Matematika alapjai

8. előadás

A halmazelmélet axiómáinak folytatása

II. Konstrukciós axiómák:

(3) <u>páraxióma</u>:

ha x, y halmaz, akkor $\{x, y\}$ is halmaz, vagyis:

$$\forall x \forall y \exists z (\forall u (u \in z \Leftrightarrow (u = x \vee u = y)))$$

(4) <u>hatványhalmaz-axióma</u>:

ha x halmaz, akkor $P(x)$ is halmaz, vagyis:

- 1. kísérlet: $\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x)$
- 2. kísérlet: $\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow \forall u (u \in z \Rightarrow u \in x))$

(5) <u>unióaxióma</u>:

ha x halmaz, akkor $\bigcup\limits_{z \in x} z$ is halmaz, vagyis:

$$\forall x \exists y \forall u (u \in y \Leftrightarrow \exists z (z \in x \wedge u \in z))$$

(6) <u>helyettesítési axiómaséma</u>:

ha f függvény, A halmaz, akkor $\{f(a) : a \in A\}$ is halmaz

1. Definíció. A $\varphi(x, y, p_1, \ldots, p_n)$ paraméteres formula *függvénykörülírás*, ha teljesül, hogy

$$\forall x \exists! y \;\; \varphi(x, y, p_1, \ldots, p_n),$$

ahol $p_1, \ldots, p_n$ paraméterek rögzített halmazok.

- 1. kísérlet:
  $\forall p_1 \ldots \forall p_n (\forall x \exists! y \;\; \varphi(x, y, p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow \forall A \exists B (\forall b (b \in B \Leftrightarrow \exists a (a \in A) \wedge \varphi(a, b, p_1, \ldots, p_n))))$

- 2. kísérlet:

  $\exists!$-t még ki kell fejezni. Itt φ formulaváltozó; pontosan annyi axiómából áll, ahány módon φ-t választhatjuk.

II. Egyszerűsítő axiómák:

(7) regularitási axióma:

- 1. kísérlet: $\forall x(x \neq \emptyset \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge x \cap y = \emptyset))$ (kifejezendő: $\emptyset$ és $\cap$)
- 2. kísérlet: $\forall x(\exists z(z \in x) \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge \forall z(z \in x \Rightarrow z \notin y)))$

  (ez az axióma a lefelé végtelen láncokat kizárja!)

(8) kiválasztási axióma: (leírható a rögzített nyelven)

1. Megjegyzések.

1°: (0)-(7) a *ZF-axiómák* (Zermelo és Fraenkel nevéből), (0)-(8) a *ZFC-axiómák*

2°: mostantól (tulajdonképpen eddig is) ZFC-ben, illetve variánsaiban dolgozunk

3°: léteznek más halmazelméletek is, de ZFC-vel való kapcsolatuk átlátható

4°: ZFC minden véges része ellentmondástalan.

5°: a változók itt mindig halmazokat jelölnek

6°: a választott nyelv kényelmetlen, lesz módszer a nyelv bővítésére

7°: az axiómák jelentése

Konstruktivista álláspont: ezeknek az axiómáknak nincs jelentése
Platonista álláspont: a tudásunktól függetlenül létezik az összességek univerzuma

2. Definíció. Halmazok egy formulával megnevezhető összességét *osztály*nak nevezzük.

Az osztályok nincsenek betiltva, de az axiómák a halmazokra vonatkoznak!

Nyelvbővítések

I. Új reláció bevezetése:

(a) legyen R új n-változós relációszimbólum, és legyen $\varphi(x_1 \dots x_n)$ tetszőleges formula
(b) új axióma: $\forall x_1 \dots \forall x_n(R(x_1 \dots x_n) \Leftrightarrow \varphi(x_1 \dots x_n))$

Példa: legyen $\subseteq$ az új kétváltozós relációszimbólum, és legyen $\varphi(x, y) = \forall z(z \in x \Rightarrow z \in y)$ (vagyis $x \subseteq y$), tehát az új axióma: $\forall x \forall y(x \subseteq y \Leftrightarrow \varphi(x, y))$

II. Új operáció bevezetése:

(a) legyen F új n-változós függvényszimbólum, és legyen $\varphi(x_1 \dots x_n, y)$ (n+1)-változós formula
(b) belátjuk, hogy φ függvénykörülírás, vagyis $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists! y \varphi(x_1 \dots x_n, y)$
(c) új axióma: $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y(y = F(x_1 \dots x_n) \Leftrightarrow \varphi(x_1 \dots x_n, y))$

Példa: legyen P egyváltozós függvényszimbólum, és legyen $\varphi(x, y) = \forall z(z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x)$ (felhasználjuk az előző részben bevezetett $\subseteq$ relációt). $\forall x \exists! y \varphi(x, y)$-ban az egzisztencia a hatványhalmaz-axiómából, az unicitás az extenzionalitasi axiómából következik.

2. Megjegyzések.

$1°$: a nyelvbővítések iterálhatók

$2°$: az új nyelv formulái bizonyíthatóan ekvivalensek a régi nyelv 1-1 formulájával (nem biz.)

$3°$: mostantól bevezetettnek tekintjük:
$\{x, y\}$: páraxiómából
$\bigcup x$: unióaxiómából
$\emptyset$: üreshalmaz-axiómából

1. Állítás. ha x és y halmaz, akkor "$x \cup y$" is halmaz

Bizonyítás. Ha x és y halmaz, akkor a páraxióma miatt $\{x, y\}$ halmaz, az unióaxióma miatt $x \cup y$ is halmaz. $\square$

2. Állítás. Legyen A halmaz, $\varphi(x, p_1 \dots p_n)$ paraméteres formula. Ekkor $B = \{a \in A : \varphi(a, p_1 \dots p_n)\}$ is halmaz. (Azaz az A halmaz formulával megnevezhető részei halmazok. Azaz a φ tulajdonságú elemek egy osztályt adnak, és halmaz $\cap$ osztály $=$ halmaz.)

Bizonyítás. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{ha } \varphi(x, p_1 \dots p_n) \\ \emptyset & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor $B = \bigcup\{f(x) : x \in A\}$ halmaz az unióaxióma miatt (hiszen $f(x) : x \in A$) halmaz a helyettesítési séma miatt). f formulával körülírható:

$$\psi(x, y) = (\varphi(x, p_1 \dots p_n) \wedge \forall z(z \in y \Leftrightarrow z = x)) \vee ((\neg\varphi(x, p_1 \dots p_n)) \wedge \forall z(z \notin y))$$

$\square$

3. Definíció. Legyenek x és y halmazok.

$< x, y >= \{\{x\}, \{x, y\}\}$ *rendezett pár*
R *reláció*, ha R elemei párok
f *függvény*, ha f reláció és $< x, y >, < x, z >\in f \Rightarrow y = z$, jelölése: $f(x) = y$

4. Definíció. Legyen f függvény.

$Dom(f) = \{x : \exists y < x, y >\in f\}$
$Ran(f) = \{y : \exists x < x, y >\in f\}$

3. Állítás. Ha f függvény, akkor $Dom(f)$ és $Ran(f)$ halmazok.

Bizonyítás. $Dom(f)$ egy osztály, ugyanis $Dom(f) = \{x : \exists y < x, y >\in f\}$. De $\bigcup\bigcup f$ egy olyan halmaz, ami f értelmezési tartományát lefedi. Ezért $Dom(f)$ ennek a halmaznak és az előbbi osztálynak a metszete, és így a 2. állítás miatt valóban halmaz. $\square$