Hipergráfok, halmazrendszerek

Simonyi Gábor előadásai alapján

készítette Terék Zsolt

1. Bevezetés

Jelölje 2^X az X halmaz összes részhalmazainak halmazát, vagyis X hatványhalmazát.

Definíció. (*hipergráf*) $H(V, \mathcal{E})$, ahol V a csúcsok, $\mathcal{E} \subseteq 2^V$ pedig az élek halmaza.

Egy hipergráf *uniform*, ha rögzített k mellett minden $E \in \mathcal{E}$ esetén $|E| = k$. A ,,hagyományos" gráf 2-uniform hipergráf. A gráfok néhány jellemző paraméterét általánosíthatjuk:

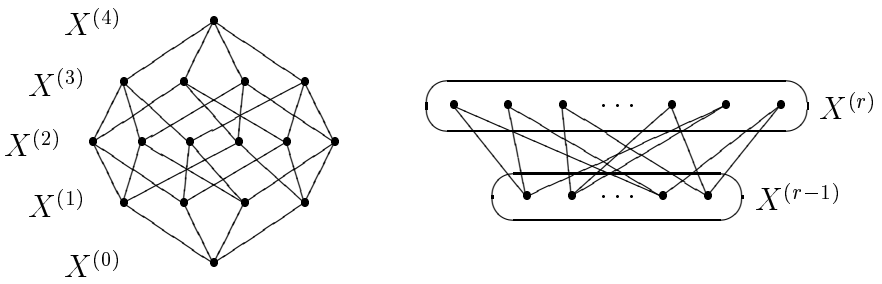
- $\nu(H)$ – diszjunkt élek maximális száma
- $\tau(H)$ – minimális lefogó ponthalmaz számossága
- $\chi(H)$ – kromatikus szám olyan színezésnél, ahol nincs teljesen egyszínű él. (A másik definíció jó színezésre az, hogy minden csúcs különböző színű egy élen; ez olyan, mintha az élek helyett klikkek lennének egy gráfban, és ezért ez kevésbé ,,igazi" hipergráfos fogalom.)

Egy hipergráf leírható karakterisztikus vektoraival: Minden élhez tartozik egy $|V|$ komponensből álló vektor, amelyben az i-edik helyen 1 szerepel, ha az i-edik csúcs az adott élhez tartozik, egyébként 0.

Feladat. (*OKTV, 1979*) Egy vállalatnál 70 tolmács dolgozik, és egyik sem tudja teljesen kiváltani a másikat. Minimálisan hány különböző nyelvet kell, hogy beszéljenek?

Megoldás. Könnyen látható, hogy 8 nyelv elegendő, hiszen ha mindenki pontosan 4 nyelven beszél, akkor ez $\binom{8}{4} = 70$ különböző nyelv-négyes.

Tegyük fel, hogy 7 nyelv is elegendő. Ekkor van 35 tolmács, akik vagy mind beszélik az első nyelvet, vagy egyikük sem, így tudásuk közt a maradék



1. ábra. A részhalmazokból épített gráf

6 nyelv tesz különbséget. Ezek közül legalább 18 olyan, hogy a második nyelv tekintetében is azonosak, őket a maradék 5 különbözteti meg. Innen 9-et 4, 5-öt 3, 3-at 2, illetve 2-t egy nyelv ismerete különböztet meg. Az utolsó állítás miatt A és B tolmács közül az első beszéli a hetedik nyelvet, a másik nem, a többi nyelvet illetően azonos a tudásuk. Ez azt jelenti, hogy A helyettesítheti B-t, ami ellentmondás, vagyis 7 nyelv nem elegendő.

Megjegyzés. Ezt a szellemes megoldást az akkori verseny győztese, Umann Gábor adta. A bizonyítás valóban rendkívül ötletes és célravezető is, ha pontosan ezt a feladatot kell megoldanunk. Érezhető azonban, hogy alighanem akkor is nyolc nyelv szükséges, ha mondjuk csak 60 tolmács van, ilyenkor azonban a fenti gondolatmenet nem működik.

2. Sperner–rendszerek

Vizsgáljuk meg általánosságban, hogy egy n elemű halmaz hány részhalmaza választható ki úgy, hogy közülük egyik sem tartalmazza a másikat. A továbbiakban jelöljünk $[n]$-nel egy n elemű halmazt.

Tétel. (Sperner, 1928) *Ha* $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, *amelyre* $\forall A, B \in \mathcal{F} : B \not\subset A$ *és* $A \not\subset B$, *akkor* $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

1. bizonyítás. Láncnak nevezzük a részhalmazok olyan $\langle H_i \rangle$ sorozatát, amelyben $H_{i+1} \supset H_i$.

