

1. Feladatlap

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Add meg az alábbi ellentmondásos lineáris egyenletrendszer összes optimális közelítő megoldását:

$$x + y = 1, \quad x - y = 0, \quad 2x + y = 2.$$

2. Igazold, hogy tetszőleges (nem feltétlenül négyzetes) A mátrixra $AA^T(AA^T)^+A = A$.

3. Legyen K a konvergens valós számsorozatok vektortere:

$$K = \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : s \text{ konvergens}\}$$

és legyen $\mathbb{R}^1$ a valós test feletti 1-dimenziós vektortér. Igazold, hogy

- (a) $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^1$ valódi altere K -nak,

- (b) K valódi altere $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^1$ -nak

(Ismertnek tekintjük, ezért nem kell igazolnod, hogy ezek tényleg vektorterek.)

4. Legyen V a legfeljebb 6-odfokú valós együtthatós polinomok vektortere, és legyen

$$\varphi : V \rightarrow V, \quad \varphi(p) = p(6) \cdot x^6.$$

Határozd meg φ sajátértékeit és sajátvektorait.

5. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Diagonalizáld A -t és add meg az A^{2026} mátrixot.

6. Oldd fel a következő lineáris rekurziót: $a_0 = 2$, $a_1 = 4$, ha $n \geq 2$, akkor $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$.

* * * * *

7. Az $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrixról tudjuk, hogy $\det(A) = 30$, $\text{tr}(A) = 10$ és $\lambda_1 = 3$ sajátértéke neki. Add meg A összes további sajátértékét.

Segédlet (rajta lesz az igazi ZH feladatlapján).

1. Ha A teljes oszloprangú mátrix, akkor $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.
2. Moore-Penrose axiómák: $AXA = A$, $XAX = X$, $(AX)^T = AX$, $(XA)^T = XA$.

Megjegyzések.

1. Az 1. ZH anyaga az, ami az első 5 héten (2026 márc. 19-ig) előadáson és gyakorlaton elhangzott/elhangzik. A ZH-ban lehetnek olyan típusú feladatok, melyek ebben a mintaZH-ban nem szerepelnek.
2. A minta-ZH feladatai mind újak, hogy legyen muníció gyakorolni. A ZH-n 6 feladat lesz, a mintaZH-ban az utolsó, 7. feladat midig csak azért van, hogy legyen min gyakorolni...
3. Az első 5 adag házi feladat (közeli variánsai, vagy egyes részletei) közül szerepelni fog 3 darab a ZH-ban (mindegyik házi feladat szóba jöhet).

2. Feladatlap

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Számold ki a Moore-Penrose inverzét: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Igazold, hogy tetszőleges (nem feltétlenül négyzetes) A mátrixra $A^+ = A^T(AA^T)^+$.
(Útmutatás: az előző minta-feladatlap 2. feladata alapján ismertnek tekintheted, ebben a feladatban indoklás nélkül felhasználhatod, hogy $AA^T(AA^T)^+A = A$.)
3. legyen $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Igazold, hogy φ egy merőleges vetítés.
4. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ az a mátrix, melynek minden eleme 1. Határozd meg A összes sajátértékét. Igazold, hogy A diagonalizálható és adj meg egy A -hoz hasonló diagonális mátrixot.
5. Mi a nyoma és determinánsa annak a (3×3) -as valós mátrixnak, melynek 1 és $2+i$ is sajátértéke?
6. Legyen A komplex-elemű mátrix, F az A soraihoz, G az A oszlopaihoz tartozó Gersgorin-körök uniója. Igazold, hogy F és G metszete nem üres.
* * * * *
7. Add meg az $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix spektrálfelbontását.

Segédlet (rajta lesz az igazi ZH feladatlapján).

1. Ha A teljes oszloprangú mátrix, akkor $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.
2. Moore-Penrose axiómák: $AXA = A$, $XAX = X$, $(AX)^T = AX$, $(XA)^T = XA$.

Megjegyzések (pontosan ugyanazok, mint az előző oldalon).

1. Az 1. ZH anyaga az, ami az első 5 héten (2026 márc. 19-ig) előadáson és gyakorlaton elhangzott/elhangzik. A ZH-ban lehetnek olyan típusú feladatok, melyek ebben a mintaZH-ban nem szerepelnek.
2. A minta-ZH feladatai mind újak, hogy legyen muníció gyakorolni. A ZH-n 6 feladat lesz, a mintaZH-ban az utolsó, 7. feladat mindig csak azért van, hogy legyen min gyakorolni...
3. Az első 5 adag házi feladat (közeli variánsai, vagy egyes részletei) közül szerepelni fog 3 darab a ZH-ban (mindegyik házi feladat szóba jöhet).