el az eddig tanult egyszerűsítéseket — vagyis tegyük fel, hogy W fogantyú-felbontásában csak 2- és 3-fogantyúk szerepelnek, és $\partial_+ W_2$-ben a ragasztó és övgömbök extra metszéspont-párjaira odaragasztottuk a megfelelő Casson fogantyúkat. Extra önátmetszések bevezetésével feltehető, hogy a fenti Casson fogantyúk mind diffeomorfak egymással. Feltehető továbbá az is, hogy az öv- és ragasztási gömbök szimmetrikusan metszik egymást, vagyis az i-edik öv és a j-edik ragasztási gömb geometriai metszete megegyezik a j-edik öv és az i-edik ragasztási gömb geometriai metszetével. Legyen U a ragasztási és övgömbök uniójának kis környezete, V pedig U és a fenti Casson fogantyúk uniója. Evvel $\partial_+ W_2$ egy V nyílt részét kapjuk; ehhez a megfelelő 3-fogantyúkat ragasztva — vagyis a ragasztási gömbök mentén műtve — X_1-nek egy R_1 nyílt, míg az övgömbök mentén műtve X_0-nak egy R_0 nyílt része adódik. A fenti szimmetria miatt könnyen látható, hogy R_0 és R_1 diffeomorfak.

8.3.6. tétel. *Az R_0 sokaság nem diffeomorf $\mathbb{R}^4$-gyel.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy R_0 diffeomorf $\mathbb{R}^4$-gyel. Legyen az $\overline{U} \subset V$ rész műtét utáni képe R_0-ban C. Mivel C kompakt, az $R_0 \cong \mathbb{R}^4$ feltevésből adódóan létezik egy olyan D_0^4 simán beágyazott zárt diszk, mely C-t tartalmazza. Ennek S^3 pereme már C-n kívül van, ahol pedig h-kobordizmusunk már triviális. Ilymódon ez a perem megjelenik X_1-ben is, mint a D_0^4-en végrehajtott műtétek képe. Mivel ez is egy D^4, a W kobordizmust a fenti diszkek felett a triviálisra cserélve egy X_0 és X_1 közötti triviális h-kobordizmust találtunk, ami azt jelenti,



8.2 ábra: Metsző gömbök környezete egy 4-sokaságban

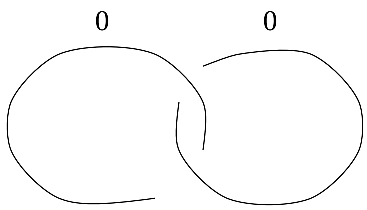
hogy X_0 és X_1 diffeomorf 4-sokaságok. Ez azonban ellentmond X_0 és X_1 választásának, következésképp R_0 nem diffeomorf $\mathbb{R}^4$-gyel. $\square$

Freedman tétele szerint azonban egy Casson fogantyú mindig homeomorf a $(D^2 \times D^2, \partial D^2 \times D^2)$ 2-fogantyúval, vagyis a topologikus Whitney trükk elvégezhető, tehát homeomorfia erejéig feltehető, hogy a ragasztó és övgömbök geometrikusan is δ_{ij} szerint metszik egymást. Ekkor azonban a műtétek V-t egy $\mathbb{R}^4$-gyé alakítják, vagyis R_0 (és persze így R_1 is) homeomorf $\mathbb{R}^4$-gyel.

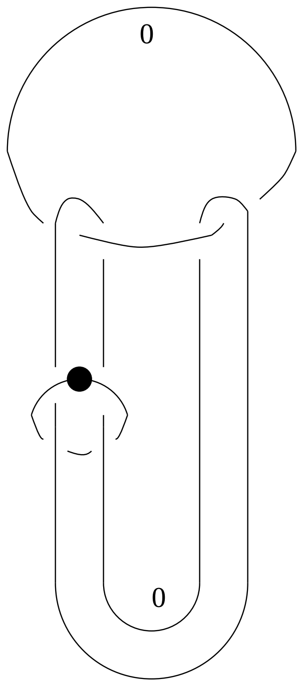
8.3.7. következmény. *Az R_0 4-sokaság egy egzotikus $\mathbb{R}^4$.* $\square$

8.3.8. megjegyzés. Valójában a legegyszerűbb eset — amikor egyetlen ragasztó és övgömb van csak $\partial_+ W_2$-ben, azok 3 pontban metszik egymást, és a Casson fogantyú minden szintjén csak egyetlen (pozitív) önátmetszésű Whitney diszk van — már egzotikus $\mathbb{R}^4$-et ad [BG].

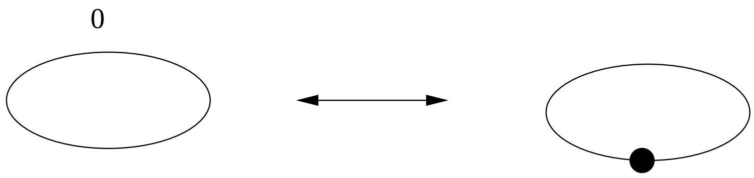
8.3.9. feladatok. (a) Tegyük fel, hogy $S_1, S_2 \subset X$ beágyazott gömbök három (két pozitív és egy negatív előjelű) pontban metszik egymást. Lássuk be, hogy a 8.2 ábra az $S_1 \cup S_2 \subset X$ unió $\nu(S_1 \cup S_2)$ csőszerű környezetének egy Kirby diagramját adja meg. (*Ötlet*: Ha $S_1 \cap S_2$ egyetlen pontból áll, akkor könnyen látható, hogy $\nu(S_1 \cup S_2)$-t a 8.3 ábra Kirby diagramja adja meg. Újabb metszéspontot a következő módon vezethetünk be: legyenek $D_i \subset S_i$ diszkek, $D_i \times D^2 \subset \nu S_i$ pedig triviális részek a normálnyalábokban $(i = 1, 2)$. $D_1 \times D^2$-t $D_2 \times D^2$-vel egy, a fibrumot a bázissal felcserélő diffeomorfizmussal összeragasztva éppen a megfelelő teret kapjuk — ennek egy Kirby diagramját mutatja be a 8.4 ábra. Az eljárást ismételve a feladat megoldását kapjuk.)



8.3 ábra: Két, egymást egy pontban metsző gömb környezetének Kirby diagramja



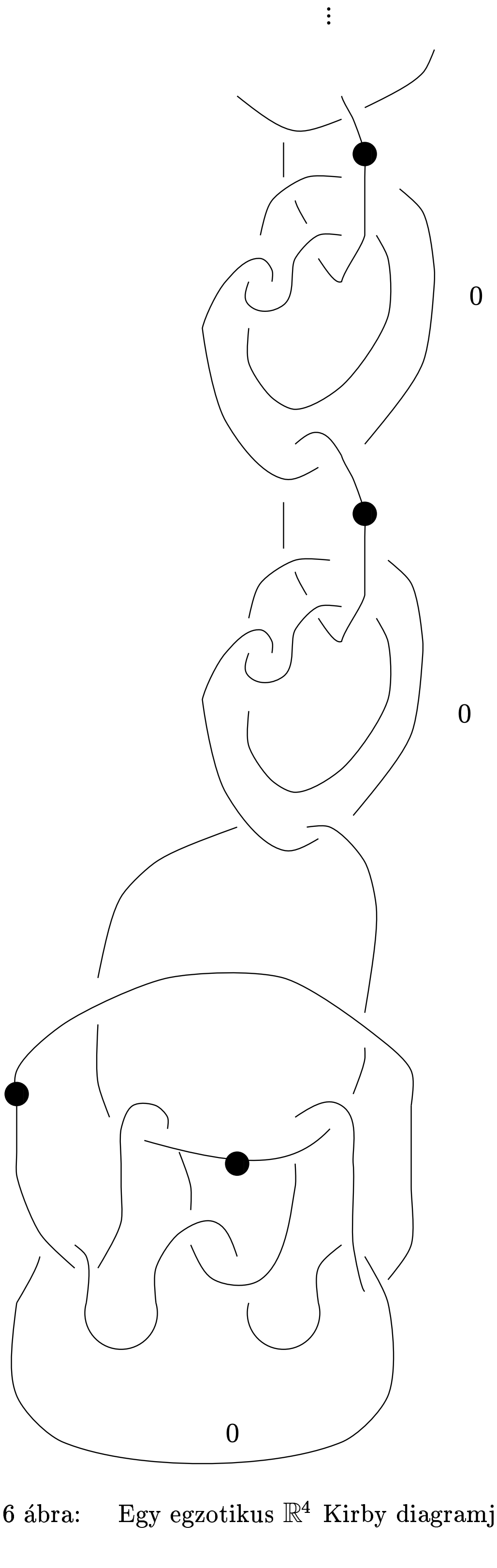
8.4 ábra: Új metszéspont bevezetése



8.5 ábra: Műtét hatása egy Kirby diagramon

(b) Bizonyítsuk be, hogy egy 1-fogantyú kiműtése a megfelelő Kirby diagramban a pontozott kör pontjának 0 tüskézésre való cseréjét jelenti; és fordítva, egy 0 tüskézésű triviális csomó által adott gömböt kiműtve az új diagram a régitől pusztán a 0 tüskézés pontra való cseréjét jelenti, lásd a 8.5 ábrát.