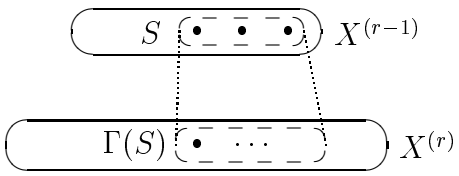
Az ábrán látható módon építsünk $2^{[n]}$ elemeiből, mint csúcsokból egy gráfot, ahol két halmaz pontosan akkor van összekötve egy éllel, ha egyik része a másiknak. Ebben szintnek nevezzük az azonos elemszámú halmazokhoz tartozó csúcshalmazt, és $X^{(r)}$-rel jelöljük, ahol r a megfelelő elemszám. Látható, hogy egy lánc a gráfban egy felülről lefelé haladó útnak felel meg.

Megmutatjuk, hogy található $f_r : X^{(r-1)} \to X^{(r)}$ és $g_r : X^{(r+1)} \to X^{(r)}$ leképezés úgy, hogy $r \leq n/2$-re f_r injektív, $r > n/2$ esetén pedig g_r injektív,

valamint f_r és g_r az élek mentén képez le, azaz

$$\forall\ A \in X^{r-1} \quad A \subset f_r(A),$$
$$\forall\ A \in X^{r+1} \quad A \supset g_r(A).$$

Ehhez tekintsük az $X^{(r-1)}$ és $X^{(r)}$ szintek által kifeszített részgráfot (ez egy páros gráf). Vizsgáljuk meg, teljesül-e a Hall-feltétel! ($\Gamma(S)$ az S szomszédainak halmaza a gráfban.)



Az $X^{(r-1)}$ elemeinek fokszáma $d = n - (r-1)$, hiszen ennyi új elemmel bővíthetjük az ide eső halmazokat. $X^{(r)}$ pontjainak fokszáma r, mert ennyiféleképpen hagyhatunk el egy elemet egy r elemű halmazból. Legyen most $S \subseteq X^{(r-1)}$:

$$|S| \cdot (n-r+1) = |\{(A,B) : A \in S, A \subset B, B \in \Gamma(S)\}| \leq |\Gamma(S)| \cdot r$$
$$|\Gamma(S)| \geq |S| \cdot \frac{n-r+1}{r} \geq |S|, \text{ ha } r < \frac{n}{2}$$

Láthatjuk, hogy létezik az $X^{(r-1)}$-et lefedő párosítás, és ez igazolja f_r létezését. Analóg módon következik g_r létezése is.

Most már világos, hogy $X^{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}$-től elindulva felépíthető $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ lánc, amelyek diszjunktak, és únió jukat a teljes $2^{[n]}$. $|\mathcal{F}|$ minden láncból legfeljebb egy elemet tartalmazhat, ezért $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

A becslés éles, hiszen az összes $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elemű részhalmaz megfelel a feltételeknek.

$\star\star\star$

2. bizonyítás. Legyen $\mathcal{F}$ Sperner-rendszer az $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ alaphalmazon. π az $1, 2, \ldots, n$ számok egy permutációja, melyhez hozzárendelhető az

$$x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)}$$

permutáció az alaphalmazon. Azt mondjuk, hogy egy ilyen permutációt blokkol $A \in \mathcal{F}$, ha $A = \{x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(k)}\}$, ahol $|A| = k$.

Vegyük észre, hogy egyetlen permutációt legfeljebb egy $\mathcal{F}$-beli elem blokkolhat, mert két különböző blokkoló részhalmaz esetén egyik része volna a másiknak, $\mathcal{F}$ nem volna Sperner-rendszer. Tehát a lehetséges olyan (A, π) párok száma, ahol A blokkolja π-t, legfeljebb $n!$

Másrészt egy rögzített $A \in \mathcal{F}$ részhalmaz összesen $|A|!\cdot(n-|A|)!$ különböző permutációt blokkolhat. Tehát:

$$\begin{aligned} \sum_{A\in\mathcal{F}} |A|!\cdot(n-|A|)! &\leq n! \\ \sum_{A\in\mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1} &\leq 1 \\ 1 \geq \sum_{A\in\mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1} \geq \sum_{A\in\mathcal{F}} \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}^{-1} &= |\mathcal{F}|\cdot\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}^{-1} \end{aligned}$$

Innen adódik a bizonyítandó állítás.

$\star\star\star$

Az előbbi bizonyításból az is leolvasható, hogy ha $\mathcal{F}$ k-elemű részhalmazainak a száma f_k, akkor

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

Ez a LYM-egyenlőtlenség. (*Lubell, Yamamoto, Meshalkin* nevek kezdőbetűjéből.)
Állítás. Egyenlőség pontosan $\mathcal{F} = X^{(k)}$ esetén áll a LYM-egyenlőtlenségben. Ezt a következő tétel segítségével látjuk majd be.

Legyen $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots A_m\} \subseteq 2^{[n]}$. Minden $D \subseteq [n]$-re definiáljuk a $W_{\mathcal{A}}(D)$ súlyt:

$$W_{\mathcal{A}}(D) = \left| \bigcap_{\substack{A_i\subseteq D \\ A_i\in\mathcal{A}}} A_i \right|$$

Ha nincs olyan $A \in \mathcal{A}$, hogy $A \subseteq D$, akkol legyen $W_{\mathcal{A}}(D) = 0$.

