1. RöpZH...

   (a) Legyen G csoport. Igazold, hogy ha $a, b \in G$ konjugáltak G-ben, akkor azonos a rendjük.

   1. Megoldás. Ha a és b konjugáltak, akkor van olyan belső automorfizmus, mely a-t b-re képezi. Mivel a belső automorfizmusok automorfizmusok, ezért megőrzik az $x^r = e$ alakú azonosságokat is, tehát a akkor és csak akkor elégít ki egy ilyet, ha b is $\rightsquigarrow a$ és b rendje azonos.

   2. Megoldás. Mivel a és b konjugáltak, ezért van $c \in G$, hogy $b = c^{-1}ac$. Legyen a rendje r. Ekkor
   $$b^r = c^{-1}ac \cdot c^{-1}ac \cdot \ldots \cdot c^{-1}ac = c^{-1}a^r c = c^{-1}c = e.$$
   Emiatt $|b| \leq r = |a|$. Hasonlóan, (a és b szerepét felcserélve) adódik $|a| \leq |b|$.

   (b) Legyen
   $$G = \{f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : \ f(x) = ax + b, \ a, b \in \mathbb{Q}, a \ \neq 0\} \quad \leq \quad Sym(\mathbb{Q})$$
   a $\mathbb{Q}$-n értelmezett $f(x) = ax + b$ alakú függvényekből (mint $\mathbb{Q}$ permutációiból) álló csoport. Igazold, hogy a G csoport 2-tranzitív!

   1. Megoldás. Legyen $a_1 \neq a_2 \in \mathbb{Q}$ és $b_1 \neq b_2 \in \mathbb{Q}$; olyan $f \in G$ függvényt kéne találnunk, melyre
   $$(*) \quad f(a_1) = b_1 \text{ és } f(a_2) = b_2.$$
   Lagrange interpolációs tétele szerint van olyan elsőfokú $f \in \mathbb{Q}[x]$, melyre $(*)$ teljesül, és mivel $b_1 \neq b_2$, ezért f főegyütthatója nem nulla. Tehát $f \in G$ megfelelő.

   2. Megoldás. Vegyük fel $f(x) = ax + b$-t ismeretlen együtthatókkal. $(*)$-ot behelyettesítve a-ra és b-re lineáris egyenletrendszert kapunk, ennek emgoldása adja G megfelelő elemét.

2. Igazoljuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}, \ n \geq 3$, akkor az A_n alternáló csoport $(n-2)$-tranzitív.

   Megoldás. Legyenek $a_1, \ldots, a_{n-2} \in [n]$ páronként különbözők és $b_1, \ldots, b_{n-2} \in [n]$ páronként különbözők. Nyilvánvaló, hogy van $\sigma \in Sym([n])$, melyre $\sigma(a_1) = b_1 \ldots \sigma(a_{n-2}) = b_{n-2}$.
   1. eset: $\sigma \in A_n$. Ebben az esetben készen vagyunk.
   2. eset: $\sigma \notin A_n$. Ebben az esetben legyen c és d a b_i-k közül kimaradó két elem. Mivel minden transzpozíció páratlan, ezért $(cd)\sigma \in A_n$, másrészt $(cd)\sigma(a_1) = b_1 \ldots (cd)\sigma(a_{n-2}) = b_{n-2}$, készen vagyunk. Választhattuk volna c és d-t az a_i-k közül kimaradó két elemnek, ebben az esetben $\sigma(cd)$ adná a megoldást.

3. Legyen G csoport. Jelölje $Inn(G)$ a G belső automorfizmusai halmazát, $Aut(G)$ pedig G automorfizmus-csoportját.

   (a) Igazoljuk, hogy $Inn(G) \leq Aut(G)$, sőt $Inn(G) \lhd Aut(G)$.

   Megoldás. Adott $a \in G$-hez tartozó belső automorfizmus: $\varphi_a(x) = a^{-1}xa$.
   - $Id = \varphi_e(x) \in Inn(G)$.
   - $Inn(G)$ zárt a kompozícióra: ha $a, b \in G$ akkor
     $$(\varphi_a \circ \varphi_b)(x) = a^{-1}b^{-1}xba = (ba)^{-1}x(ba) = \varphi_{ba} \in Inn(G).$$
   - $Inn(G)$ zárt az inverzképzésre: ha $a \in G$, akkor
     $$\varphi_a(x) = y \Leftrightarrow a^{-1}xa = y \Leftrightarrow x = aya^{-1} \Leftrightarrow x = \varphi_{a^{-1}}(y).$$

   Mivel $\varphi_a(x) = y \Leftrightarrow x = (\varphi_a)^{-1}(y)$, ezért $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{a^{-1}} \in Inn(G)$.