(c) Lássuk be, hogy a fenti $\nu(S_1 \cup S_2)$ sokasághoz (lásd 8.2 ábrát) a Whitney kör mentén egy 2-fogantyút ragasztva majd S_1 (vagy S_2) menti műtétet végrehajtva $\mathbb{R}^4$-et kapjuk. Mivel Freedman tétele szerint egy Casson fogantyú egy 2-fogantyúval homeomorf, a feladat éppen azt mutatja meg, hogy R_0 homeomorf $\mathbb{R}^4$-gyel. A 8.6 ábra egy egzotikus $\mathbb{R}^4$ Kirby diagramját adja meg — lásd [BG].



8.6 ábra: Egy egzotikus $\mathbb{R}^4$ Kirby diagramja

9. előadás

Spin és spin^C struktúrák

Mint azt látni fogjuk, 4-dimenziós sokaságok sima struktúráinak vizsgálatában az eddig tanultaktól teljesen eltérő, jórészt differenciálgeometriai és analitikus eszközök használhatók. Először az alapvető definíciókat fogjuk ismertetni, majd rátérünk egy diffeomorfizmus-invariáns, a Seiberg-Witten függvény definíciójára.

9.1 Spin struktúrák

Legyen X irányítható 4-dimenziós Riemann-sokaság. Ekkor a $TX \to X$ érintőnyaláb struktúra-csoportja $SO(4)$-re redukálódik, mely összefüggő, kompakt Lie-csoport és $\pi_1(SO(4)) = \mathbb{Z}_2$. Fizikai motivációk alapján vetődik fel az a kérdés, mi módon tehetnénk a struktúra-csoportot egyszeresen összefüggővé. (Ismert, hogy minden G kompakt Lie-csoportra $\pi_2(G) = 1$, így $\pi_1(G) = 1$ esetén G alacsony dimenziós homotópia- és homológia-csoportjai eltűnnek.)

Emlékezzünk vissza, hogy $SO(2) \cong U(1) = S^1$, és ha $SU(2)$ jelöli azon 2×2 unitér mátrixok csoportját, melyek determinánsa 1, akkor — a fentiekhez hasonlóan — $SU(2) \cong S^3 = Sp(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid ||q|| = 1\}$ (az egységnyi hosszúságú kvaterniók csoportja). A $\varphi(q_+, q_-)x = q_+ x q_-^{-1}$ definícióval ($x \in \mathbb{H}$, $q_\pm \in SU(2)$, a szorzás pedig kvaternió-szorzás) egy $\varphi\colon SU(2) \times SU(2) \to SO(4)$ leképezés adható meg. Egyszerű számolás mutathatja, hogy φ egy epimorfizmus, melynek magját (I, I) és $(-I, -I)$ alkotják. Mivel $\pi_1(SO(4)) = \mathbb{Z}_2$ és $SU(2) \times SU(2)$ egyszeresen összefüggő, ez a csoport éppen $SO(4)$ univerzális fedése.

9.1.1. definíció. Az $SU(2) \times SU(2)$ csoportot a 4-dimenziós $Spin(4)$ *spin csoportnak* nevezzük; a két vetítés által kapott $\mu_\pm$ komplex 2-dimenziós reprezentáció pedig $Spin(4)$ két spinor reprezentációja.

9.1.2. megjegyzés. A fentiekhez hasonlóan definiálható a $Spin(3)$ 3-dimenziós spin csoport is, mely tehát (mint $SO(3)$ univerzális fedése) $SU(2)$-vel izomorf. Vegyük azonban észre, hogy ekkor csak egy spinor reprezentáció adódik. Valójában minden $n \geq 3$-ra (amikor is $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$) az n-dimenziós $Spin(n)$ spin csoport (mint $SO(n)$ univerzális fedése) definiálható, $Spin(n)$-nek páros n esetén két, páratlan n esetén egy kanonikus (ún. spinor) reprezentációja van.

A továbbiakban jelölje $P_{SO(4)} \to X$ a $TX \to X$ érintőnyalábhoz tartozó principális $SO(4)$-nyalábot.

9.1.3. definíció. A $P_{Spin(4)} \to X$ principális $Spin(4)$-nyalábot *spin struktúrának* hívjuk az X 4-sokaságon, ha létezik egy olyan $P_{Spin(4)} \to P_{SO(4)}$ kettős fedés, mely nyalábleképezés (azaz fibrumot fibrumba képez) és fibrumonként a $\varphi\colon Spin(4) \to SO(4)$ kettős fedést adja; vagyis ha $P_{Spin(4)} \times_\varphi SO(4) = P_{SO(4)}$. A $P_{Spin(4)}$ és a $Q_{Spin(4)}$ spin struktúrák izomorfak, ha létezik egy olyan $f\colon P_{Spin(4)} \to Q_{Spin(4)}$ nyaláb-izomorfizmus, mely a kettős fedésekkel kommutatív diagramot alkot.

9.1.4. tétel. *Az X^4 irányított Riemann-sokaságon pontosan akkor létezik spin struktúra, ha $w_2(X) = 0$. Ekkor a különböző spin struktúrák terén a $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ csoport szabadon és tranzitívan hat.*

Bizonyítás. Legyen $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset X_4 = X$ a 4-sokaság egy cella-felbontása. Akadály-elmélettel belátható, hogy $w_2(X) = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha a $TX|_{X_2}$ megszorított nyaláb triviális. (Itt X_2 a legfeljebb 2-dimenziós cellák uniója.) Mivel $\pi_1(Spin(4)) = 1$, egy $P_{Spin(4)} \to X$ nyaláb mindig triviális X_2 felett; a trivialitást mutató szelés képe a $P_{Spin(4)} \to P_{SO(4)}$ fedésnél éppen azt adja, hogy $P_{SO(4)}|_{X_2}$ is triviális. Következésképp egy spin struktúra létezés magával vonja $w_2(X) = 0$-t.

Megfordítva, ha $w_2(X) = 0$, akkor $P_{SO(4)}|_{X_2}$ triviális, így a 2-váz felett könnyedén megadható a $P_{Spin(4)}|_{X_2} \to P_{SO(4)}|_{X_2}$ kettős fedés. Ahhoz, hogy ezt a fedést a magasabb dimenziós cellák fölé kiterjesszük, az $S^{k-1} \to SO(4)$ ($k \geq 3$) ragasztó-leképezéseket (melyek az e_k k-cella feletti $e_k \times SO(4)$ triviális nyalábot ragasztják az alacsonyabb cellák felett már megadott nyalábhoz) kell egy $S^{k-1} \to Spin(4)$ leképezéssé felemelni. Mivel a $\rho\colon Spin(4) \to SO(4)$ kettős fedés egy $\rho_*\colon \pi_k(Spin(4)) \to \pi_k(SO(4))$ izomorfizmust indukál $k \geq 2$ esetén, a fenti felemelés nyilván megtehető. Evvel tehát beláttuk, hogy $w_2(X) = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha X-en létezik spin struktúra. (Ebben az esetben, helytelenül, X-et spin sokaságnak is szokás nevezni — a spin sokaság elnevezés magában foglal egy rögzített spin struktúrát is.) A különböző spin struktúrák $P_{SO(4)}|_{X_2}$ különböző trivializációinak felelnek meg, ezeket pedig $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ paraméterezi, hiszen két spin struktúra két trivializációt ad X_2 felett, melyek egy $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$-beli elemben különböznek. $\square$

9.1.5. következmény. *Ha X spin, akkor a Q_X metszetforma páros. Ha Q_X páros és X egyszeresen összefüggő, akkor X spin. (Létezik azonban olyan nemspin sokaság, melynek metszetformája páros; természetesen ennek a sokaságnak nemtriviális a fundamentális csoportja.)*

Bizonyítás. Mivel $\langle w_2(X), \alpha\rangle \equiv \langle \alpha, \alpha\rangle \pmod 2$ minden $\alpha \in H_2(X; \mathbb{Z})$-re (5.2.9(b) feladat), $w_2(X) = 0$-ból Q_X párossága következik. Ha $\pi_1(X) = 1$, akkor a $H_2(X; \mathbb{Z})$ homológia csoportban nincsen torzió, így ha $\langle w_2(X), \alpha\rangle = 0$ minden α-ra, akkor $w_2(X) = 0$. Ha $H_2(X; \mathbb{Z})$-ben van páros rendű elem, akkor a fenti érvelés nem helyes — és valóban, létezik olyan nemspin ($\mathbb{Z}_2$ fundamentális csoportú) 4-sokaság, melynek metszetformája páros. (A fenti bizonyításban α jelölte az egész együtthatós homológia elem mod 2 redukcióját is.) $\square$

9.1.6. megjegyzés. A spin struktúra fenti leírásához analóg módon lehet egy X sokaság irányíthatóságát megadni. Az X sokaság pontosan akkor irányítható, ha a $TX \to X$ érintőnyaláb az X_1 1-váz felett triviális; egy irányítást pedig $TX|_{X_1}$ egy trivializációja ad meg. Hasonlóan az eddigiekhez, $TX|_{X_1} \to X_1$ pontosan akkor triviális, ha $w_1(X) = 0$, továbbá X különböző irányításait $H^0(X; \mathbb{Z}_2)$ paraméterezi. Ebben az értelemben tehát a spin tulajdonság az irányíthatóság általánosításának tekinthető. A spin struktúra fenti definíciója valójában tetszőleges n dimenziós sokaságokra kiterjeszthető; a 9.1.4 tételt általánosítva kapjuk, hogy egy X^n irányított n-dimenziós Riemann-sokaságon pontosan akkor van spin struktúra, ha $w_2(X) = 0$.

