Nemsztenderd Analízis Feladatok, 2.

1. Legyen $\mathcal{G}$ az a teljes gráf, melynek csúcshalmaza $\mathcal{P}(\omega)$. Igazoljuk, hogy $\mathcal{G}$ éleit ki lehet $\aleph_0$ színnel színezni úgy, hogy ne keletkezzen egyszínű háromszög.

2. Igazoljuk, hogy a következő két állítás ekvivalens:
(a) az $\langle a_n : n \in \mathbf{N} \rangle$ valós számsorozatra a szokásos értelemben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty;$$

(b) végtelen nagy n-ekre a_n végtelen nagy.

3. Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ folytonos függvény. Adjunk nemsztenderd bizonyítást arra, hogy $\mathbf{R}$ nyílt részhalmazainak f szerinti őképe nyílt.

4. Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deriválható függvény, és tegyük fel, hogy K felső korlátja f'-nek. Igazoljuk, hogy végtelen nagy $b \in {}^*\mathbf{R}$ számokra $\dfrac{|f(b)|}{b} \le K + 1$.

5. Adjunk meg folytonos függvényeknek egy olyan $f_n : [0,1] \to [0,1]$ pontonként konvergens sorozatát, melyre teljesül, hogy végtelen nagy n-ekre a

$$g_n : [0,1] \to \mathbf{R},\ g_n(x) = st(f_n(x))$$

függvény mindenütt értelmezett, de van olyan pont, ahol nem folytonos.

2010 április.