Algebra-1 **8. feladatlap megoldásvázlatokkal** **2026. okt. 28.**

1. Legyen $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Q} - \{0\},\ b \in \mathbb{Q} \right\}$ (csoportművelet: a mátrixszorzás). Jelölje G' a G kommutátor-csoportját. Igazoljuk, hogy

   (a) $\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Útmutatás: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Megoldás. Egyszerű számolás.

   (b) $G' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Q} \right\}$.

   Megoldás. Legyen Q^* a nemnulla racionális számok multiplikatív csoportja, és legyen $\varphi : G \to Q$, $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a$. Legyen továbbá $K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Q} \right\}$. Vegyük észre, hogy $ker^V(\varphi) = K$. Mivel φ szürjektív, ezért a homomorfizmustétel miatt $G/ker^V(\varphi) = im(\varphi) = Q$, és Q kommutatív. Ezért $G' \subseteq ker^V(\varphi) = K$. Továbbá az (a) rész miatt K minden eleme kommutátora két G-beli mátrixnak, ezért $K \subseteq G'$. Ezek szerint $G' = K$.

   (c) Határozzuk meg a G/G' faktorcsoportot izomorfia erejéig!

   Megoldás. A (b) rész szerint $G/G' = G/K = G'/ker^V(\varphi) = im(\varphi) = Q$.

2. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Legyen a D_n diéder-csoportban r a pozitív irányú $\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatás, és s egy tükrözés. A kommutátort az $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ képlettel definiáljuk. Igazoljuk, hogy minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén
$$[s, r^k] = r^{-2k}.$$

   Megoldás. Legyen t az a tengely-egyenes, amire s tükröz. Ha n páratlan, akkor az t átmegy a szabályos n-szög egyik csúcsán, ha n páros, akkor t a szabályos n-szög egyik oldalfelező merőlegese. Csak a páratlan n esetét részletezzük, a páros n esete hasonlóan kezelhető. Számozzuk meg a szabályos n-szög csúcsait úgy, hogy az a csúcs legyen a 0-dik, melysen t átmegy, a többi számot 0-ból indulva és az óramutató járásával fordítva haladva sorban osszuk ki. Ekkor tetszőleges a csúcsra $s(a) = n - a, r(a) = a + 1\ (mod\ n)$ éa $r^{-1}(a) = a - 1\ (mod\ n)$ lesz. Ezért tetszőleges a csúcsra

   $$[s, r^k](a) = sr^k s^{-1} r^{-k}(a) = sr^k s^{-1}(a-k) = sr^k(n-a+k) = s(n-a+2k) = n-(n-a+2k) = a-2k = r^{-2k}(a).$$

   Mivel ez minden a-ra teljesül, ezért valóban $[s, r^k] = r^{-2k}$.

3. Legyenek G_1, G_2 csoportok. Igazoljuk, hogy $Z(G_1 \times G_2) \cong Z(G_1) \times Z(G_2)$.

   Megoldás. Először tegyük fel, hogy $\langle a, b\rangle \in Z(G_1 \times G_2)$. Ekkor $\forall c \in G_1, d \in G_2$-re

   $$G_1 \times G_2\text{-ben számolva:} \qquad \langle ac, bd\rangle = \langle a, b\rangle\langle c, d\rangle = \langle c, d\rangle\langle a, b\rangle = \langle ca, db\rangle.$$

   Az első koordináták egyenlőségéből $ac = ca$; mivel c tetszőleges volt, ezért $a \in Z(G_1)$. A második koordináták egyenlőségéből $bd = db$; mivel d tetszőleges volt, ezért $b \in Z(G_2)$. Tehát $\langle a, b\rangle \in Z(G_1) \times Z(G_2) \rightsquigarrow Z(G_1 \times G_2) \subseteq Z(G_1) \times Z(G_2)$. A fordított tartalmazás hasonlóan látható be.

4. Legyen G olyan csoport, amelyre $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_{15}$. Igazoljuk, hogy G Abel-csoport.

   1. Megoldás. Tanultuk, hogy ha a $Z(G)$ szerinti faktor ciklikus, akkor G kommutatív; Z_{15} ciklikus.

   2. Megoldás. Az előadáson is elhangzott bizonyítást gondoljuk át újra (multiplikatív írásmódot alkalmazunk). $G/Z(G)$ ciklikus, mondjuk az $aZ(G)$ mellékosztály generálja. Ez azt jelenti, hogy $G/Z(G)$ minden eleme (azaz $Z(G)$ minden baloldali mellékosztálya) $a^k Z(G)$ alakú. Mivel $Z(G)$

baloldali mellékosztályai G egy partícióját adják, ezért minden $b \in G$ benne van $Z(G)$ valamelyik baloldali mellékosztályában $\rightsquigarrow$ van k és $z_b \in Z(G)$, hogy $b = a^k z_b$ hasonlóan, ha $c \in G$ tetszőleges, akkor van l, $z_c \in Z(G)$, hogy $c = a^l z_c$. Továbbá z_b és z_c mindenkivel kommutál, ha egyszer a centrumban vannak. Ezért

$$bc = a^k z_b a^l z_c = a^k a^l z_b z_c = a^l (a^k z_b) z_c = a^l z_c a^k z_b = cb,$$

vagyis G tényleg Abel-csoport.

