

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Legyen K tetszőleges test. Igazold, hogy

$$K[x] \text{ mint vektortér, izomorf } \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} K\text{-val.}$$

2. Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a konvergens (végtelen hosszú) valós számsorozatok vektortere $\mathbb{R}$ felett és legyen $\lim \in C^*$ az a függvény, mely C minden eleméhez a határértékét rendeli (azaz $\lim(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$). Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ -re $\pi_n \in C^*$, $\pi_n(s) = s_n$ és legyen $P \subseteq C^*$ a $\text{span}\{\pi_n : n \in \mathbb{N}\}$ altér. Igazold, hogy $\lim \notin P$.

3. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Határozd meg A sajátértékeit és sajátvektorait.
- (b) Adj meg egy A -hoz hasonló D diagonális mátrixot, és add meg az átkonjugáló P mátrixot.
- (c) Ezek alapján határozd meg az A^n hatványokat minden $n \in \mathbb{N}$ -re (elég $P^{-1}D^nP$ alakban).

4. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

- (a) Igazold, hogy A diagonalizálható (anélkül, hogy A -t tényleg diagonalizálnád).
- (b) Az előző rész alapján fogalmazd meg egy feltételt a főátlóra, mely elégséges ahhoz, hogy egy (felső) háromszögmátrix diagonalizálható legyen. Bizonyítsd is be, hogy feltételed valóban elégséges.