- $Inn(G)$ zárt az $Aut(G)$ elemeivel való konjugálásra, mert legyen $\alpha \in Aut(G)$ és legyen $a \in G$. Ekkor

$$(\alpha^{-1} \circ \varphi_a \circ \alpha)(x) = \alpha^{-1}(a^{-1}\alpha(x)a) = \alpha^{-1}(a^{-1})\alpha^{-1}(\alpha(x))\alpha^{-1}(a) =$$

$$(\alpha^{-1}(a))^{-1}x\alpha^{-1}(a) = \varphi_{\alpha^{-1}(a)} \in Inn(G).$$

(b) Ha $a \in G$, akkor az a-hoz tartozó belső automorfizmus $\varphi_a(x) = a^{-1}xa$. Legyen $\Psi : G \to Aut(G)$, $\Psi(a) = \varphi_{a^{-1}}$. Igazoljuk, hogy Ψ homomorfizmus és $Ker^V(\Psi) = Z(G)$.

Megoldás. Legyen $a, b \in G$.

- $\Psi(e) = \varphi_e = Id$.
- $\Psi(ab) = (ab)x(ab)^{-1} = abxb^{-1}a^{-1} = (\varphi_{a^{-1}} \circ \varphi_{b^{-1}})(x) = \Psi(a) \circ \Psi(b)$.
- $\Psi(a^{-1}) = \varphi_a = (\varphi_{a^{-1}})^{-1} = (\Psi(a))^{-1}$.
- $a \in Ker^V(\Psi) \Leftrightarrow \Psi(a) = Id \Leftrightarrow \varphi_{a^{-1}} = Id \Leftrightarrow (\forall x)(axa^{-1} = x) \Leftrightarrow (\forall x)(ax = xa) \Leftrightarrow a \in Z(G)$.

4. Határozzuk meg $Sym([3])$ összes konjugált-osztályát, és összes normálosztóját.

Megoldás. Tudjuk, hogy $Sym([3])$ izomorf a D_3 3-adrendű diéder-csoporttal. Minden csoportban (ezért D_3-ban is) $\{e\}$ egy egyelemű konjugáltosztály. Továbbá D_3-ban minden forgatás ciklusszerkezete 3-ciklus, ezért a 6. heti feladatlap 5. feladata szerint ezek mind konjugáltak. Ez az F konjugált-osztály 2 elemű. Hasonlóan, minden tükrözés egy transzpozíció, ezek is azonos ciklusszerkezetűek, így a 3 tükrözés egy 3-elemű T konjugált-osztályt alkot.

A normálosztók olyan részcsoportok, melyek konjugált-osztályok uniói. Legyen $N \triangleleft D_3$. Mivel N részcsoport is, tartalmania kell e-t.

- Ha N egyetlen konjugált-osztály, akkor az előbbiek szerint csak $N = \{e\}$ lehetséges (mert F és T nem tartalmazza e-t).
- Ha N 2 konjugált-osztály uniója, akkor ezek közül az egyik $\{e\}$. Könnyen látható, hogy $\{e\} \cup F$ egy normálosztó (hisz részcsoport, melynek indexe 2), míg $\{e\} \cup T$ 4-elemű, ezért Lagrange tétele miatt nem lehet részcsoport $\rightsquigarrow$ nem lehet normálosztó sem.
- Ha N 3 konjugált-osztály uniója, akkor $N = D_3$, ez normálosztó (minden csoport normálosztója sajátmagának).

5. Legyen G olyan csoport, amelyre $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_{15}$. Igazoljuk, hogy G Abel-csoport. (Ez általánosabban is igaz: ha $G/Z(G)$ ciklikus, akkor G Abel-féle).

Megoldás. Talán később.

6. Legyenek

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Q} - \{0\},\ b \in \mathbb{Q} \right\} \quad \text{és} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(csoportművelet: a mátrixszorzás).

(a) Határozzuk meg $C_G(T)$-t.