5. A véges G Abel-csoporta $|G| = p_1 \dots p_n$ (a jobboldal páronként különböző prímszámok szorzata). Igazoljuk, hogy G ciklikus.

   Megoldás. A véges Abel-csoportok alaptétele gyenge alakja szerint G prímhatvány-rendű csoportok (azaz p-csoportok) direktszorzata. A direktszorzat számossága a tényezői számosságának szorzata, ezért a felbontás:

   $$G \cong G_{p_1} \times ... \times G_{p_n},$$

   ahol minden i-re $|G_{p_i}| = p_i \rightsquigarrow$ mindegyik G_{p_i} ciklikus (mert prímrendű, így Lagrange tétele miatt mindegyik G_{p_i}-t az egységelemén kívül mindegyik eleme generálja). Legyen $a_i \in G_{p_i}$ a G_{p_i} egy generátora (tetszőleges eleme, ami nem az egységeleme), és legyen

   $$b = \langle a_1, ...a_n \rangle \in G_{p_1} \times ... \times G_{p_n}.$$

   Állítjuk, hogy b generálja $G_{p_1} \times ... \times G_{p_n}$-et (ez elég, mert ekkor b mutatja, hogy $G_{p_1} \times ... \times G_{p_n}$ egyetlen elemmel genrálható, azaz ciklikus). Legyen r a b rendje: $b^r = \langle e, ..., e \rangle$. Az első koordinátából $p_1 | r$, a másodikból $p_2 | r$, stb. Tehát $p_1 \cdot ... \cdot p_n | r$. De $r \leq |G|$, ezért $p_1 \cdot ... \cdot p_n = r$ és emiatt b valóban generálja $G_{p_1} \times ... \times G_{p_n}$-t.

6. Legyen G véges Abel-csoport, ... **Megoldás.** Legközelebb.

7. Legyen G véges csoport, legyen p prímszám és legyen $S \leq G$ egy p-Sylow részcsoport. Igazoljuk, hogy $S \triangleleft G \iff G$-nek S az egyetlen p-Sylow részcsoportja.

   Megoldás. Legyen $S \leq G$ egy p-Sylow részcsoport (ilyen van Sylow I tétele szerint). Sylow III tétele szerint a p-Sylow részcsoportok mind S konjugáltjai. Ezért 1 darab p-Sylow részcsoport van $\iff S$ konjugálás szerinti pályája 1-elemű $\iff S$-et minden konjugálás fixen hagy $\iff S \triangleleft G$.

8. Legyen G véges csoport és legyen p prímszám. Igazoljuk, hogy G ősszes p-Sylow részcsoportjainak metszete G egy normálosztója.

   Megoldás. Legyen $S_1, ..., S_n$ a G összes p-Sylow részcsoportjának egy felsorolása. Az világos, hogy $\cap_i S_i \leq G$, ezért csak azt kell meggondolni, hogy $\cap_i S_i$-t az összes konjugálás fixen hagyja. Ehhez legyen $a \in G$ tetszőleges. Figyeljük meg $(a^{-1} S_1 a), ..., (a^{-1} S_n a)$ ismét az összes p-Sylow részcsoport egy felsorolása. Ezért

   $$a^{-1} \Big(\bigcap_i S_i \Big) a = \bigcap_i \Big(a^{-1} S_i a \Big) \overset{(*)}{=} \bigcap_j S_j$$

   mert $(*)$ mindkét oldalán az összes p-Sylow réstcsoport metszetét képezzük. Vagyis az a-val való konjugálás fixen hagyja a metszetet. De $a \in G$ tetszőleges volt, ezért $\cap_i S_i \triangleleft G$.

9. A véges G csoportot **nilpotensnek** nevezzük, ha minden Sylow-részcsoportja normálosztó. Minden $p | |G|$ prímszámra legyen $S_p \leq G$ egy p-Sylow részcsoport. Igazoljuk, hogy nilpotens G-re teljesülnek a következők:

   (a) ha $p \neq q$, akkor $S_p \cap S_q = \{e\}$ (ez tetszőleges G-re igaz, nem csak nilpotensekre);

   Megoldás. Ha $a \in S_p \cap S_q$, akkor Lagrange tétele miatt a rendje osztaná p-t és q-t is $\rightsquigarrow a$ rendje $= 1 \rightsquigarrow a = e$.