Tétel. (Ahlswede-Zhang azonosság (1990)) *Tetszőleges* $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ *halmazrendszer esetén*

$$\sum_{D\subseteq[n]} \frac{W_{\mathcal{A}}(D)}{|D|\cdot\binom{n}{|D|}} = 1$$

Bizonyítás. Az $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ alaphalmaz feletti $\mathcal{A}$ halmazrendszer fedőhalmazainak családja

$$U_{\mathcal{A}} := \{B \in 2^X : \exists A \in \mathcal{A} \quad A \subseteq B\}.$$

Azt mondjuk, hogy az x_i elemek egy π permutációja S-nél lép ki $U_{\mathcal{A}}$-ból, ha $S = \{x_{\pi(1)}, \dots x_{\pi(k)}\} \in U_{\mathcal{A}}$, de $S - \{x_{\pi(k)}\} \notin U_{\mathcal{A}}$.

$$\underbrace{\underbrace{x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(k-1)}}_{\notin U_{\mathcal{A}}}, x_{\pi(k)}}_{S \in U_{\mathcal{A}}}, x_{\pi(k+1)}, \dots, x_{\pi(n)}$$

Adott π esetén az a halmaz, ahol a permutáció kilép $U_{\mathcal{A}}$-ból, egyértelműen meghatározott. Vizsgáljuk meg, rögzített S-hez hány olyan permutáció van, amely éppen S-nél lép ki. Az első $|S|$ elem nyilván S-beli kell, hogy legyen. Viszont azért, hogy előbb semmiképp se lépjen ki a permutáció, az utolsó S-belinek, $x_{\pi(|S|)}$-nek olyannak kell lenni, hogy minden $A \in \mathcal{A}, A \subseteq S$-re eleme A-nak. Ilyen elemből pedig pontosan $W_{\mathcal{A}}(S)$ féle van.

$$\underbrace{x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots,}_{|S|-1} x_{\pi(|S|)}, \underbrace{\dots, x_{\pi(n)}}_{n-|S|}$$

Ezért adott S-hez összesen $(|S|-1)! \cdot W_{\mathcal{A}}(S) \cdot (n-|S|)!$ különböző permutáció található, amelyik S-nél lép ki $U_{\mathcal{A}}$-ból. Ezeket összegezve megkapjuk a lehetséges permutációk számát:

$$\sum_S (|S|-1)! \cdot W_{\mathcal{A}}(S) \cdot (n-|S|)! = n!$$

ahol felhasználtuk, hogy $S \notin U_{\mathcal{A}}$-ra $W_{\mathcal{A}}(S) = 0$. Ezt rendezve, $S \to D$ cserével kapjuk a tétel állítását:

$$\sum_{D \in 2^X} \frac{W_{\mathcal{A}}(D)}{|D| \binom{n}{|D|}} = 1$$

$\star\star\star$

Ebből levezethető a LYM-egyenlőtlenség: Legyen $\mathcal{A}$ Sperner-rendszer. Ekkor

$$1 = \sum_{D \subseteq [n]} \frac{W_{\mathcal{A}}(D)}{|D| \cdot \binom{n}{|D|}} = \sum_{\substack{D \subseteq [n] \\ D \in \mathcal{A}}} \frac{W_{\mathcal{A}}(D)}{|D| \cdot \binom{n}{|D|}} + \sum_{\substack{D \subseteq [n] \\ D \notin \mathcal{A}}} \dots = \sum_{D \in \mathcal{A}} \frac{|D|}{|D| \cdot \binom{n}{|D|}} + \varepsilon,$$

ahol ε nemnegatív. Itt felhasználtuk, hogy $A_i \in \mathcal{A}$ esetén $W_{\mathcal{A}}(A_i) = |A_i|$, ami azért igaz, mert egy Sperner-rendszerben $A_i \subseteq A_j \Rightarrow i = j$.

Most vizsgáljuk meg, mi az egyenlőség feltétele.

$$1 = \sum_{D\subseteq[n]} \frac{W_{\mathcal{A}}(D)}{|D|\cdot\binom{n}{|D|}} = \sum_{D\in\mathcal{A}} \frac{|D|}{|D|\cdot\binom{n}{|D|}} + \sum_{\substack{D\subseteq[n]\\ D\notin\mathcal{A}}} \frac{W_{\mathcal{A}}(D)}{|D|\cdot\binom{n}{|D|}}$$

Itt a második tag elhanyagolásával kaptuk a LYM-egyenlőtlenséget. Mivel az nemnegatív, csak úgy lehet egyenlőség, ha minden $D \notin \mathcal{A}$-ra $W_{\mathcal{A}}(D) = 0$.

Legyen $\mathcal{A}$ egy minimális elemszámú halmaza A, $|A| = k$. Tetszőleges $x \notin A$ esetén $D = A \cup \{x\} \notin \mathcal{A}$, ezért szükségképpen $W_{\mathcal{A}}(D) = 0$. Ez azt jelenti, hogy bármely $a \in A$-ra létezik $A_a \in \mathcal{A}$, hogy $A_a \subseteq D\backslash\{a\}$. Mivel A minimális elemszámú volt, $A_a = D\backslash\{a\} = A\backslash\{a\} \cup \{x\}$.

