

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. (a) Igazold, hogy ha az $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mátrixra teljesül, hogy $(\operatorname{tr}(A))^2 - 4\det(A) \neq 0$, akkor A diagonalizálható.
(b) Fogalmazz meg, majd bizonyíts be egy analóg állítást valós elemű (2×2) -es mátrixokra, mely $\mathbb{R}$ feletti diagonalizálhatóságra ad elégséges feltételt.

2. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Határozd meg A^2 sajátértékeit és sajátvektorait.
(b) Az előző pont segítségével határozd meg A sajátértékeit, sajátvektorait, és A összes sajátértékének algebrai és geometriai multiplicitását.
3. Legyenek $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- (a) Igazold, hogy A és B hasonló mátrixok.
(b) Adj meg egy $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixot, melyre $A = P^{-1}BP$.