

Villámkérdések, 1. minta megoldásokkal¹

1. Adjuk meg a vektor-vektor függvények divergenciájának definícióját.
2; (Szept. 18).

$$\operatorname{div}(v)(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \int_{K_h} v, \quad \text{ahol } K_h \text{ a } p \text{ középpontú, } h \text{ élhosszúságú,} \\ \text{tengelypárhuzamos kocka felülete.}$$

2. Adjuk meg a Leibniz-sorok konvergenciájának egy feltételét. 5; (Szept. 25).

A $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ Leibniz-típusú sor konvergens, ha az (a_n) sorozat monoton csökkenő és nullához konvergál.

3. Legyen f az a 2π szerint periodikus valós függvény, melyre teljesül, hogy $\forall x \in [-\pi, \pi]$ $f(x) = |x|$. Határozzuk meg $\sin(2007x)$ együtthatóját f Fourier-sorában.
8; (Okt. 5).

Mivel f páros függvény, Fourier-sorában minden szinuszos tag együtthatója nulla.

4. Számítsuk ki $\ln(i)$ főértékének algebrai alakját. 9; (Okt. 9).

$$i = 1(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \text{ezért } \ln(i) = i\frac{\pi}{2}.$$

5. Adjuk meg $f(z) = e^z$ origó körüli Laurent-sorát. 9,13; (Okt. 9, Okt. 27).

f az egész komplex síkon reguláris, tehát Laurent-sora azonos Taylor-sorával:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

6. Legyen $f(t) = sh(2007t)$. Számítsuk ki $\mathcal{L}(f)$ -t, ha $\mathcal{L}(sh; p) = \frac{1}{p^2-1}$. 14; (Nov. 6).

$$\text{A hasonlósági tétel szerint } \mathcal{L}(f; p) = \frac{1}{2007} \mathcal{L}(sh; \frac{p}{2007}) = \frac{1}{2007} \frac{1}{(\frac{p}{2007})^2 - 1} = \frac{2007}{p^2 - 2007^2}.$$

7. Egzakt-e az $1 - y' = 0$ diff.egyenlet? (Indokoljunk.) 17; (Nov. 13).

$$P(x, y) = 1, \quad Q(x, y) = 1, \quad \partial_y P(x, y) = 0 = \partial_x Q(x, y) \text{ tehát az egyenlet egzakt.}$$

8. Legyen $f(x) = e^x$, $g(x) = 3e^x$. Lehet-e $\{f, g\}$ alaprendszere egy másodrendű lineáris diff.egyenletnek? (Indokoljunk.) 18; (Nov. 13).

Alaprendszer elemei lineárisan függetlenek, esetünkben viszont $g = 3f$, tehát $\{f, g\}$ egyetlen lin. diff.egyenletnek sem alaprendszere.

¹A kérdések után $X; (Y, Z)$ azt jelenti, hogy a vizsgakérdések jegyzékének X. pontja ismeretében, (az Y. hónap Z. napján tartott előadás alapján) kell(ene) tudni a választ...