2-SAT és véletlen gráfok

Bankó Tibor

2011. január 11.

1. 2-SAT P-beli

Jelöljük az irányíott utat a $\rightsquigarrow$ szimbólummal!

1. Definíció. *Legyen$G$ irányított gráf és legyen$a, b \in V(G)$ csúcsok. Azt mondjuk, hogy $a \sim b$, ha $a \rightsquigarrow b$ és $b \rightsquigarrow a$.*

1. Tétel. *A $\sim$ ekvivalencia reláció. Az ekvivalencia osztályok a gráf erősen összefüggő komponensei.*

2. Definíció. *Legyen φ olyan KNF, melyben a diszkjunkciós komponensek ≤ 2 változót tartalmaznak. Ekkor megadható egy gráf(amit G_φ-vel jelölünk) φ-hez:*

- *a csúcsok: φ változói és ezek negáltjai.*
- *az élek a következő módon vannak definiálva:*
  - *Ha $x \vee y$ elemi diszkjunkció φ-ben, akkor fel kell venni a $\neg x \to y, \neg y \to x$ éleket.*
  - *Ha $\neg x \vee y$ elemi diszkjunkció φ-ben, akkor fel kell venni az $x \to y, \neg y \to \neg x$ éleket.*
  - *Ha $x \vee \neg y$ elemi diszkjunkció φ-ben, akkor fel kell venni a $\neg x \to \neg y, y \to x$ éleket.*
  - *Ha $\neg x \vee \neg y$ elemi diszkjunkció φ-ben, akkor fel kell venni az $x \to \neg y, y \to \neg x$ éleket.*

2. Tétel. *Ekvivalensek.*

(1) φ kielégíthető.

(2) G_φ egyetlen összefüggő komponense sem tartalmaz változót és negáltját egyszerre.

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2) Legyen k olyan értékelés, hogy $k \models \varphi$.

- ha $k \models x$, akkor az x-ből induló utakon szereplő csúcsoknak is igaznak kell lennie k-ban, mert különben az elemi diszkjunkcióknak megfelelő implikációk nem lennének igazak (a KNF miatt minden ilyennek igaznak kell lennie).
- ha $k \not\models x$, akkor az előző pontban leírtak miatt az x-be bejövő utakon szereplő csúcsoknak is hamisnak kell lennie k-ban.

Így (2) már következik, mert változó és negáltja nem veheti fel ugyanazt az értéket, szóval nem lehetnek egy úton.

(2) $\Rightarrow$ (1)

(2) miatt x és $\neg x$ között legfeljebb az egyik irányban van út. Ha egyetlen irányban sincs, akkor fel kell venni egy új $x \to \neg x$ élet. Így elérhető, hogy minden x-re pontosan egy irányba legyen út x és $\neg x$ között. Legyen az így kapott gráf G'_φ és legyen

$$k(x) = \begin{cases} \textit{igaz} & \text{ha van } \neg x \rightsquigarrow x \text{ út,} \\ \textit{hamis} & \text{különben.} \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy az így kapott k esetén $k \models \varphi$.
Ehhez indirekt módon tegyük fel, hogy k egy φ-beli $x \vee y$ diszkjunkciós komponenst nem elégít ki. Tehát $k \not\models x$ és $k \not\models y$, vagyis x és y is hamis. Ekkor k konstrukciója miatt G'_φ-ben léteznie kell $x \rightsquigarrow \neg x$ és $y \rightsquigarrow \neg y$ utaknak valamint a $x \vee y$ diszjunkciós komponens miatt $\neg x \to y, \neg y \to x$ élek. Ekkor $\neg x \rightsquigarrow x$ út is létezik, ami ellentmondás. □

3. Tétel. *A 2-SAT P-ben van.*

Bizonyítás. Az előző tétel alapján látható, hogy elegendő G_φ előállítása valamint az erősen összefüggő komponenseinek megkeresése, tesztelése. Mindkettő megy polinom idő alatt. □

2. Véletlen gráfok

3. Definíció. *A gráfok nyelvének szokásos jelölését használva megadjuk a T_R formulahalmazt. Legyen*

$$T_R = \{\forall x \neg E(x,x), \forall x \forall y (E(x,y) \Rightarrow E(y,x))\} \cup \{\varphi_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}, \textit{ahol}$$