Beláttuk, hogy egy minimális elemszámú $\mathcal{A}$-beli halmaz esetén egyetlen elemét egy másikra cserélve a kapott halmaz is része $\mathcal{A}$-nak. Ebből azonnal következik, hogy minden k elemű halmaz része $\mathcal{A}$-nak, vagyis ez a Sperner-rendszer éppen az $X^{(k)}$.

3. Árnyékok

Ha $\mathcal{A} \subseteq X^{(k)}$, akkor a

$$\partial\mathcal{A} := \{B : B \in X^{(k-1)}, \exists A \in \mathcal{A}\ B \subset A\}$$

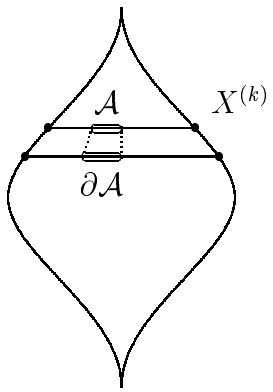
halmazt $\mathcal{A}$ árnyékának nevezzük.

Tétel. (Lokális LYM egyenlőtlenség) *Ha* $\mathcal{A} \subseteq X^{(k)}$, *akkor*

$$\frac{|\partial\mathcal{A}|}{\binom{n}{k-1}} \geq \frac{|\mathcal{A}|}{\binom{n}{k}}$$

Bizonyítás. Minden $\mathcal{A}$-beli halmazhoz pontosan k olyan van $\partial\mathcal{A}$-ban, amelyet tartalmaz, és minden $\partial\mathcal{A}$-beli legfeljebb $n-(k-1)$ $\mathcal{A}$-belinek része. Azaz

$$k\cdot|\mathcal{A}| = |\{(A,B) : A\in\mathcal{A},\ B\in\partial A,\ B\subset A\}| \leq \leq |\partial\mathcal{A}|\cdot(n-(k-1)),$$



amiből adódik, hogy

$$\frac{|\partial\mathcal{A}|}{|\mathcal{A}|} \geq \frac{k}{n-k+1} = \frac{\frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k+1)!}}{\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}} = \frac{\binom{n}{k-1}}{\binom{n}{k}}$$

$\star\star\star$

Felmerül a kérdés, hogy rögzített $|\mathcal{A}| = m$ mellett mikor lesz $\partial\mathcal{A}$ minimális. Ehhez definiáljuk a kolexikografikus rendezést.

Definíció. (Kolexikografikus rendezés) Az $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz részhalmazait $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ formában felírva, ahol $a_i < a_{i+1}$, az azonos elemszámúak között az alábbi rendezést kolexikografikus rendezésnek nevezzük:

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \leq \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \text{ ha } j = \max\{i : a_i \neq b_i\} \text{ esetben } a_j < b_j.$$

A lexikografikus rendezéssel összehasonlítva ($n = 7, k = 4$):

lexikografikus	kolexikografikus
1234	1234
1235	1235
1236	1245
1237	1345
1245	2345
1246	1236
1247	1246

Tétel. (Kruskal-Katona) *Adott $|\mathcal{A}| = m$ esetén $\mathcal{A} \subseteq X^{(k)}$-ra $\partial\mathcal{A}$ legalább akkora, mint akkor, ha $\mathcal{A}$ az $X^{(k)}$ kolexikografikus rendezés szerinti első m elemét tartalmazza.*

Lemma. *Minden m természetes számnak létezik egy egyértelmű* k-binomiális *felírása:*

$$m = \binom{m_k}{k} + \binom{m_{k-1}}{k-1} + \ldots + \binom{m_s}{s},$$

ahol $m_k > m_{k-1} > \ldots > m_s \geq 1$.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy van ilyen. Az m_j számokat a legnagyobbal kezdve válasszuk meg a következőképpen:

$$m_j := \max\left\{h : \binom{h}{j} \leq \underbrace{m - \binom{m_k}{k} - \ldots - \binom{m_{j+1}}{j+1}}_{d_{j+1}}\right\}$$

A módszer véget ér, ha $d_{j+1} = 0$, és az $j + 1 = 1$ után biztosan 0, hiszen $\binom{h}{1}$ akármilyen pozitív egész értéket felvehet.

Be kell még látni, hogy az m_j együtthatók szigorúan monoton csökkennek. Az algoritmus során a lehető legnagyobb binomiális együtthatót választjuk,

így

$$\begin{aligned}
\binom{m_j+1}{j} &> d_{j+1} \geq \binom{m_j}{j} \\
\binom{m_j+1}{j} - \binom{m_j}{j} &> d_{j+1} - \binom{m_j}{j} = d_j \\
\binom{m_j}{j-1} &> d_j \\
m_j &> m_{j-1}
\end{aligned}$$

Most tegyük fel, hogy létezik két különböző felírás.

$$m = \binom{m_k}{k} + \ldots + \binom{m_s}{s} = \binom{m'_k}{k} + \ldots + \binom{m'_s}{s'}$$

Legyen az első eltérő pár $m_j \neq m'_j$. Feltehető, hogy $m'_j < m_j$.

$$\begin{aligned}
&\binom{m_j}{j} + \ldots + \binom{m_s}{s} = \binom{m'_j}{j} + \ldots + \binom{m'_s}{s'} \leq \\
&\leq \binom{m_j-1}{j} + \binom{m_j-2}{j-1} + \ldots + \binom{m_j-j}{1} = \binom{m_j}{j} - 1
\end{aligned}$$

Felhasználva egy nevezetes azonosságot, ellentmondásra jutottunk. Ezért a felírás egyértelmű.

