1. Hasson a G csoport az A halmazon, legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és legyen

$$(A^k)^* = \{\langle a_1, \dots, a_k\rangle \in A^k : \quad a_1, \dots, a_k \text{ páronként különböző}\}.$$

Igazoljuk, hogy G hatása A-n akkor és csak akkor k-tranzitív, ha koordinátánkénti hatása $(A^k)^*$-on tranzitív.

Megoldás. $\Rightarrow$: legyenek $\langle a_1, \dots, a_k\rangle, \langle b_1, \dots, b_k\rangle \in (A^k)^*$. Mivel G k-tranzitívan hat A-n, ezért van olyan $t \in G$, hogy $t'(a_1) = b_1, \dots, t'(a_k) = b_k$ azaz a koordinátánkénti hatással $t'(\langle a_1, \dots, a_k\rangle) = \langle b_1, \dots, b_k\rangle$. Ez mutatja, hogy G koordinátánkénti hatása $(A^k)^*$-n tranzitív.

$\Leftarrow$: legyenek $a_1, \dots, a_k \in A$ páronként különbözők és $b_1, \dots, b_k \in A$ páronként különbözők. Ekkor $\langle a_1, \dots, a_k\rangle, \langle b_1, \dots, b_k\rangle \in (A^k)^*$. Mivel G tranzitívan hat $(A^k)^*$-n, ezért van olyan $t \in G$, hogy $t'(\langle a_1, \dots, a_k\rangle) = \langle b_1, \dots, b_k\rangle \rightsquigarrow t'(a_1) = b_1, \dots, t'(a_k) = b_k$; ez mutatja, hogy G k-tranzitívan hat A-n.

2. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és legyen $inv : Sym([n]) \to C_2$,

$$inv(\pi) = \pi \text{ inverzióinak száma } (mod\ 2).$$

Igazoljuk, hogy inv egy csoport-homomorfizmus.

Megoldás. Legyen $\sigma, \pi \in Sym([n])$. Azt kell belátni, hogy

$$(*) \quad inv(\pi\sigma) = inv(\sigma) + inv(\pi) \quad (mod\ 2).$$

Legyen $i \neq j \in [n]$. Az alábbi 4 esetet különböztetjük meg.

$\langle i, j\rangle$ inverziója σ-nak	$\langle \sigma(i), \sigma(j)\rangle$ inverziója π-nek	$\langle i, j\rangle$ inverziója $\pi\sigma$-nak
nem	nem	nem
igen	nem	igen
nem	igen	igen
igen	igen	nem

Az első esetben az $\langle i, j\rangle$-t és a hozzá tartozó $\langle \sigma(i), \sigma(j)\rangle$-t, mint inverziókat $(*)$ mindkét oldalán 0-szor számoltuk, a 2. és 3. esetben $(*)$ mindkét oldalán 1-szer számoltuk, végül a 4. esetben a baloldalon 0-szor, a jobboldalon 2-szer számoltuk $\rightsquigarrow$ minden egyes $\langle i, j\rangle$ esetében páros a különbség aközött, hogy a $(*)$ bal, illetve jobboldalán hány inverziót számoltunk le.

3. Előáll-e az (56) transzpozíció $Sym([2026])$ valahány hármasciklusa szorzataként?

Megoldás. Nem, mert a hármasciklusok páros permutációk $\rightsquigarrow$ minden szorzatuk A_{2026}-ban marad. De $inv(56) = 1$, ezért, mint minden transzpozíciónak páratlan az inverziószáma. KÉSZ. Még algebristább módon, ha a $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ hármasciklusokra teljesülne, hogy $(56) = \sigma_1 \dots \sigma_k$, akkor

$$(*) \quad inv(56) = inv(\sigma_1 \dots \sigma_k)$$

következne. De a 2. feladat szerint inv homomorfizmus, igy $(*)$ baloldala 1, jobboldala 0 lenne; ez az ellentmondás mutatja, hogy (56) nem állhat elő hármasciklusok szorzataként.

4. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $\sigma \in Sym([n])$ tetszőleges. Legyenek $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ páronként különböző számok. Tekintsük a hozzájuk tartozó Vandermonde-determinánst:

$$V(a_1, \dots, a_n) = det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

(a) Igazoljuk, hogy $V(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}) = \pm V(a_1, \dots, a_n)$.