Megoldás. $C_G(T)$-ben azok a $B \in G$ mátrixok vannak, melyekre $TB = BT$. Ha $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, akkor

$$TB = \begin{pmatrix} a & b+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad BT = \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az első sorok elemeit összehasonlítva $TB = BT$-hez az kell, hogy $a = a$ (ez mindig teljesül) és $b + 1 = a + b$, ebből $a = 1$. Tehát $C_G(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} :\ b \in \mathbb{Q} \right\}$.

(b) Határozzuk meg $Z(G)$-t.

Megoldás. $C_G(T)$-ben azok a $B_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ mátrixok vannax, melyek kommutálnak minden $B_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$-vel.

$$B_1B_2 = \begin{pmatrix} a\alpha & a\beta + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2B_1 = \begin{pmatrix} a\alpha & \alpha b + \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az első sorok elemeit összehasonlítva olyan a, b kell, hogy minden α, β-ra $a\alpha = a\alpha$ (ez mindig teljesül) és

$$(*) \quad a\beta + b = \alpha b + \beta.$$

De $\alpha = 2, \beta = 0$ mellett $(*)$ csak akkor áll fenn, ha $b = 0$. Helyettesítsük $b = 0$-t vissza $(*)$-ba; azt kapjuk, hogy $a\beta = \beta$. Ez minden β-ra csak az $a = 1$ esetben áll fenn. Azt kaptuk, hogy ha $B_1 \in Z(G)$, akkor $a = 1, b = 0$, azaz $Z(G) = \{I\}$.

7. Legyen G ugyanaz a mátrixcsoport, mint az előző feladatban. Jelölje G' a G kommutátor-csoportját....

Megoldás. Talán később.

8. Legyen $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$. Legyen a D_n diéder-csoportban r a pozitív irányú $\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatás, és s egy tükrözés. A kommutátort az $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ képlettel definiáljuk. Igazoljuk, hogy minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén

$$[s, r^k] = r^{-2k}.$$

Megoldás. Talán később.

$A_n,\ n \geq 5$ egyszerűségével kapcsolatos feladat.

9. Legyen $n \geq 5$. Ebben a feladatban fejezzük be annak igazolását, hogy A_5. Egyszerű. Tegyük fel, hogy $\{e\} \neq N \triangleleft A_n$.

(a) Tegyük fel, hogy $\sigma = (a_1a_2)(a_3a_4)\cdots \in N$. Ki akarjuk mutatni, hogy ekkor N tartalmaz egy hármasciklust is.

i. Legyen $\alpha = (a_1a_2a_3)$. Igazoljuk, hogy $\alpha^{-1}\sigma^{-1}\alpha\sigma = (a_1a_4)(a_2a_3)$ ezért $(a_1a_4)(a_2a_3) \in N$.

Megoldás. Ha $c \notin \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, akkor α és α^{-1} fixálja c-t. Ezért ilyenkor

$$(\alpha^{-1}\sigma^{-1}\alpha\sigma)(c) = (\sigma^{-1}\sigma)(c) = c.$$

Az, hogy $\alpha^{-1}\sigma^{-1}\alpha\sigma$ az $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ elemeken a megadott módon hat, egyszerű számolással ellenőrízhető.

ii. Igazoljuk, hogy ha $\tau = (ab)(cd)$ és $\sigma = (a'b')(c'd')$ is 2-2 diszjunkt tartójú transzpozíció szorzata, akkor τ és σ (nemcsak $Sym([n])$-ben, hanem) A_n-ben is konjugáltak.

Megoldás. τ-nak és σ-nak azonos a ciklusszerkezete, ezért a 6. heti feladatlap 5. feladata szerint $Sym([n])$-ben konjugáltak: van $\pi \in Sym([n])$, hogy $\pi^{-1}\tau\pi = \sigma$. Nekünk azonban azt kellene megmutatni, hogy τ és σ konjugáltak A_n-ben is.
1. eset: $\pi \in A_n$. Ebben az esetben készen vagyunk.
2. eset: $\pi \notin A_n$. Ekkor $\pi(a'b') \in A_n$ (mert minden transzpozíció páratlan). Ezért elég megmutatni, hogy τ-t $\pi(a'b')$-vel konjugálva is σ-t kapunk. Ez így van, mert (figyelembe véve,