$\star\star\star$

Vezessük be az egyszerűség kedvéért a következő jelöléseket:

$$b^{(k)}(m_k, m_{k-1}, \ldots, m_s) = \binom{m_k}{k} + \binom{m_{k-1}}{k-1} + \ldots + \binom{m_s}{s},$$

és definiáljuk $X = [n]$ egy részhalmazrendszerét a következőképpen:

$$\begin{aligned}
B^{(k)}(m_k, \ldots, m_s) = \; & \binom{[m_k]}{k} \cup \left\{ \binom{[m_{k-1}]}{k-1} \oplus \{m_k + 1\} \right\} \cup \\
& \cup \left\{ \binom{[m_{k-2}]}{k-2} \oplus \{m_k + 1, m_{k-1} + 1\} \right\} \\
& \ldots \\
& \cup \left\{ \binom{[m_s]}{s} \oplus \{m_k + 1, m_{k-1} + 1, \ldots, m_{s+1} + 1\} \right\}
\end{aligned}$$

ahol $\binom{[m]}{k}$ jelöli $[m]$ k-elemű részhalmazait, $\oplus$ pedig a bal oldalán álló részhalmazok mindegyikéhez hozzáveszi a jobb oldalán álló elemeket. Az így kapott k-uniform halmazrendszer éppen a kolexikografikus rendezés szerinti első

$$|B^{(k)}(m_k, \ldots, m_s)| = b^{(k)}(m_k, \ldots, m_s)$$

k-elemű részhalmaza X-nek.

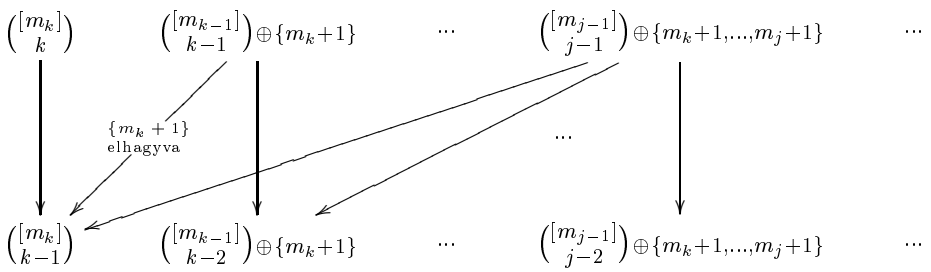
A binomiális együtthatók ismert $\binom{a}{l} = \binom{a-1}{l} + \binom{a-1}{l-1}$ azonosságának többszöri alkalmazásából adódik, hogy

$$b^{(k)}(m_k, \ldots, m_s) = b^{(k)}(m_k - 1, \ldots, m_s - 1) + b^{(k-1)}(m_k - 1, \ldots, m_s - 1).$$

Azt sem nehéz látni, hogy

$$\partial[B^{(k)}(m_k, \ldots, m_s)] = B^{(k-1)}(m_k, \ldots, m_s).$$

(Ha itt $s-1 = 0$, akkor $B^{(k-1)}(m_k, \ldots, m_s) := B^{(k-1)}(m_k, \ldots, m_{s+1}+1)$.) Tekintsük ugyanis tagonként, mibe mennek át az egyes részhalmazok árnyékai:



Világos, hogy a felső sor halmazainak minden árnyéka megjelenik az alsó sorban, illetve az alsó sor halmazainak minden eleme valóban előáll árnyékként.

Definíció. Az A pozitív egész számokból álló halmaz i, j paraméterek szerinti *tolásának (shifting)* nevezzük az

$$R_{ij}(A) = \begin{cases} (A \backslash \{j\}) \cup \{i\} & \text{ha } j \in A \text{ és } i \notin \mathcal{A} \\ A & \text{egyébként} \end{cases}$$

operációt. Balra tolásról beszélünk, ha $i < j$. Egy $\mathcal{A} \subseteq X^{(k)}$ *halmazrendszer tolása*

$$\begin{aligned} R_{ij}(\mathcal{A}) = \; & \{R_{ij}(A) : A \in \mathcal{A} \text{ és } R_{ij}(A) \notin \mathcal{A}\} \\ & \cup \{A : R_{ij}(A) \in \mathcal{A}\}. \end{aligned}$$

