

Definíció. Legyen K test, V vektortér K felett. V *duális tere*

$$V^* = \{f : f \text{ lineáris leképezés } V\text{-ből } K\text{-ba}\}.$$

A duális tér más tantárgyakból sokszor szóba fog még kerülni.

- Igazoljuk, hogy V^* (a függvények szokásos összeadásával, számmal szorzásával) is vektortér K felett.
 - Tegyük fel, hogy V véges dimenziós és $\{e_1, \dots, e_n\}$ bázis V -ben. Igazoljuk, hogy $V = \bigoplus_{i=1}^n \text{span}\{e_i\}$.
 - Minden $j \leq n$ -re legyen f_j a $\text{span}\{e_j\}$ -re való vetítés $V = \bigoplus_{i=1, i \neq j}^n \text{span}\{e_i\}$ mentén. Igazoljuk, hogy $\{f_j : j \leq n\}$ bázis V^* -ban.
 - Igazoljuk rövid érveléssel, hogy V és V^* izomorfak. Igazoljuk ezt úgy is, hogy megadunk köztük egy "természetes" izomorfizmust.
 - Legyen $V = \mathbb{R}[x]$ a valós együtthatós polinomok **vektortere**, és minden $s = \langle s_i : i \in \mathbb{N} \rangle \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ -re (végtelen hosszú valós számsorozatra) legyen $f_s : V \rightarrow \mathbb{R}$, $f_s\left(\sum_{i=0}^n c_i x^i\right) = \sum_{i=0}^n s_i c_i$. Mutassuk meg, hogy minden s -re $f_s \in V^*$. Ezek alapján
 - Mennyi $\dim(V)$ és mennyi $\dim(V^*)$?
 - Izomorf-e V és V^* ?
 - Működik-e ugyanez az érvelés, ha $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} W$ tetszőleges, megszámlálhatóan végtelen tagú direkt összeg (amiben az összeadandók ugyanazok)?
 - Adott $\underline{a} \in V$ -re legyen $g_{\underline{a}} \in (V^*)^*$ az $\underline{a}$ -t behelyettesítő függvény: $g_{\underline{a}}(f) = f(\underline{a})$. Igazoljuk, hogy a $\varphi : V \rightarrow (V^*)^*$, $\varphi(\underline{a}) = g_{\underline{a}}$ injektív homomorfizmus (azaz beágyazás) akkor is, ha $\dim(V)$ végtelen. Igazoljuk, hogy ha $\dim(V)$ véges, akkor φ izomorfizmus.
- Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ -ben (a végtelen hosszú valós számsorozatok szokásos vektorterében) a mértani sorozatok halmaza lineárisan független. Ezek alapján mennyi $\dim(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$?
- Legyen V vektortér, $f : V \rightarrow V$ lineáris leképezés és $\underline{a} \in V$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $f^{(0)} = Id$ és $f^{(n)} = f \circ f \circ \dots \circ f$ (a jobboldalon n darab f van).
 - igazoljuk, hogy $U = \text{span}\{f^{(n)}(\underline{a}) : n \in \mathbb{N}\}$ invariáns altere f -nek.
 - Igazoljuk, hogy az előbbi U a legkisebb olyan $\underline{a}$ -t tartalmazó altere V -nek, mely invariáns f -re, azaz igazoljuk, hogy ha $W \subseteq V$ olyan altér, mely invariáns f -re és $\underline{a} \in W$, akkor $U \subseteq W$.
- Legyen V vektortér K felett, legyen $U \subseteq V$ altér, és legyen $f : V \rightarrow V$ lineáris leképezés. Igazoljuk, hogy az alábbi esetekben U invariáns altere f -nek.
 - $\text{Im}(f) \subseteq U$;
 - $U \subseteq \text{Ker}(f)$;
 - f -nek vannak olyan (nem feltétlenül azonos sajátértékekhez tartozó) sajátvektorai, melyek generálják U -t. Speciális esete-e ennek e feladat korábbi kérdéseinek valamelyike?
- Az alábbi mátrixok közül melyekre igaz, hogy (valamilyen bázisban) egy vetítés mátrixai?
 - Az alábbi mátrixok közül melyek hasonlóak $\mathbb{R}$ felett? A hasonlóakra adjuk meg az átkonjugáló mátrixot. (Használjuk a determinánsok szorzástételét, és azt, hogy hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjai, és így sajátértékeik azonosak).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Legyen V a legfeljebb 2-odfokú, $\mathbb{R}$ feletti polinomok vektortere, és legyen $f : V \rightarrow V$, $f(p) = (x-1)p'$ (itt p' a p deriváltja). Határozzuk meg f összes sajátértékét, és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat.

7. Legyen $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg A sajátértékeit és sajátvektorait.

8. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Határozzuk meg az A^n hatványokat minden $n \in \mathbb{N}$ -re.

(b) Tegyük fel, hogy B hasonló A -hoz. Mit mondhatunk B^n -ről?

9. Legyen V a $\mathbb{Z}_2$ feletti 2025-dimenziós vektortér, legyen $F \subseteq V$ lineárisan független vektorhalmaz és legyen $k = |F|$.

(a) Hány eleme van $\text{span}(F)$ -nek?

(b) Hány darab olyan vektor van V -ben, mely lineárisan független F -től?

(c) Hány módon lehet F -t kiterjeszteni V egy bázisává?

(d) Hány módon lehet V -t két altere direkt összegére bontani? (V dimenziója azért páratlan, hogy ez a kérdés picit könnyebb legyen; ha van kedved, gondold meg 2026 dimenzióra is, nem sokkal nehezebb).