(b) ha $|G|$-nek van két különböző prímosztója, akkor $\{S_p : p| |G|\}$ és $\{G/S_p : p| |G|\}$ szeparáló rendszerek;

Megoldás. Legyen $a \neq b \in G$. Ekkor $b^{-1}a$ rendje nem 1, ezért $b^{-1}a$ rendjének van egy q prímosztója. A feltétel miatt G-nek van egy q-tól eltérő p prímosztója. Ellentmondást keresve tegyük fel, hogy $b^{-1}a \in S_p$. Ekkor Lagrange tétele miatt $|b^{-1}a| \mid |S_p|$, de itt a baloldal osztható q-val, a jobboldal meg egy p-hatvány, ez az ellentmondás mutatja, hogy $b^{-1}a \notin S_p \rightsquigarrow aS_p \neq bS_p \rightsquigarrow$ az S_p normálosztónak megfelelő kongruencia szeparálja a-t és b-t. Hasonlóan igazolható, hogy $\{G/S_p : p| |G|\}$ is szeparáló rendszer.

(c) $G \cong \prod_{p| |G|} S_p$ (azaz a nilpotens csoportok is izomorfak p-csoportok direkt-szorzatával).

Megoldás. Ha $|G|$ egy prímhatvány, vagyis G maga egy p-csoport, akkor - mivel izomorf sajátmagával - G izomorf p-csoportok egy 1-temyezős direktszorzatával. Ha G nem p-csoport, akkor $|G|$-nek van legalább 2 különböző prímosztója, így alkalmazható a (b) rész. A (b) rész és a szeparációs tétel miatt G beágyazható $\prod_{p| |G|} G/(G/S_p)$-be. Megmutatható, hogy $G/(G/S_p) \cong S_p$, ezért G beágyazható $\prod_{p| |G|} S_p$-be. De ez utóbbi direktrszorzat számossága épp annyi, mint G számossága, ezért a beagyazás szürjektív, és így izomorfizmus is.

10. Legyen p prímszám, és legyen G egy p-csoport. Igazoljuk, hogy $|Z(G)| \geq p$.

Megoldás. Írjuk fel az osztályegyenletet:

$$(*) \quad |G| = |Z(G)| + k_1 + ... + k_r,$$

ahol a k_i-k az 1-nél több elemet tartalmazó konjugált-osztályok méretei (tehát minden i-re $1 < k_i$). Tudjuk még, hogy minden i-re $k_i| |G|$ és - mivel G egy p-csoport - van n, hogy $|G| = p^n$. Ezek szerint mindegyik k_i 1-nél nagyobb osztója p^n-nek $\rightsquigarrow p|k_i$. Tehát $(*)$ baloldala osztható p-vel, és $p|(k_1 + ... + k_r)$. Ezért $p| |Z(G)|$. De $|Z(g)| \geq 1$, hisz $e \in Z(G)$. Emiatt $p \leq |Z(G)|$.

11. Igazoljuk, hogy nincs n-edrendű egyszerű csoport, ha (a) $n = 30$, (b) $n = 100$.

Megoldás. Csak (b)-t részleteztük. Legyen a G csoport rendje 100 és legyen n_5 a G 5-Sylow részcsoportjainak száma. Egyrészt Sylow II tételei miatt

$$(*) \quad n_5 \equiv 1 \ (mod\ 5).$$

Másrészt legyen $S \leq G$ a G egy 5-Sylow részcsoportja (ilyen van Sylow I, vagy akár Sylow II tétele miatt is).Továbbá Sylow III tétele miatt n_5 egyenlő S pályája méretével a konjugálás szerinti hatásnál. Az orbit-stabilizátor tétel miatt ez a pályaméret épp S stabilizátorának indexe. De S-et saját elemeivel konjugálva S fixen marad, ezért $S \leq Stab(S) \rightsquigarrow [G : Stab(S)] \leq [G : S]$. Továbbá, mivel $5^2|100$, de $5^3 \not| 100$. ezért G minden 5-Sylowjának, S-nek is, 25 eleme ven. Ezek szerint

$$n_5 = [G : Stab(S)] \leq [G : S] = \frac{|G|}{|S|} = \frac{100}{25} = 4.$$

Azt kaptuk, hogy $1 \leq n_5 \leq 4$ és $(*)$ szerint $n_5 \equiv 1 \ (mod\ 5)$ Ebből $n_5 = 1$, azaz S az egyetlen 5-Slow részcsoport G-ben. Ezért a 7. feladat szerint $S \lhd_{\text{nemtrivi}} G \rightsquigarrow G$ nem egyszerű.

A feladat (a) részéhez: legyen a G csoport 30 elemű és legyen n_3, illetve n_5 a G 3-Sylow és 5-Sylow részcsoportjainak száma. Ha G egyszerű lenne, akkor (a 7. feladat miatt) n_3 és n_5 sem lehetne 1. A (b) részhez hasonló érvelésekkel azt kapnánk, hogy a 3-Sylow illetve 5-Sylow részcsoportokban összesen több 3-adrendű + 5-ödrendű elem lenne, mint $30 = |G|$, ez nyilván lehetetlen.

A feladatlap letölthető innen:
`https://users.renyi.hu/~sagi/algebra1-2026osz-letoltesek.html`