hogy transzpozíciók inverzei mindig sajátmaguk, és hogy diszjunkt tartójú transzpozíciók kommutálnak)

$$(\pi(a'b'))^{-1}\tau(\pi(a'b')) = (a'b')\pi^{-1}\tau\pi(a'b') = (a'b')\sigma(a'b') = (a'b')(a'b')(c'd')(a'b') =$$

$$(a'b')(a'b')(a'b')(c'd') = (a'b')(c'd') = \sigma.$$

iii. Igazoljuk, hogy N tartalmazza $[n]$ összes olyan permutációját, mely előáll 2 darab, diszjunkt tartójú transzpozíció szorzataként.

Megoldás. Az i rész jelöléseit használva $\alpha \in A_n$ (mert α egy 3-ciklus). Mivel $N \triangleleft A_n$ és $\sigma \in N$, ezért $\alpha^{-1}\sigma^{-1}\alpha \in N$, emiatt $\alpha^{-1}\sigma^{-1}\alpha\sigma \in N$. De ez az i rész miatt két diszjunkt tartójú transzpozíció szorzata (ami tehát N-ben van). Továbbá ii miatt, ha 2 permutáció előáll 2 darab diszjunkt tartójú transzpozíció szorzataként, akkor konjugáltak A_n-ben. Emiatt minden olyan permutáció N-beli, amely előáll 2 darab diszjunkt tartójú transzpozíció szorzataként.

iv. Igazoljuk, hogy ha $a, b, c, d, e \in [n]$ páronként különböző, akkor

$$(abc) = (ab)(bc) = (ab)(de)(bc)(de).$$

Ennek segítségével igazoljuk, hogy N tartalmaz hármasciklust.

Megoldás. Mivel (bc) és (de) diszjunkt tartójúak, ezért felscerélhetők. Ezért egyrészt

$$(ab)(de)(bc)(de) = (ab)(bc)(de)(de) = (ab)(bc) = (abc).$$

Másrészt $(ab)(de)$ és $(bc)(de)$ diszjunkt tartójú transzpozíciók szorzatai $\rightsquigarrow$ iii miatt N-ben vannak $\rightsquigarrow$ szorzatuk is N-ben van $\rightsquigarrow (abc) \in N$. Tehát N tartalmaz 3-ciklust.

(b) Igazoljuk, hogy bármely 2 hármasciklus (nemcsak $Sym([n])$-ben, hanem) A_n-ben is konjugált.

Megoldás. Legyenek (abc) és $(a'b'c')$ hármasciklusok. Mivel azonos a ciklusszerkezetük, ezért a 6. heti feladatlap 5. feladata szerint van $\sigma \in Sym([n])$, melyre $\sigma^{-1}(abc)\sigma = (a'b'c')$.
1. eset: $\sigma \in A_n$. Ebben az esetben készen vagyunk.
2. eset: $\sigma \notin A_n$. Mivel $n \geq 5$ van $d \neq e \in [n]$ melyek különböznek a', b', c' mindegyikétől. Egyrészt $\sigma(de) \in A_n$ (mert minden transzpozíció páratlan) másrészt, mivel diszjunkt tartójú ciklusok kommutálnak, ezért

$$(\sigma(de))^{-1}(abc)\sigma(de) = (de)\sigma^{-1}(abc)\sigma(de) = (de)(a'b'c')(de) = (de)(de)(a'b'c') = (a'b'c'),$$

azaz (abc) és $(a'b'c')$ konjugáltak A_n-ben is.

(c) A fentiek segítségével igazoljuk, hogy $N = A_n$.

Megoldás. Az előadáson σ-ra 4 alternatíva adódott, a 2 utolsót kizártuk előadáson. Az első alternatíva az volt, hogy σ sok transzpozíció szorzata, a 2. alternatíva az volt, hogy σ egy hármasciklus. A korábbi iv szerint az első alternatíva esetében is van hármasciklus N-ben. Ezt (b)-vel kombinálva, és figyelembe véve, hogy $N \triangleleft A_n$ azt kapjuk, hogy N tartalmazza az összes hármasciklust. De a hármasciklusok generálják A_n-t, ezért $N = A_n$ (és emiatt A_n egyszerű).

A feladatlap letölthető innen:
`https://users.renyi.hu/~sagi/algebra1-2026osz-letoltesek.html`