9.1.7. feladat. Lássuk be, hogy ha egy $F \to M$ valós vektornyalábra $w_1(F) = w_2(F) = 0$ tejlesül, akkor $w_3(F) = 0$. (Ilymódon tehát a fenti analógiát követve az irányíthatóság és a spin tulajdonság nem általánosítható.)

Legyen A a Levi-Civita konnexiónak megfelelő $Lie(SO(4)) = Lie(Spin(4)) = Lie(SO(3)) \oplus Lie(SO(3))$-értékű 1-forma $P_{SO(4)}$-en, és húzzuk ezt vissza $P_{Spin(4)}$-re. Ekkor tehát $P_{Spin(4)}$-en kapunk egy $\hat{A}$ konnexiót, mely minden asszociált nyalábon, így speciálisan az $S^{\pm} = P_{Spin(4)} \times_{\mu^{\pm}} \mathbb{C}^2$ 2-dimenziós hermitikus komplex (vagyis kvaternió vonal) spinor nyalábokon is egy kovariáns deriválást indukál. Jelölje $\nabla\colon \Gamma(S^{\pm}) \to \Gamma(S^{\pm} \otimes T^*X)$ ezt a kovariáns deriválást. Az adott metrikával T^*X azonosítható TX-szel, így $\nabla\colon \Gamma(S^{\pm}) \to \Gamma(S^{\pm} \otimes TX)$.

9.1.8. megjegyzés. A fenti okfejtésben többször is használtuk azt a jólismert tényt, hogy egy konnexió akár a principális nyalábon definiált Lie-algebra értékű 1-formaként, akár az asszociált vektornyalábon definiált kovariáns deriválásként is megadható. A fenti két megadási mód közötti kapcsolatot a párhuzamos eltolás adja meg.

9.1.9. definíció. (a) A $P_{Spin(4)} \to X$ spin struktúra definíció szerint egy $TX \cong P_{Spin(4)} \times_{\rho} \mathbb{R}^4$ izomorfizmust jelent. Másrészt ρ definíciója azt mutatja, hogy $P_{Spin(4)} \times \mathbb{H} = S^+ \otimes_{\mathbb{H}} (S^-)^* \cong Hom_{\mathbb{H}}(S^+, S^-)$. Következésképp egy spin struktúra rögzítésével egy $C\colon TX \to Hom_{\mathbb{H}}(S^+, S^-)$ (ill. $C^*\colon TX \to Hom_{\mathbb{H}}(S^-, S^+)$) izomorfizmust kapunk, amit *Clifford szorzásnak* nevezünk. Könnyen látható, hogy erre $C^*(v)C(v) = -|v|^2 \mathrm{Id}_{S^{\pm}}$ teljesül. A fenti leképezésekből $\Gamma(S^+ \otimes TM) \to \Gamma(S^-)$ illetve $\Gamma(S^- \otimes TM) \to \Gamma(S^+)$ leképezések nyerhetők — melyeket továbbra is C-vel illteve C^*-gal fogunk jelölni.

(b) A $C \circ \nabla = \partial\!\!\!/ \colon \Gamma(S^+) \to \Gamma(S^-)$ kompozíciót az adott spin struktúrához tartozó $\partial\!\!\!/$ *Dirac operátornak* nevezzük.

9.1.10. feladat. Lássuk be, hogy egy X 4-dimenziós sokaságra az $S^{\pm} \to X$ $SU(2)$-nyalábok és a $C\colon TX \to Hom_{\mathbb{H}}(S^+, S^-)$ izomorfizmus (mely a $C^*(v)C(v) = -|v|^2 \mathrm{Id}_{S^+}$ azonosságot is teljesíti) megadása egy spin struktúrát határoz meg. (*Ötlet*: Az $S^{\pm}$ nyalábokhoz tartozó $P^{\pm}$ principális $SU(2)$-nyalábok segítségével egy P principális $Spin(4)$-nyaláb kapható — emlékezzünk arra, hogy $Spin(4) = SU(2) \times SU(2)$. A C izomorfizmus éppen azt mutatja, hogy $P \times_{\varphi} SO(4) = P_{SO(4)}$, vagyis P egy spin struktúra.)

9.1.11. megjegyzések. (a) A fenti $\partial\!\!\!/$ Dirac operátor a Riemann-geometria egyik legtöbbet vizsgált objektuma. Hasonló definícióval tetszőleges n dimenziós spin sokaságra a megfelelő Dirac operátor definiálható, melynek sok fontos és érdekes tulajdonsága van. Belátható például, hogy $\mathrm{Ker}\, \partial\!\!\!/ = \{\phi \in \Gamma(S^+) \mid \partial\!\!\!/ \phi = 0\}$ és $\mathrm{Coker}\, \partial\!\!\!/ = \Gamma(S^-)/(\mathrm{Im}\, \partial\!\!\!/)$ véges dimenziós vektorterek, és $n = 4$ esetén $\mathrm{ind}\, \partial\!\!\!/ = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ker} \partial\!\!\!/ - \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Coker} \partial\!\!\!/ = \frac{1}{8}\sigma(X)$; vagyis ekkor az operátor indexe egy egyszerű topológiai invariánssal egyezik meg.

(b) Belátható továbbá, hogy $\mathrm{Ker}\, \partial\!\!\!/$ és $\mathrm{Coker}\, \partial\!\!\!/$ valójában kvaternió modulusok, így komplex dimenzióik párosak, vagyis $\frac{1}{8}\sigma(X) \equiv 0 \pmod 2$. Ez pedig bebizonyítja Rokhlin tételét (4.1.5 tétel), mely szerint egy X spin sokaságra a $\sigma(X)$ szignatúra 16-tal osztható.

(c) Legyen $\nabla^*\colon \Gamma(S^{\pm} \otimes T^*X) \to \Gamma(S^{\pm})$ a spinor nyalábon értelmezett (és a Levi-Civita konnexió által indukált) ∇ kovariáns deriválás L^2 adjungáltja. Ha $s\colon X \to \mathbb{R}$ jelöli az X Riemann-sokaság skalárgörbületét, akkor $\psi \in \Gamma(S^+)$-ra

$$\partial\!\!\!/^* \partial\!\!\!/ \psi = \nabla^* \nabla \psi + \frac{1}{4} s \psi$$

teljesül. Ezt az egyenlőséget *Weitzenböck formulának* hívják; hasonló teljesül $\phi \in \Gamma(S^-)$ esetén is: $\partial\!\!\!/ \partial\!\!\!/^* \phi = \nabla^* \nabla \phi + \frac{1}{4} s \phi$.

(d) Egy M irányított 3-sokaságra hasonlóan definiálhatunk spin struktúrát: ez egy olyan $P_{SU(2)} \to M$ nyaláb tehát, melyre $P_{SU(2)} \times_{\psi} SO(3) = P_{SO(3)}$ (ahol $\psi\colon SU(2) \to SO(3)$ adja a kettős fedést). Az S spinor nyaláb és a $\partial\!\!\!/$ Dirac operátor definíciója is analóg a fentiekkel. Mivel $\pi_2(SO(3)) = \pi_2(SU(2)) = \pi_2(Spin(3)) = 1$, egy spin struktúra valójában trivializálja a $TM \to M$ érintőnyalábot. Másrészt $w_1^2(M) = w_2(M)$ egy M 3-sokaságra, így egy irányított 3-sokaság mindig ellátható spin struktúrával, és $TM \cong M \times \mathbb{R}^3$.

(e) A definíció valójában bármilyen X sima sokaságra és $F \to X$ $SO(n)$-nyalábra kiterjeszthető, és belátható hogy F-en pontosan akkor van spin struktúra, ha $w_2(F) = 0$; továbbá hogy a különböző spin struktúrákat éppen $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ paraméterezi. (A bizonyítás a 9.1.4 tétel bizonyításában megadott gondolatmenet egyszerű általánosításával adható meg.)

9.2 Spin^c struktúrák

Az ígért sima invariánsok definíciójához a spin struktúrák következő általánosítására van szükségünk.

9.2.1. definíció. Legyen $Spin^c(4) = SU(2) \times SU(2) \times S^1 / \langle(-I, -I, -1)\rangle$ 7-dimenziós Lie-csoport. A következő leképezések a definícióból természetesen adódnak: $(q_+, q_-, z) \in SU(2) \times SU(2) \times S^1$-re legyen $\alpha(q_+, q_-, z) = [q_+, q_-, z]$ egy $\alpha\colon Spin(4) \times S^1 \to Spin^c(4)$ homomorfizmus, $\rho[q_+, q_-, z] = ([q_+, q_-], z^2)$ pedig egy $\rho\colon Spin^c(4) \to SO(4) \times S^1$ kettős fedés; a fenti ρ-t az első faktorra való vetítéssel kapjuk a $\rho_0\colon Spin^c(4) \to SO(4)$ principális S^1-nyalábot; végül $\lambda[q_+, q_-, z] = z^2$ egy $\lambda\colon Spin^c(4) \to S^1$ leképezést (ρ második faktorra való vetítését) ad.