Az $\mathcal{A}$ halmazrendszer *balra tolt*, ha minden $i < j$ esetén $R_{ij}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Lemma. *Minden $\mathcal{A} \subseteq X^{(k)}$ és $i < j$ esetén $|\partial R_{ij}(\mathcal{A})| \leq |\partial \mathcal{A}|$.*

Bizonyítás. Elegendő megmutatni, hogy $|\partial R_{ij}(\mathcal{A}) \setminus \partial\mathcal{A}| \leq |\partial\mathcal{A} \setminus \partial R_{ij}(\mathcal{A})|$. Tekintsük az alábbi átalakítást:

$$|\partial R_{ij}(\mathcal{A}) \setminus \partial\mathcal{A}| = |R_{ji}(\partial R_{ij}(\mathcal{A}) \setminus \partial\mathcal{A})|$$

A bal oldalon azon árnyékok száma szerepel, amelyek az eltoltnak árnyékai, de az eredeti rendszernek nem; ezek pontosan azon árnyékok, melyekben szerepel i, és valóban eltolja őket R_{ij}. Ezek számán a visszatoló operátor nem változtat. Másrészt

$$|R_{ji}(\partial R_{ij}(\mathcal{A}) \setminus \partial\mathcal{A})| \leq |\partial\mathcal{A} \setminus \partial R_{ij}(\mathcal{A})|$$

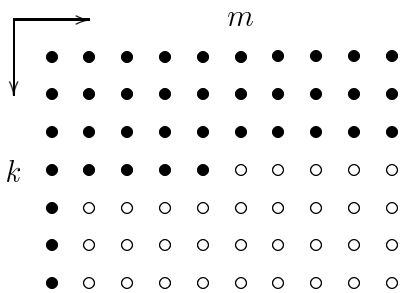
ami azért igaz, mert a bal oldal minden eleme, szerepel a jobb oldalon is. (A valóban eltolt árnyékok visszatoltjai $\mathcal{A}$-nak árnyékai, és mivel j-t tartalmazzák, i-t nem, nem vonhattuk ki őket.)

$\star\star\star$

Most már kimondhatjuk a Kruskal-Katona tételt:

Tétel. (Kruskal-Katona) *Legyen* $\mathcal{A} \subseteq X^{(k)}$ *és* $|\mathcal{A}| = m = b^{(k)}(m_k, \ldots, m_s)$. *Ekkor* $|\partial\mathcal{A}| \geq b^{(k-1)}(m_k, \ldots, m_s)$.

Bizonyítás. Teljes indukció szerint bizonyítunk az m és k változók szerint. Könnyen ellenőrizhető, hogy $m = 1$ mellett tetszőleges k-ra, illetve $k = 1$-nél minden m-re teljesül az állítás.



Tegyük fel, hogy $k-1$-ig minden m-re, és k esetén $m-1$–ig már beláttuk. A lemma miatt feltehető az is, hogy $\mathcal{A}$ balra tolt. Legyen

$$\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{A} : 1 \notin A\}$$
$$\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{A} : 1 \in A\} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0$$

Ekkor nyilván $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$ és diszjunktak. Ezen kívül $\partial\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \ominus \{1\} := \{A \setminus \{1\} : A \in \mathcal{A}_1\}$, ami azért igaz, mert nem lehetett $\mathcal{A}$-t balra tolni, vagyis a $\partial\mathcal{A}_0 \oplus 1$ halmazcsalád elemei is $\mathcal{A}$-ban vannak. Viszont $\mathcal{A}_1 \ominus \{1\} \subseteq \partial\mathcal{A}_1$, tehát $\partial\mathcal{A}_0 \subseteq \partial\mathcal{A}_1$, azaz $\partial\mathcal{A} = \partial\mathcal{A}_1$, ami felbontható két diszjunkt részre:

$$\partial\mathcal{A}_1 = \{\mathcal{A}_1 \ominus \{1\}\} \cup \{\partial(\mathcal{A}_1 \ominus \{1\}) \oplus \{1\}\}$$

Ezért $|\partial\mathcal{A}_1| = |\mathcal{A}_1| + |\partial(\mathcal{A}_1 \ominus \{1\})|$. Becsüljük ezt az összeget tagonként!

- Először belátjuk, hogy $|\mathcal{A}_1| \geq b^{(k-1)}(m_k - 1, \ldots, m_s - 1)$, ahol az m_i számok m k-binomiális felírásának paraméterei. Tegyük fel indirekt, hogy $|\mathcal{A}_1| < b^{(k-1)}(m_k - 1, \ldots, m_s - 1)$. Ekkor

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_0| &= |\mathcal{A}| - |\mathcal{A}_1| = m - |\mathcal{A}_1| > \\ &> b^{(k)}(m_k, \ldots, m_s) - b^{(k-1)}(m_k - 1, \ldots, m_s - 1) \\ &= b^{(k)}(m_k - 1, \ldots, m_s - 1) \end{aligned}$$

  Az indukciós feltevés $\mathcal{A}_0$-ra ($|\mathcal{A}_0| < |\mathcal{A}| = m$ miatt alkalmazgató) valamint az indirekt feltétel miatt

$$|\partial\mathcal{A}_0| \geq b^{(k-1)}(m_k - 1, \ldots, m_s - 1) > |A_1|$$

  ami ellentmondás, hiszen $|\partial\mathcal{A}_0| \leq |\mathcal{A}_1 \ominus \{1\}| = |\mathcal{A}_1|$. Ezzel beláttuk, hogy $|\mathcal{A}_1| \geq b^{(k-1)}(m_k - 1, \ldots, m_s - 1)$.