$\varphi_{n,m} = \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_m \exists z\{x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_m$ *páronként különböző* $\wedge$
$\wedge(\wedge_{i=1}^{n} E(x_i, z)) \wedge (\wedge_{i=1}^{m} \neg E(y_i, z))\}$

4. Tétel. *T_R-nek van modellje.*

Bizonyítás. (I)

> **5. segédtétel.** *Ha G véges gráf, akkor van véges G' gráf úgy, hogy G feszített része G'-nek és ha $X, Y \subseteq V(G), X \cap Y = \emptyset$, akkor van $z \in V(G')$, hogy minden $a \in X, b \in Y : E(a, z), \neg E(b, z)$.*
>
> *Bizonyítás.* G-nek minden páronként csúcsdiszjunkt részhalmazpárjához fel kell venni 1 új csúcsot, amit a megfelelő módon össze kell kötni a pontjaikkal. □

Legyen $V_1 = \{\emptyset\}, \quad E_1 = \emptyset, \quad G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$.

Ekkor megadhatjuk gráfok sorozatát, az előző segédtétel alapján, oly módon, hogy $G_{n+1} = G'_n$ legyen.

Végül legyen $V^* = \cup_{n \in \mathbb{N}} V_n, \quad E^* = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n, \quad G^* = \langle V^*, E^* \rangle$.

Megmutatjuk, hogy G^* jó, vagyis $G^* \models T_R$.

Ugyanis tetszőleges $X, Y \subset V^*$ véges részhalmazra, ahol $X \cap Y = \emptyset$, a konstrukcióból adódóan van olyan n, hogy $X, Y \subseteq V_n$, így V_{n+1}-ben van olyan z, amire:

$$\forall x \in X E(x, z) \text{ és } \forall y \in Y \neg E(y, z).$$

□

Bizonyítás. (II)

Legyen $V = \mathbb{N}$ ha $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$, akkor legyen $i^* = \min(i, j), \quad j^* = \max(i, j)$

és legyen (i, j) él, ha j^* bináris alakjában az i^* helyen 1 áll(a pozíciókat 0 -tól számozzuk). Látható, hogy ha (i, j) él, akkor (j, i) is él.

Például: a $(2, 6)$ él, mert $6 = 110$ a kettes számrendszerben, és a 2. helyen 1 áll.

Az így elkészített $G\langle V,E\rangle$ gráf modellje T_R-nek, mert tetszőleges $X,Y\subset$ $\subset\mathbb{N}, X\cap Y=\emptyset$ esetén legyen $Y>X$. Ekkor van z, hogy minden X-beli elemmel és egyetlen Y-beli sincs összekötve. Ilyen z-t például úgy kaphatunk, hogy a bináris alakjában minden X-beli pozícióba 1-t írunk, míg minden Y-beli pozícióba 0-t.

□

4. Definíció. *k csúcsú véletlen gráf:*
Olyan gráf, melynek k pontja van és a csúcspárok között egymástól függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel kerülnek behúzásra az élek.

6. tétel. *Legyen G_k egy k csúcsú véletlen gráf. Ha n,m rögzített, akkor* $\lim_{k\to\infty}P(G_k\models\varphi_{n,m})=1$.

Bizonyítás. Az ellentett esemény valószínűségét vizsgáljuk meg.

$$P(G_k\not\models\varphi_{n,m})\leq\binom{k}{n}\binom{k-n}{m}(1-\frac{1}{2^{n+m}})^{k-(m+n)}\leq k^{m+n}(1-\frac{1}{2^{n+m}})^{-(n+m)}(1-\frac{1}{2^{n+m}})^{k}$$

Az első egyenlőtlenség abból adódik, hogy így egy olyan gráfot, mely nem modellje $\varphi_{n,m}$-nek, esetleg többször is leszámlálunk. A harmadik tényezője azt fejezi ki, hogy a kiválasztott n és m pontokon kívüli minden pontja "rossz" kell, hogy legyen. A második egyenlőtlenség végén kapott szorzat első tényezője k polinomja, a második k-ban konstans, míg a harmadik k-nak egy exponenciális függvénye, egynél kisebb alappal. Így igaz, hogy:

$$lim_{k\to\infty}P(G_k\not\models\varphi_{n,m})=0.$$

□