9.2.2. feladatok. (a) Lássuk be, hogy $U(2) = SU(2) \times S^1 / \langle(-I, -1)\rangle$.

(b) Lássuk be, hogy $SO(4)$ felett egyetlen nem tiviális S^1-fibrálás létezik (és ez éppen a fenti ρ_0). (*Ötlet*: Vegyük észre, hogy $SO(4)$ homeomorf az $S^3 \times \mathbb{RP}^3$ szorzattal; számítsuk ki $H^2(SO(4); \mathbb{Z})$-t.)

(c) Bizonyítsuk be, hogy $Spin^c(4)$ az $\{(A,B) \mid A,B \in U(2),\ \det A = \det B\}$ csoporttal izomorf. Adjuk meg az így nyert $\mu_\pm\colon Spin^c(4) \to U(2)$ vetítéseket az eredeti $[q_+, q_-, z] \in SU(2) \times SU(2) \times S^1/\mathbb{Z}_2$ alakban felírva. (*Ötlet*: Az $(A,B) \in U(2) \times U(2)$ elemre és $z^2 = \det(A)$ komplex számra vegyük a $[z^{-1}A, z^{-1}B, z] \in Spin^c(4)$ elemet; az így megadott leképezésről lássuk be, hogy csoport-izomorfizmus.)

(d) Tekintsük $SO(4) \times S^1 = SO(4) \times SO(2)$ standard beágyazását $SO(6)$-ba. Lássuk be, hogy $Spin^c(4) \to SO(4) \times S^1$ az egyetlen olyan kettős fedés, mely a $Spin(6) \to SO(6)$ kettős fedés megszorításaként áll elő.

9.2.3. definíció. Legyen X irányított 4-dimenziós Riemann-sokaság és legyen P_{S^1} egy komplex vonalnyaláb (S^1 struktúra-csoportú) principális nyalábja. Egy $P_{Spin^c(4)} \to X$ principális $Spin^c(4)$-nyalábot P_{S^1}*-determinánsú spin*^{c} *struktúrának* hívunk, ha létezik egy olyan $P_{Spin^c(4)} \to P_{SO(4)\times S^1}$ nyaláb-leképezés, mely fibrumok mentén éppen a $\rho\colon Spin^c(4) \to SO(4) \times S^1$ kettős fedés. Tehát $P_{Spin^c(4)} \to X$ egy spin^c struktúra, ha $P_{Spin^c(4)} \times_{\rho_0} SO(4) \cong P_{SO(4)}$, és ekkor determinánsát a $P_{Spin^c(4)} \times_\lambda S^1$ nyaláb adja.

9.2.4. tétel. *Az X 4-sokaságon pontosan akkor létezik P_{S^1} determinánsú spin^c struktúra, ha $c_1(P_{S^1}) \equiv w_2(X) \pmod 2$. Ebben az esetben $H^1(X;\mathbb{Z}_2)$ szabadon és tranzitívan hat a P_{S^1} determinánsú spin^c struktúrák terén.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a P_{S^1} determinánsú spin^c struktúrák létezése (a 9.2.2(d) feladat szerint) avval ekvivalens, hogy a $P_{SO(4)\times S^1}$ $SO(6)$-nyalábon van-e spin struktúra. Mivel $w_2(P_{SO(4)\times S^1}) \equiv w_2(X) + c_1(P_{S^1})$, a tétel 9.1.11(e) alapján következik. □

9.2.5. tétel. *Minden 4-sokaságra létezik (valamilyen determinánsú) spin^c struktúra.*

Bizonyítás. Legyen $R\colon H^*(X;\mathbb{Z}) \to H^*(X;\mathbb{Z}_2)$ a mod 2 redukció által generált homomorfizmus. A fentiek szerint csupán azt kell belátni, hogy létezik olyan $c \in H^2(X;\mathbb{Z})$ elem, melynek mod 2 redukciója éppen $w_2(X)$, vagyis hogy $w_2(X) \in \operatorname{Im} R$.

9.2.6. lemma. *Ha a $c \in H^2(X;\mathbb{Z})$ és $w \in H^2(X;\mathbb{Z}_2)$ párra $c(\alpha) \equiv w(R(\alpha)) \pmod 2$ teljesül minden $\alpha \in H_2(X;\mathbb{Z})$ elemre, akkor létezik egy olyan $c_0 \in H^2(X;\mathbb{Z})$ torzió elem, melyre $w = R(c + c_0)$.*

Bizonyítás. Feltevésünk szerint $w - R(c) \in H^2(X;\mathbb{Z}_2)$ az $f_2\colon H^2(X;\mathbb{Z}_2) \to Hom(H_2(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2)$ leképezés ($f_2(x) = \{\alpha \mapsto x(\alpha)\}$) magjában van. Az univerzális együttható formula szerint az $Ext(H_1(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{g_2} H^2(X;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{f_2} Hom(H_2(X;\mathbb{Z});\mathbb{Z}_2)$ sorozat egzakt, tehát létezik egy olyan $\beta \in Ext(H_1(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2)$ elem, melyre $g_2(\beta) = w - R(c)$. Ismert, hogy ha G egy csoport és H egy olyan $\mathbb{Z}$-modulus, melyre $H = Z/B$, akkor $Ext(H,G) = Hom(B,G)/Hom(Z,G)$. Ebből adódan a kézenfekvő $Ext(H_1(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \xrightarrow{r} Ext(H_1(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2)$ (a mod 2 redukáló által indukált) homomorfizmus ráképezés. Következésképp létezik egy olyan γ elem $Ext(H_1(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$-ben, melyre $g_2(r(\gamma)) = w - R(c)$. Az univerzális együttható formula-beli $g\colon Ext(H_1(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to H^2(X;\mathbb{Z})$ leképezéssel $R \circ g = g_2 \circ r$ teljesül a diagramok kommutativitása miatt, így $c_0 = g(\gamma)$ választással a lemma következik. □

Visszatérve a 9.2.5 tétel bizonyítására, csak arra kell emlékeznünk, hogy $w_2(X)(R(\alpha)) \equiv Q_X(\alpha,\alpha) \pmod 2$ teljesül minden $\alpha \in H_2(X;\mathbb{Z})$ elemre. Mivel az a $\varphi\colon H_2(X;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}_2$ leképezés, melyet az $\alpha \mapsto Q_X(\alpha,\alpha) \pmod 2$ formula definiál, egy homomorfizmus, létezik egy olyan $c \in H^2(X;\mathbb{Z})$ hogy $\varphi(\alpha) = c(\alpha) \pmod 2$ minden $\alpha \in H_2(X;\mathbb{Z})$-re. Ilymódon az előző lemmát alkalmazva a tétel következik. □

Az ismertetett csoportazonosságokat és reprezentációkat használva $W^\pm = P_{Spin^c(4)} \times_{\mu^\pm} \mathbb{C}^2$ $U(2)$-nyalábokat definiálhatunk — ezeket pozitív ill. negatív spinor nyaláboknak hívjuk. Vegyük észre, hogy $\det W^+ \cong \det W^-$. A spin esethez hasonlóan, egy $P_{SO(4)\times S^1}$-en rögzített konnexió felhúzható $P_{Spin^c(4)}$-re, ami a $W^\pm$ asszociált nyalábokon kovariáns deriválást indukál. $P_{SO(4)}$-en természetesen adódik a Levi-Civita konnexió, P_{S^1}-en azonban nincs ilyen természetes választás. Jelölje L a $\det W^+ \cong \det W^-$ komplex vonalnyalábot, $\mathcal{A}_L$ pedig az L-en lévő S^1-konnexiók (affin) terét.

9.2.7. definíció. Egy $A \in \mathcal{A}_L$ konnexió és a Levi-Civita konnexió segítségével $P_{SO(4)\times S^1}$-en kapunk egy konnexiót, melyet visszahúzva $P_{Spin^c(4)}$-re egy konnexiót, ebből pedig a $\nabla_A: \Gamma(W^\pm) \to \Gamma(W^\pm \otimes T^*X)$ indukált kovariáns deriválást kapjuk. T^*X-et TX-szel (a metrika segítségével) azonosítva feltehető, hogy $\nabla_A: \Gamma(W^\pm) \to \Gamma(W^\pm \otimes TX)$. Hasonlóan a spin esethez, a spin^c struktúra definíciójából következik, hogy $TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ és $W^+ \otimes_{\mathbb{C}} (W^-)^* = Hom_{\mathbb{C}}(W^+, W^-)$ izomorfak; az így kapott $C: T_{\mathbb{C}}X \to Hom(W^+, W^-)$ (ill. $C^*: T_{\mathbb{C}}X \to Hom(W^-, W^+)$) leképezést *Clifford szorzásnak* nevezzük. A korábbiakhoz hasonlóan származtassunk C-ből (ill. C^*-ból) egy $\Gamma(W^+ \otimes TM) \to \Gamma(W^-)$ (ill. $\Gamma(W^- \otimes TM) \to \Gamma(W^+)$) leképezést. A megfelelő fenti leképezések komponálásával a $\partial\!\!\!/_A: \Gamma(W^\pm) \to \Gamma(W^\mp)$ *csavart Dirac operátort* kapjuk. A fenti $T^*X \cong TX$ azonosítást ismét alkalmazva $\Lambda^2_{\mathbb{C}}X$ egy η hatása definiálható $W = W^+ \oplus W^-$-on: $\psi \in \Gamma(W)$ és $e_i^* \in \Lambda^1 X$ esetén $\eta(\sum_{i<j} \alpha_{ij} e_i^* \wedge e_j^*)(\psi) = \sum_{i<j} \alpha_{ij} C^*(e_i)(C(e_j)\psi)$. Könnyen látható, hogy $\eta|_{W^\pm} \subset W^\pm$, így $\Lambda^2_{\mathbb{C}}X$ az $\eta^\pm = \eta|_{W^\pm}$ hatással a $W^\pm$ spinor nyalábokon hat.