- Az indukciós feltevést $\mathcal{A}_1 \ominus \{1\}$-re alkalmazva

$$\begin{aligned} |\partial(\mathcal{A}_1 \ominus \{1\})| &\geq |\partial(B^{(k-1)}(m_k - 1, \ldots, m_s - 1))| = \\ &= |B^{(k-2)}(m_k - 1, \ldots, m_s - 1)| = \\ &= b^{(k-2)}(m_k - 1, \ldots, m_s - 1) \end{aligned}$$

  Ezek alapján

$$\begin{aligned} |\partial\mathcal{A}| &= |\partial\mathcal{A}_1| = |\mathcal{A}_1| + |\partial(\mathcal{A}_1 \ominus \{1\})| \geq \\ &\geq b^{(k-1)}(m_k - 1, \ldots, m_s - 1) + b^{(k-2)}(m_k - 1, \ldots, m_s - 1) = \\ &= b^{(k-1)}(m_k, \ldots, m_s) \end{aligned}$$

és éppen ezt akartuk belátni.

Nem bizonyítjuk azt az állítást (de igaz), hogy ha $m = \binom{M}{k}$, akkor egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, amikor egy M részhalmazból alkotott rendszer összes k-elemű részhalmazát vesszük.

$\star\star\star$

4. Metsző rendszerek

Az $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszer metsző, ha bármely két elemének metszete nemüres. Felmerül a kérdés, hogy maximálisan hány elemet tartalmazhat $\mathcal{A}$, ha metsző. A válasz meglepően egyszerű: könnyű olyan rendszert konstruálni, amely 2^{n-1} részhalmazt tartalmaz, és metsző. Például egy rögzített x_0 elem mellé minden lehetséges módon válasszunk más elemeket.

Az ilyet *leszúrt rendszernek* hívják. Ennél nagyobb méretű rendszer már nem tehet eleget a feltételeknek, mivel bármely részhalmaz és a komplementere közül csak legfeljebb egyik lehet $\mathcal{A}$-ban.

Ha csak rögzített elemszámú részhalmazokat tekintünk, vagyis $\mathcal{A} \subseteq X^{(k)}$, három esetet érdemes megkülönböztetni.

- $k > n/2$-re az összes részhalmaz megfelel a feltételeknek, azaz $\max |\mathcal{A}| = |X^{(k)}| = \binom{n}{k}$
- $k = n/2$ mellett az előbbi gondolatmenet alkalmazásával látható, hogy a leszúrt rendszer maximális, vagyis $\max |\mathcal{A}| = \frac{1}{2}\binom{n}{n/2} = \binom{n-1}{n/2-1}$
- $k < n/2$ esetén a válasz nem olyan egyszerű. Erről szól a következő tétel.

Tétel. (Erdős-Ko-Rado, 1961) *Legyen $\mathcal{A} \subseteq X^{(k)}$ metsző és $k < n/2$. Ekkor*

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

Egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $\mathcal{A}$ egy leszúrt rendszer.

1. bizonyítás. (Daykin, 1974) Tegyük fel, hogy $|\mathcal{A}| > \binom{n-1}{k-1}$. Tekintsük a komplementerek halmazát:

$$\mathcal{A}^c = \{\bar{A} : A \in \mathcal{A}\},$$

ez nyilván $n-k$ uniform, azaz $\mathcal{A}^c \subseteq X^{(n-k)}$.

Egy $\mathcal{B} \subseteq X^{(m)}$ halmazrendszer t-edik árnyékán a következőt értjük:

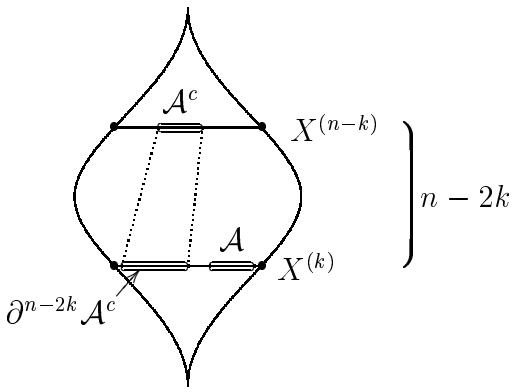
$$\partial^t \mathcal{B} := \{F : F \in X^{(m-t)} \text{ és } \exists B \in \mathcal{B},\ F \subseteq B\}$$

Vegyük észre, hogy ha $\mathcal{A}$ metsző, akkor

$$(\partial^{n-2k} \mathcal{A}^c) \cap \mathcal{A} = \emptyset.$$

Mivel $|\mathcal{A}^c| = |\mathcal{A}| > \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{n-k}$, alkalmazzuk egymás után $n-2k$-szor a Kruskal-Katona tételt (a halmazrendszer elemszámának binomiális felírása mindvégig egyetlen binomiális együtthatóból áll):

