

1. igazoljuk, hogy ha az invertálható A mátrixnak $\underline{v}$ sajátvektora μ sajátértékkel, akkor $\mu \neq 0$ és $\underline{v}$ sajátvektora A^{-1} -nek $\frac{1}{\mu}$ sajátértékkel.

2. Adjuk meg a következő mátrixok spektrálfelbontását:

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad (b) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ sajátértékeit és sajátvektorait.

4. (Múlt heti 5-ös feladat.) Oldjuk fel a következő lineáris rekurziót: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ és ha $n \geq 2$, akkor $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$.

5. Legyen $n \in \mathbb{N}$ páratlan, és legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Alább használhatjátok, amit kalkulusból tanultatok!

(a) Igazoljuk, hogy A -nak van (valós) sajátértéke.

(b) Igazoljuk, hogy ha $\det(A) > 0$, akkor A -nak van pozitív (valós) sajátértéke.

6. Rajzoljuk fel az $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1-i & i \end{pmatrix}$ mátrix soraihoz és oszlopaihoz tartozó Gersgorin-köröket. Ezek alapján adjunk becslést A (komplex) sajátértékeinek abszolútértékére.

7. Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *diagonálisan domináns* mátrix, azaz minden $i \leq n$ -re $|(A)_{ii}| > \sum_{j \neq i} |(A)_{ij}|$.
Igazoljuk, hogy A invertálható.