9.2.8. feladatok. **(a)** A 9.1.10 feladathoz hasonóan lássuk be, hogy egy spin^c struktúrát a $\det W^+ \cong \det W^-$ izomorfizmust teljesítő $W^\pm \to X$ $U(2)$-nyalábok és a $C: T_{\mathbb{C}}X \to Hom(W^+, W^-)$ ($C^*(v)C(v) = -|v|^2 \mathrm{Id}_{W^+}$-et teljesítő) homomorfizmus meghatároz.

(b) Legyen $(W^\pm, C)$ egy adott spin^c stuktúra; egy tetszőleges $a \in H^2(X;\mathbb{Z})$ elemre pedig legyen $L_a \to X$ az a komplex vonalnyaláb, melyre $c_1(L_a) = a$. Lássuk be, hogy az $a \mapsto (W^\pm \otimes L_a, C \otimes \mathrm{id}_{L_a})$ megfeleltetés egy bijekciót ad meg $H^2(X;\mathbb{Z})$ elemei és az X-en lévő spin^c struktúrák között. (Emlékezzünk arra, hogy egy X spin sokaság spin struktúráinak tere $H^1(X;\mathbb{Z}_2)$-vel paraméterezhető — a megfeleltetés nem kanonikus. A fentiek szerint a spin^c struktúrák (szintén nem kanonikus módon) $H^2(X;\mathbb{Z})$ elemeinek feleltethetők meg.) Mi a $(W^\pm \otimes L_a, C \otimes \mathrm{id}_{L_a})$ spin^c struktúra determináns nyalábja?

9.2.9. megjegyzések. **(a)** Észrevéve, hogy $U(2) = SU(2) \times S^1/(-I, -1)$, tehát $U(2) \to SO(3)$ (az egyetlen) nemtriviális S^1-nyaláb $SO(3)$ felett, $Spin^c(3) = U(2)$ definícióval spin^c struktúrák az eddigiekkel analóg módon definiálhatók 3-sokaságokra is. Ekkor $W = P_{U(2)} \times \mathbb{C}^2$ az egyetlen spinor nyaláb; $w_2(M) = 0$ miatt pedig $c_1(P_{S^1}) \equiv 0 \pmod 2$ könnyen megoldható.

(b) Vegyük észre, hogy egy spin struktúra a $Spin(4) \times S^1 \to Spin^c(4)$ (ill. $Spin(3) \times S^1 \to Spin^c(3)$) leképezéssel természetesen indukál egy (triviális determináns nyalábú) spin^c struktúrát.

(c) A spin esethez hasonlóan, egy rögzített spin^c struktúrára és $A \in \mathcal{A}_L$ konnexióra fennáll egy 9.1.11(c) megjegyzéshez hasonló reláció: $\psi \in \Gamma(W^+)$ esetén

$$\partial\!\!\!/_A^* \partial\!\!\!/_A \psi = \nabla_A^* \nabla_A \psi + \frac{1}{4} s\psi + \eta^+(F_A)\psi,$$

illetve $\phi \in \Gamma(W^-)$ esetén $\partial\!\!\!/_A \partial\!\!\!/_A^* \phi = \nabla_A^* \nabla_A \phi + \frac{1}{4} s\phi + \eta^-(F_A)\phi$. (Emlékezzünk, hogy ∇_A^* a ∇_A kovariáns deriválás L^2 adjungáltja; F_A jelöli az $A \in \mathcal{A}_L$ konnexió görbületét, mely tehát egy tisztán képzetes értékű 2-forma.)

(d) A spin esethez hasonlóan tetszőleges X sokaságra és F $SO(n)$-nyalábra definiálható spin^c struktúra, és annak létezése éppen attól függ, $w_2(F)$ előáll-e egy egész együtthatós második kohomológia-osztály mod 2 redukciójaként.

10. előadás

4-sokaságok sima invariánsai

Ebben a befejező előadásban a Seiberg-Witten egyenletek és invariánsok definícióját, valamint legalapvetőbb tulajdonságait foglaljuk össze. Az állítások bizonyítása meglehetősen hosszadalmas előkészületeket igényelne, így azokra inkább hivatkozni fogunk. Az elmélet részletes tárgyalása a következő könyvekben található meg: [S], [KKM], [DK], illetve a hasonló témakört tárgyaló [SSz].

10.1 Seiberg-Witten egyenletek

A Seiberg-Witten egyenletek és invariánsok definiálásához a következő néhány definícióra van még szükségünk. Legyen X adott 4-dimenziós Riemann-sokaság; definiáljuk a $*\colon \Lambda^2 X \to \Lambda^2 X$ Hodge $*$-operátort a következő formulával: legyen $*(e_i \wedge e_j) = e_k \wedge e_l$ ha $\{e_i, e_j, e_k, e_l\}$ ortonormált irányított bázisa $T_p^* X$-nek, és terjesszük ki a definíciót lineárisan $\Lambda^2 X$-re. Könnyen belátható, hogy $*^2 = \mathrm{id}_{\Lambda^2 X}$.

10.1.1. definíció. Legyen $\Omega^{\pm}(X) = \{\omega \in \Omega^2(X) = \Gamma(\Lambda^2(X)) \mid *\,\omega = \pm\omega\}$. Mivel $*^2 = \mathrm{id}_{\Lambda^2 X}$, könnyen látható, hogy $\Omega^2(X) = \Omega^+(X) \oplus \Omega^-(X)$ — $\omega^{\pm} = \frac{1}{2}(\omega \pm *\omega)$-ra $\omega = \omega^+ + \omega^-$ és $\omega^{\pm} \in \Omega^{\pm}(X)$. Az $\Omega^+(X)$ vektortér elemeit *önduális*, $\Omega^-(X)$ elemeit pedig *anti-önduális (ASD)* 2-formáknak nevezzük. Vegyük észre, hogy a $*$-operátor (és így az $\Omega^{\pm}(X)$ alterek) függnek az X-en választott metrikától.

10.1.2. feladat. Lássuk be, hogy $\eta^{\pm}(\Lambda^{\mp}_{\mathbb{C}}) = 0$, vagyis az önduális (ill. ASD) formák triviálisan hatnak W^--on (ill. W^+-on).

Belátható az is, hogy $\eta^+(\Lambda^+_{\mathbb{C}}) \subset End(W^+)$ éppen a nyomnélküli endomorfizmusok $End_0(W^+)$ terével egyezik meg, így (dimenzió okokból) η^+ egy $\Lambda^+_{\mathbb{C}} \to End_0(W^+)$ izomorfizmust ad; ezen izomorfizmus inverzét jelölje $\tau\colon End_0(W^+) \to \Lambda^+_{\mathbb{C}}$. Egy $\psi \in \Gamma(W^+)$ pozitív spinor a $(\psi \otimes \psi^*)(\alpha) = \langle \psi, \alpha \rangle \psi$ formulával egy $\psi \otimes \psi^* \in End(W^+)$ endomorfizmust definiál, melyre $(\psi \otimes \psi^*)_0 = \psi \otimes \psi^* - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\psi \otimes \psi^*)\mathrm{id}_{W^+}$ már $End_0(W^+)$-beli lesz. (Ilymódon tehát $(\psi \otimes \psi^*)_0(\alpha) = \langle \psi, \alpha \rangle \psi - \frac{1}{2}|\psi|^2 \alpha$.) Jelölje $\sigma(\psi) \in i\Lambda^+ \subset \Lambda^+_{\mathbb{C}}$ a $(\psi \otimes \psi^*)_0$ nulla nyomú endomorfizmus τ-nál vett képét.

Legyen tehát X irányított 4-dimenziós Riemann-sokaság és $P_{Spin^c(4)} \to X$ egy rögzített spin^c struktúra. Jelölje $L \to X$ a spin^c struktúra determináns nyalábját, $A \in \mathcal{A}_L$ a determináns nyaláb egy konnexióját, $\psi \in \Gamma(W^+)$ pedig egy pozitív spinort. A

$$\partial\!\!\!/_A \psi = 0, \quad F_A^+ = \sigma(\psi)$$

egyenleteket *Seiberg-Witten egyenleteknek* nevezzük; ezekben az egyenletekben az $(A, \psi) \in \mathcal{A}_L \times \Gamma(W^+)$ pár az ismeretlen. Másként, a Seiberg-Witten egyenletek megoldásait az $\mathcal{F}(A, \psi) = (\partial\!\!\!/_A \psi, F_A^+ - \sigma(\psi)) \in \Gamma(W^-) \times i\Omega^+(X)$ függvény nullhelyei adják.