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}^c| &> \binom{n-1}{n-k} \\ |\partial \mathcal{A}^c| &> \binom{n-1}{n-k-1} \end{aligned}$$



$$|\partial^2\mathcal{A}^c| > \binom{n-1}{n-k-2}$$

$$\dots$$

$$|\partial^{n-2k}\mathcal{A}^c| > \binom{n-1}{n-k-(n-2k)} = \binom{n-1}{k}$$

Tehát

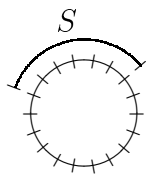
$$|\mathcal{A}\cup\partial^{n-2k}\mathcal{A}^c| = |\mathcal{A}| + |\partial^{n-2k}\mathcal{A}^c| > \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k},$$

ami ellentmondás, hiszen k elemű részhalmazokból $\binom{n}{k}$-nál több nem lehet.

Az egyenlőség vizsgálatához tegyük fel, hogy $|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{k-1}$. Ekkor (ha felhasználjuk a Kruskal-Katona tétel végén említett, de nem bizonyított feltételt) a fenti gondolatmenetből adódik, hogy $\partial^{n-2k}\mathcal{A}^c$ a kolexikografikusan első $\binom{n-1}{k}$ darab k-as halmaz. Ekkor viszont $\mathcal{A}$ a kolexikografikusan utolsó $\binom{n}{k} - |\partial^{n-2k}\mathcal{A}^c| = \binom{n-1}{k-1}$ darab k elemű halmaz, ami a rendezés miatt éppen az összes, a legnagyobb elemet is tartalmazó halmaz. Tehát ez a legnagyobb elem által leszúrt rendszer.

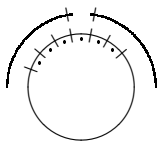
$\star\star\star$

2. bizonyítás. (Katona, 1972) Azt mondjuk, hogy egy $S \in \mathcal{A}$ halmaz megjelenik az alaphalmaz elemeinek egy ciklikus permutációjában, ha S elemei a ciklusban egymást követő elemek.



Számoljuk meg az olyan (A, π) párokat, ahol $A \in \mathcal{A}$, π egy ciklikus permutáció, és A megjelenik π-ben. Rögzített A összesen $k! \cdot (n-k)!$ ciklikus permutációban van jelen, így az (A, π) párok száma $|\mathcal{A}| \cdot k! \cdot (n-k)!$.

Másrészről az összes ciklikus permutáció száma $(n-1)!$. Vizsgáljuk meg, egy ilyen permutációban hány $\mathcal{A}$-beli halmaz jelenhet meg! (Itt használjuk a halmazrendszer metsző voltát.)



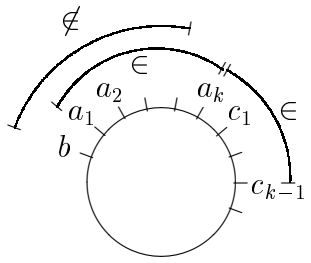
Az ábrán egy $\mathcal{A}$-beli halmaz k pontja látható, a köztük lévő helyeken $k-1$ kis pont. Minden egyes kis ponthoz vagy a tőle balra, vagy a tőle jobbra lévő k elem lehet $\mathcal{A}$-ban a metszőség miatt. Így az eredeti halmazzal együtt összesen k darab $\mathcal{A}$-beli jelenhet meg ebben a ciklikus permutációban. Ezért az (A, π) párok száma legfeljebb $(n-1)! \cdot k$. (Itt azt is kihasználtuk, hogy $2k < n$.)

Az előzőekkel összevetve kapjuk, hogy

$$|\mathcal{A}| \cdot k! \cdot (n-k)! \leq (n-1)! \cdot k$$

$$|\mathcal{A}| \leq \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} k = \binom{n-1}{k-1}$$

Az egyenlőség teljesüléséhez szükséges és elégséges, hogy minden permutációban megjelenjen k halmaz. Legyenek a permutációban $b, a_1, \ldots, a_k$ olyan egymást követő elemek, hogy $\{a_1, \ldots, a_k\} \in \mathcal{A}$, de $\{b, a_1, \ldots, a_{k-1}\} \notin \mathcal{A}$.



Ekkor a feltétel miatt tetszőleges, ezektől különböző $c_1, \ldots, c_{k-1}$ elemekre $\{a_1, \ldots, a_k\} \in \mathcal{A}$, $\{a_2, \ldots, a_k, c_1\} \in \mathcal{A}$, …, $\{a_k, c_1, \ldots, c_{k-1}\} \in \mathcal{A}$. Ebből belátható, hogy $\mathcal{A}$ minden a_k-t tartalmazó k-ast tartalmaz. Ekkor más eleme már nem lehet, hiszen ezek száma $\binom{n-1}{k-1}$.

⋆⋆⋆