10.1.3. megjegyzés. A fenti egyenleteket Seiberg és Witten — fizikai megfontolások alapján — a sokkal kézenfekvőbb ($SU(2)$-konnexiókra felírt) $F_A^+ = 0$ egyenletből származtatta. Erről a fizikai háttérről lásd [Wi].

10.1.4. lemma. *A $\mathcal{G} = Map(X, S^1)$ csoport természetes hatása az $\mathcal{A}_L \times \Gamma(W^+)$ és a $\Gamma(W^-) \times i\Omega^+(X)$ tereken $\mathcal{F}$-et $\mathcal{G}$-ekvivariánssá teszi. Következésképp ha $\mathcal{F}(A, \psi) = 0$, akkor $\mathcal{F}(g^*(A, \psi)) = 0$ minden $g \in \mathcal{G}$-re.* □

A $\mathcal{G}$ csoportot szokás *mérce-csoportnak* (gauge csoport) nevezni. Az $\mathcal{A}_L \times \Gamma(W^+)$ tér $\mathcal{G}$-vel vett faktorát $\mathcal{B}_L$-lel jelöljük.

10.1.5. megjegyzés. A $\mathcal{G}$ csoport általában szabadon hat $\mathcal{A}_L \times \Gamma(W^+)$-en. Könnyen belátható, hogy $Stab_{(A,\psi)} \neq 1$ pontosan akkor ha $\psi \equiv 0$; ekkor $Stab_{(A,\psi)} = \{f \in \mathcal{G} \mid f\ X\text{-ből } S^1\text{-be mutató konstans leképezés}\} \cong S^1$. Ilymódon $\mathcal{B}_L$ a $\psi \equiv 0$ pontok képeit leszámítva egy "sokaság". (A $\mathcal{B}_L$ tér a $\psi \equiv 0$ pontok képeit leszámítva egy (végtelen dimenziós) Banach-sokasággá tehető, lásd még a 10.3 fejezetet.) Az $(A, 0) \in \mathcal{B}_L$ alakú párokat *reducibilis* pároknak nevezik.

10.1.6. definíció. Legyen $\mathcal{B}_L^*$ a reducibilis párok komplementuma, vagyis $\mathcal{B}_L^* = \{(A, \psi) \in \mathcal{A}_L \times \Gamma(W^+) \mid \psi$ nem azonosan nulla$\}/\mathcal{G}$. A $\mathcal{B}_L^*$ teret *konfigurációs térnek* hívjuk. Mivel $\mathcal{G}$ a $\mathcal{B}_L^*$ téren szabadon hat, az $\mathcal{A}_L \times (\Gamma(W^+) - \{0\}) \to \mathcal{B}_L^*$ faktorizáló leképezés egy principális $\mathcal{G}$-nyalábot ad meg. $\mathcal{G}$ fenti, $\Gamma(W^-) \times i\Omega^+(X)$-en való reprezentációja így egy $\mathcal{E} = (\Gamma(W^+) - \{0\} \times \mathcal{A}_L) \times_{\mathcal{G}} (\Gamma(W^-) \times i\Omega^+(X)) \to \mathcal{B}_L^*$ vektornyalábot, az $\mathcal{F}\colon \mathcal{A}_L \times (\Gamma(W^+) - \{0\}) \to \Gamma(W^-) \times i\Omega^+(X)$ $\mathcal{G}$-ekvivariáns függvény pedig egy $\overline{\mathcal{F}} \in \Gamma(\mathcal{E})$ szelést definiál. Az $\overline{\mathcal{F}}^{-1}(0) \subset \mathcal{B}_L^*$ nullhelyek halmazát a P spin^c struktúrához (és g metrikához) tartozó *$\mathcal{M}_g(P)$ modulustérnek* hívjuk.

10.1.7. tétel. *Azon metrikák tere, melyekre $F_A^+ = 0$ megoldható (vagyis a Seiberg-Witten egyenleteknek van reducibilis megoldása) az összes metrikák terében egy $b_2^+(X)$-kodimenziós alteret alkot.* □

10.1.8. megjegyzés. A fentiekhez hasonlóan definiálható a Seiberg-Witten modulustér $\mathcal{B}_L$ részeként mint $\mathcal{F}^{-1}(0)/\mathcal{G}$; $b_2^+(X) > 0$ esetén azonban (generikus metrikát választva) a két definíció a 10.1.7 tétel értelmében megegyezik. A továbbiakban így a 10.1.6 definícióban adott meghatározást fogjuk alkalmazni. $b_2^+(X) > 1$ teljesülése esetén valójában metrikák (alkalmas) 1-paraméteres seregét választva az ezekkel paraméterezett modulustér-sereg is $\mathcal{B}_L^*$ része marad. Mivel a későbbiekben ez a tulajdonság fontos lesz, a továbbiakban mindig feltesszük majd, hogy $b_2^+(X) > 1$.

A 10.3 fejezetben megmutatjuk, hogy az $\mathcal{M}$ modulustér egy irányított, kompakt (tehát véges dimenziós) sokaság, melynek dimenzióját a $d = \frac{1}{4}(c_1^2(W^+) - (3\sigma(X) + 2\chi(X))$ formula adja meg. Ezen tulajdonságokat feltéve a $SW_X\colon \mathcal{S}pin^c(X) \to \mathbb{Z}$ függvény már könnyen definiálható. (Ebben az összefüggésben $\mathcal{S}pin^c(X)$ jelöli X spin^c struktúráinak terét; a 9.2.8(b) feladat értelmében ez a halmaz (nem kanonikus módon) a $H^2(X; \mathbb{Z})$ csoporttal azonosítható.)

10.1.9. tétel. *A $\mathcal{B}_L^*$ konfigurációs tér $\mathbb{CP}^\infty$-nel homotóp ekvivalens. Következésképp kohomológia-gyűrűjére $H^*(\mathcal{B}_L^*; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\mu]$ áll fenn, ahol $\mu \in H^2(\mathcal{B}_L^*; \mathbb{Z})$ 2-dimenziós generátor.* □

Legyen tehát $P = P_{Spin^c(4)}$ egy rögzített spin^c struktúra X-en, és vegyük a hozzátartozó $\mathcal{M}_g(P) \subset \mathcal{B}_L^*$ modulusteret. Mivel $\mathcal{M}_g(P)$ egy kompakt, irányított és zárt sokaság. így fundamentális osztálya egy $[\mathcal{M}_g(P)] \in H_d(\mathcal{B}_L^*; \mathbb{Z})$ homológia osztályt definiál. Amennyiben d páros, legyen $SW_X(P) = \langle \mu^{\frac{d}{2}}, [\mathcal{M}_g(P)] \rangle \in \mathbb{Z}$. Páratlan d esetén $[\mathcal{M}_g(P)]$ automatikusan 0, így ekkor nem tudunk értelmes invariánst definiálni.

10.1.10. feladat. Bizonyítsuk be, hogy $d \equiv 1 + b_2^+ - b_1 \pmod 2$, tehát az egyszeresen összefüggő esetben d pontosan akkor páros, ha b_2^+ páratlan.

10.1.11. tétel. *A fent definiált $SW_X(P) \in \mathbb{Z}$ szám $b_2^+(X) > 1$ esetén nem függ az X-en rögzített metrikától, így az $SW_X\colon \mathcal{S}pin^c(X) \to \mathbb{Z}$ függvény egy diffeomorfizmus invariáns.* □

10.1.12. megjegyzés. Emlékezzünk vissza arra, hogy $\pi_1(X) = 1$ esetén a determináns vonalnyaláb meghatározza a spin^c struktúrát, így ebben az esetben $SW_X\colon H^2(X; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ definiálható: ha $K \in H^2(X; \mathbb{Z})$-re $K \equiv w_2(X) \pmod 2$, akkor a P_K, K által meghatározott spin^c struktúrával legyen $SW_X(K) = SW_X(P_K)$; legyen $SW_X(K) = 0$ egyébként. A fenti tétel ebben az esetben úgy értendő, hogy egy $f\colon X_1 \to X_2$ irányítástartó diffeomorfizmusra $SW_{X_2}(K) = \pm SW_{X_1}(f^*K)$. (A $\pm$ előjelre később még visszatérünk.)

10.2 Tételek Seiberg-Witten invariánsokra

A következőkben a fent definiált SW_X függvény néhány nevezetes tulajdonságát soroljuk fel — bizonyítás nélkül. (Egy (X,ω) párt szimplektikus sokaságnak nevezünk, ha ω egy zárt, nem-elfajuló 2-forma az X sokaságon.)

10.2.1. tétel. (Taubes, [T1]) *Ha (X,ω) egy zárt, szimplektikus 4-sokaság, akkor $SW_X(\pm c_1(X,\omega)) = \pm 1$. Speciálisan, ha X egy Kähler sokaság, akkor $SW_X(\pm c_1(X)) = \pm 1$.* □

10.2.2. tétel. *Legyen X olyan 4-sokaság, melyre $b_2^+(X) > 1$ teljesül.*

(a) *Ha $X = X_1 \# X_2$ és $b_2^+(X_i) > 0$ $(i=1,2)$, akkor $SW_X \equiv 0$.*

(b) *Ha X-en létezik pozitív skalárgörbületű metrika, akkor $SW_X \equiv 0$.*

(c) *Ha X felbontható $X = X_1 \cup_N X_2$ alakban úgy, hogy $b_2^+(X_i) > 0$ $(i=1,2)$, és az N 3-sokaságon létezik pozitív skalárgörbületű metrika, akkor $SW_X \equiv 0$.* □

A következő tétel kapcsolatot mutat egy sokaság és felfújtjának Seiberg-Witten invariánsai között.

10.2.3. tétel. *Tegyük fel, hogy X egyszeresen összefüggő és $b_2^+(X) > 1$; legyen továbbá $K \in H^2(X;\mathbb{Z})$. Ekkor $SW_X(K) = \pm SW_{X\#\overline{\mathbb{CP}^2}}(K \pm E)$. (A formulában E jelöli a felfújás kivételes divizora által definiált homológia-elem — mely $H_2(\overline{\mathbb{CP}^2};\mathbb{Z}) < H_2(X\#\overline{\mathbb{CP}^2};\mathbb{Z})$ generátora — Poincaré duálisát.)* □

Egy $K \in H^2(X;\mathbb{Z})$ kohomológia-osztály az X sima 4-sokaság *Seiberg-Witten bázisosztálya*, ha $SW_X(K) \neq 0$. Az X sokaság bázisosztályainak halmazát $\mathcal{B}as_X$ jelöli; vagyis $\mathcal{B}as_X = \{K \in H^2(X;\mathbb{Z}) \mid SW_X(K) \neq 0\}$. Belátható, hogy egy X sokaságnak csak véges sok bázisosztálya van, és K pontosan akkor bázisosztály, amikor $-K$. Végül egy fontos kapcsolatot mutatunk egy 4-sokaság Seiberg-Witten invariánsai és beágyazott felületei között.

10.2.4. tétel. ([OSz]) *Tegyük fel, hogy $K \in \mathcal{B}as_X$-re $K^2 = 3\sigma(X) + 2\chi(X)$. Legyen $\Sigma \subset X$ beágyazott felület $(b_2^+(X) > 1)$, és tegyük fel, hogy $[\Sigma] \neq 0$, valamint ha $[\Sigma]^2 < 0$, akkor $g(\Sigma) > 0$ áll fenn. Ekkor $2g(\Sigma) - 2 \geq [\Sigma]^2 + |K([\Sigma])|$ minden K bázisosztályra teljesül.* □

10.2.5. megjegyzés. Egy olyan X sokaságot, melyre $K \in \mathcal{B}as_X$ esetén $K^2 = 3\sigma(X) + 2\chi(X)$ teljesül, *egyszerű típusúnak* hívjuk. Minden jelenleg ismert egyszeresen összefüggő, $b_2^+(X) > 1$-et teljesítő 4-sokaság egyszerű típusú. Fontos kérdés, hogy léteznek-e nem egyszeresen összefüggő 4-sokaságok. Ismert például, hogy minden szimplektikus (így speciálisan minden Kähler) 4-sokaság egyszerű típusú.

10.2.6. feladatok. **(a)** Lássuk be, hogy ha $S \subset X$ beágyazott gömb önátmetszése pozitív és $b_2^+(X) > 1$, akkor $SW_X \equiv 0$. Speciálisan egy szimplektikus sokaság (melyre $b_2^+(X) > 1$ is teljesül) nem tartalmazhat beágyazott pozitív négyzetű gömböt.

(b) Lássuk be, hogy ha $C \subset S$ összefüggő sima komplex görbe egy S komplex felületben, és Σ simán beágyazott Riemann-felületre $[C] = [\Sigma] \in H_2(S;\mathbb{Z})$ teljesül, akkor $g(C) \leq g(\Sigma)$. Mással komplex görbék minimalizálják a génuszt homológiaosztályukban. (Ezt az állítást szokás *Thom sejtésnek* hívni.)

A fenti tételek következményeként belátható, hogy $SW_{3\mathbb{CP}^2\#20\overline{\mathbb{CP}^2}} \equiv 0$. Legyen továbbá X az 5 előadásban megismert $K3$-felület. Az 5.3.6 állításban $H_2(X;\mathbb{Z})$ egy olyan bázisát találtuk meg, melyre a fenti 10.2.4 tételt alkalmazva könnyen látható, hogy $0 \in H^2(X;\mathbb{Z})$ az X 4-sokaság egyetlen szóbajövő bázisosztálya. A 10.2.1 tétel szerint (mivel X egy komplex felület, melyre $c_1(X) = 0$) azt kapjuk, hogy $\mathcal{B}as_X = \{0\}$; a 10.2.3 tétel szerint így $\mathcal{B}as_{X\#\overline{\mathbb{CP}^2}} = \{\pm E\}$. Mivel az SW Seiberg-Witten függvény egy diffeomorfizmus-invariáns, valamint $Q_{X\#\overline{\mathbb{CP}^2}} \cong Q_{3\mathbb{CP}^2\#20\overline{\mathbb{CP}^2}} \cong 3\langle 1\rangle \oplus 20\langle -1\rangle$, a következő adódik (lásd még a 8.3.5 tételt):

10.2.7. következmény. *Az $X\#\overline{\mathbb{CP}^2}$ felfújt $K3$-felület és a $3\mathbb{CP}^2\#20\overline{\mathbb{CP}^2}$ összefüggő összeg homeomorf, nem-diffeomorf (egyszeresen összefüggő) 4-sokaságokra adnak példát.* □

10.3 A modulustérről

Emlékezzünk vissza arra, hogy az $\mathcal{M}_g(P)$ modulusteret az $\mathcal{E} \to \mathcal{B}_L^*$ nyaláb egy $\overline{\mathcal{F}} \in \Gamma(\mathcal{E})$ szelésének nullhelyeiként definiáltuk. A következőkben a modulustér simaságát és kompaktságát adó tétel bizonyításának vázlatát szeretnénk megadni. Amennyiben $\mathcal{B}_L^*$ és $\mathcal{E}$ véges dimenziós lenne, pusztán azt kellene elérnünk, hogy $\overline{\mathcal{F}}$ transzverzális legyen a nyaláb nulla-szelésére; hiszen ekkor (feltéve még hogy $\mathcal{B}_L^*$ kompakt és sima, valamint hogy $\mathcal{E}$ egy n-dimenziós nyaláb) standard érvelés mutatná azt, hogy $\overline{\mathcal{F}}^{-1}(0)$ egy $(\dim \mathcal{B}_L^* - n)$-dimenziós kompakt sokaság. (Az irányítás kérdését egyenlőre ne feszegessük.) Esetünkben azonban $\mathcal{B}_L^*$ nem kompakt és nem véges dimenziós, valamint $\mathcal{E}$ is végtelen dimenziós nyaláb. Ezáltal a szokásos érvelés kicsit megnehezedik.

Legyen $\mathcal{P}ert(X) = \{(g,\eta) \mid g \text{ metrika } X\text{-en}, \eta\ g\text{-önduális 2-forma}\}$ a *perturbációk tere.* Az $\mathcal{E} \times \mathcal{P}ert(X) \to \mathcal{B}_L^* \times \mathcal{P}ert(X)$ nyalábnak egy $\tilde{\mathcal{F}}$ szelését definiálhatjuk a következő $\Gamma(W^+) \times \mathcal{A}_L \times \mathcal{P}ert(X) \to \Gamma(W^-) \times i\Omega^+(X) \times \mathcal{P}ert(X)$ függvénnyel:

$$(\psi, A, g, \eta) \mapsto (\partial\!\!\!/_A \psi, F_A^+ - \sigma(\psi) - i\eta, g, \eta).$$

Célunk megmutatni azt, hogy az így kapott $\tilde{\mathcal{F}}$ szelés már transzverzális a megfelelő nullaszelésre. Véges dimenzióban pusztán a szelés linearizáltjáról kell megmutatni, hogy ráképezés a tipikus fibrumra (gondoljunk a szelésre, mint egy fenti ekvivariáns függvényre); ebből az implicit függvénytétel már adná az eredményt. Az implicit függvénytételhez hasonló tétel igaz Banach terek közötti leképezésekre is — a fenti terek azonban (mivel nyalábok C^∞-szelései) nem alkotnak Banach tereket. Az analízis egy standard eszközével (az ún. *Szoboljev teljessé tétellel*) azonban a fenti terek Banach terekké tehetők, így a következő látható be:

10.3.1. tétel. *Tereinket (és a $\mathcal{G}$ csoportot) alkalmasan teljessé téve, és az $\tilde{\mathcal{F}}$ szelést ezekre a terekre kiterjesztve egy, a nulla szelésre transzverzális szelést kapunk. Következésképp $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(0)$ egy sima (végtelen dimenziós) Banach sokaság.* □

$\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(0)$-t szokták a paraméterezett modulustérnek nevezni, hiszen ez a tér az összes modulustér uniója minden lehetséges g és η értékre.

10.3.2. megjegyzés. Előfordulhatna, hogy a tejessé tett térben az $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(0)$ megoldások "többen vannak" mint az eredeti C^∞-szelésekre értelmezett megoldások. Vagyis elvben előforulhat, hogy egy, csak a teljessé tétellel a térbe kerülő elem is megoldja az egyenleteket. Bebizonyítható azonban, hogy bárhogy is tesszük teljessé a tereket, a kapott $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(0)$-beli elemek mind C^∞-megoldások lesznek, így ez a jelenség nem fordul elő.

Legyen tehát $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(0) \xrightarrow{\pi} \mathcal{P}ert(X)$ a perturbációs térre való vetítés. A Sard lemma végtelen dimenziós általánosítása (melyet Sard-Smale tételnek szokás nevezni) a következőt adja:

10.3.3. tétel. *A $\mathcal{P}ert(X)$ tér majdnem minden pontja reguláris értéke π-nek, vagyis egy generikus (g,η) választás esetén a $\pi^{-1}(g,\eta) = \mathcal{M}_g^\eta \subset \tilde{\mathcal{F}}^{-1}(0)$ modulustér egy sima sokaság.* □

A kompaktság, irányíthatóság és a dimenzió kiszámításáról pusztán a következő rövid megjegyzésekre szorítkozunk. A kompaktság a Weitzenböck formula egy következménye; ebből ugyanis belátható, hogy egy megoldás normája a sokaságtól függő korlát alatt marad, így az Arzela-Ascoli tétel alkalmazásával a kompaktság bizonyítása egyszerű.

10.3.4. feladat. A 9.2.9(c) megjegyzésben megismert Weitzenböck formula segítségével lássuk be, hogy $(A,\psi) \in \mathcal{M}_g(P)$ esetén $|\psi(x)|^2 \leq \max(0, -s_X)$, ahol s_X a g metrika $s(x)$ skalárgörbülete (-1)-szeresének maximuma. (*Ötlet*: Tegyük fel, hogy $x_0 \in X$-ben $|\psi(x)|$-nek maximuma van. $\partial\!\!\!/_A\psi = 0$ miatt $\langle \nabla_A^* \nabla_A \psi, \psi\rangle + \frac{1}{4}s\langle\psi,\psi\rangle + \langle \eta^+(F_A)\psi,\psi\rangle = 0$, így a második Seiberg-Witten egyenlet valamint x_0 választása miatt $s(x_0)|\psi(x_0)|^2 + |\psi(x_0)|^4 \leq 0$, amiből a megoldás már következik.)

A modulustér dimenzióját az Atiyah-Singer indextétel alkalmazásával lehet kiszámítani. Az irányíthatóság bebizonyítása meglehetősen bonyolult, és az derül ki, hogy $H^0(X;\mathbb{R}) \oplus H^+(X;\mathbb{R})$ egy irányítását (amit X *homológia-irányításának* nevezünk) rögzítve kapunk csak az $\mathcal{M}_g(P)$ modulustéren irányítást. Ez a magyarázata a $\pm$ előjelnek 10.1.12 megjegyzésben: bár f tartja X_1 és X_2 irányítását, esetleg megfordíthatja a rögzített homológia-irányításokat. Lássuk még be, hogy az $[\mathcal{M}_g^\eta] \in H_d(\mathcal{B}_L^*;\mathbb{Z})$ fundamentális osztály nem függ a választott g metrikától és η perturbáló 2-formától.

10.3.5. tétel. *Ha $b_2^+(X) > 1$, akkor a (g_0, η_0) és (g_1, η_1) párok $H_d(\mathcal{B}_L^*; \mathbb{Z})$-ben homológ osztályokat definiálnak.*

Bizonyítás. Mivel $b_2^+(X) > 1$, létezik egy olyan $\gamma_t \colon [0,1] \to \mathcal{P}ert(X)$, (g_0, η_0)-t (g_1, η_1)-gyel összekötő út, mely nem tartalmaz reducibilis megoldásokat. Az út inverz képe tehát $\mathcal{B}_L^*$-beli modulusterekből alkotott $\mathcal{M}_g^{\eta_0}$ és $\mathcal{M}_g^{\eta_1}$ közötti kobordizmus lesz, ami bizonyítja a tételt. $\square$

Tárgymutató

Irodalomjegyzék

[A] S. Akbulut, *On 2-dimensional homology classes of 4-manifolds*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **82** (1977), 99–106.

[C] A. Casson, *Three lectures on new infinite constructions in 4-dimensional manifolds*, notes prepared by L. Guillou, A la Recherche de la Topologie Perdue, Progress in Mathematics, vol.62, Birkhäuser, 1986, 201–244.

[Ce] J. Cerf, *La stratification naturelle des espaces fonctions differentiables réeles et la thèoréme de la pseudoisotopie*, Publ. Math. I.H.E.S. **39** (1970).

[CFHS] C. Curtis, M. Freedman, W.-C. Hsiang és R. Stong, *A decomposition theorem for h-cobordant smooth simply connected compact 4-manifolds*, Invent. Math. **123** (1996), 343–348.

[BG] Ž. Bižaca és R. Gompf, *Elliptic surfaces and some simple exotic* $\mathbb{R}^4$*'s*, J. Diff. Geom. **43** (1996), 458–504.

[D1] S. Donaldson, *An application of gauge theory to four dimensional topology*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 279–315.

[D2] S. Donaldson, *Polynomial invariants for smooth four-manifolds*, Topology **29** (1990), 257–315.

[DK] S. Donaldson és P. Kronheimer, *Geometry of four-manifolds*, Oxford Univ. Press, 1990.

[F] M. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom. **17** (1982), 357–453.

[FQ] M. Freedman és F. Quinn, *Topology of 4-manifolds*, Princeton Mathematical Series **39**, Princeton University Press, 1990.

[Fu] M. Furuta, *Monopole equation and the* $\frac{11}{8}$*-conjecture*, preprint.

[GS] R. Gompf és A. Stipsicz *An introduction to 4-manifolds and Kirby calculus*, könyv megjelenés előtt.

[HKK] J. Harer, A. Kas és R. Kirby, *Handlebody decompositions of complex surfaces*, Memoirs AMS **62** no. 350, 1986.

[K1] R. Kirby, *A calculus for framed links in* S^3, Invent. Math. **45** (1978), 35–56.

[K2] R. Kirby, *The Topology of 4-Manifolds*, Springer Lecture Notes 1374, Springer-Verlag, 1989.

[KKM] D. Kotschick, P. Kronheimer és T. Mrowka, könyv előkészületben.

[LP] F. Laudenbach és V. Poénaru, *A note on 4-dimensional handlebodies*, Bull. Math. Soc. France **100** (1972), 337–344.

[LM] B. Lawson és M. Michelson, *Spin geometry*, Princeton Math. Series vol. **39**, 1989.

[La] T. Lawson, *h-cobordisms between simply connected 4-manifolds*, Topology and its Applications **28** (1988), 75–82.

[Lu] N. Lu, *A simple proof of the fundamental theorem of Kirby calculus on links*, Trans. Amer. Math. Soc. **331** (1992), 143–156.

[M1] J. Milnor, *Morse Theory*, Ann. Math. Studies **51**, Princeton University Press, 1963.

[M2] J. Milnor, *Spin structures on manifolds*, L'Ensignement Math. **9** (1963), 198–203.

[M3] J. Milnor, *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, notes by L. Siebenmann and J. Sondow, Princeton University Press, 1965.

[MH] J. Milnor és D. Husemoller, *Symmetric Bilinear Forms*, Springer-Verlag, 1973.

[MS] J. Milnor és J. Stasheff, *Characteristic Classes*, Ann. Math. Studies **76**, Princeton University Press, 1974.

[OSz] P. Ozsváth és Z. Szabó, *The symplectic Thom conjecture*, preprint.

[R] V. Rohlin, *New results in the theory of four dimensional manifolds*, Dok. Akad. Nauk. USSR **84** (1952), 221–224.

[RS] C. Rourke és B. Sanderson, *Introduction to Piecewise-Linear Topology*, Ergebnisse der Mathematik, Band 69, Springer-Verlag 1972.

[S] D. Salamon, *Spin geometry and Seiberg-Witten invariants*, book in preparation

[SSz] Stipsicz A. és Szabó Z., *4-dimenziós sima sokaságok elmélete (Donaldson után)*, jegyzet.

[T1] C. Taubes, *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, Math. Res. Letters **1** (1994), 809–822.

[Tr] B. Trace, *On attaching 3-handles to a 1-connected 4-manifold*, Pacific Jour. Math. **99** (1982), 175–181.

[W1] C.T.C. Wall, *Diffeomorphisms of 4-manifolds*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 131–140.

[W2] C.T.C. Wall, *On simply-connected 4-manifolds*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 141–149.

[W3] C.T.C. Wall, *Quadratic forms on finite groups*, Topology **2** (1964), 281–298.

[Wi] E. Witten, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 769–796.