(b) Igazoljuk, hogy $\sigma \in A_n$ akkor és csak akkor, ha $V(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) = V(a_1, \ldots, a_n)$.

Megoldás. $V(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$-t sorcserékkel kapjuk $V(a_1, \ldots, a_n)$-ből. Tehát ha a sorcserék száma páros ($\iff \sigma$ páros permutáció), akkor $V(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) = V(a_1, \ldots, a_n)$; ha a sorcserék száma páratlan ($\iff \sigma$ páratlan permutáció), akkor $V(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) = -V(a_1, \ldots, a_n)$.

Mellesleg, BevAlg-1-ből tanultuk, hogy $V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$. Ebből is kínálkozik egy megoldás (a)-ra és (b)-re is.

5. Legyen $n \in \mathbb{N}$. A $\sigma, \pi \in Sym([n])$ permutációkról azt mondjuk, hogy azonos a ciklusszerkezetük, ha ciklusfelbontásaikban minden $k \in \mathbb{N}$ ugyanannyi darab k hosszú ciklus szerepel.
   (a) Igazoljuk, hogy σ és π ciklusszerkezete azonos $\iff$ konjugáltak $Sym([n])$-ben.
   (b) Igazoljuk, hogy $\sigma\pi\sigma^{-1} = \{\langle \sigma(i), \sigma(\pi(i)) \rangle : \ i \in [n]\}$, azaz π-nek a σ^{-1} szerinti konjugáltja megegyezik σ koordinátánkénti hatásával π, mint függvény grafikonján.

Megoldás. Csak (a)-t írom le, mert jeleztétek, hogy más tárgyakból nem tanultatok mindent, ami ahhoz kellene, hogy (b)-nek együtt örülhessünk. Tegyük fel, hogy $\sigma, \pi \in Sym([n])$-nek azonos a ciklusszerkezetük. Ekkor van olyan $\alpha : [n] \to [n]$ bijekció, mely σ és π azonos hosszú ciklusait úgy képezi egymásra, hogy egy-egy cikluson belül még a rákövetkezést is megtartja. Legyenek $\mathcal{A} = \langle [n], \sigma \rangle$ és $\mathcal{B} = \langle [n], \pi \rangle$ olyan algebrák, melyeknek $[n]$ az alaphalmaza, és egyetlen 1-változós műveletük van (ez $\mathcal{A}$-ban σ és $\mathcal{B}$-ben π). Konstrukciójánál fogva α izomorfizmus $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ között, ezért minden $x \in [n]$-re

$$(*) \quad \alpha(\sigma(x)) = \pi(\alpha(x)).$$

Mivel ez minden x-re igaz, és $\alpha \in Sym([n])$ is teljesül, ezért $(*)$ szerint $\alpha\sigma = \pi\alpha \rightsquigarrow \sigma = \alpha^{-1}\pi\alpha$. Ez mutatja, hogy σ és π konjugáltak. Fordítva, ha σ és π konjugáltak, mondjuk $\sigma = \alpha^{-1}\pi\alpha$, akkor $\alpha\sigma = \pi\alpha$, azaz $(*)$ teljesül, ami azt jelenti, hogy α izomorfizmus $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ között. De ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ izomorfak, akkor műveleteik ciklusszerkezete is azonos kell, hogy legyen.

6. Legyen G az egységkocka szimmetriacsoportja, és X az egységkocka csúcsaiból álló halmaz. Hány pályája van G-nek X^2-en? Mekkorák ezek a pályák?

Megoldás. Legyen $\langle A, B \rangle \in X^2$ (ahol A és B az egységkocka 2 csúcsa). A és B távolságát $d(A, B)$-vel jelöljük.
   (a) Ha $A = B$, akkor $d(A, B) = 0$.
   (b) Ha AB a kocka egy éle, akkor $d(A, B) = 1$.
   (c) Ha AB a kocka egy lapátlója, akkor $d(A, B) = \sqrt{2}$.
   (d) Ha AB a kocka egy testátlója, akkor $d(A, B) = \sqrt{3}$.

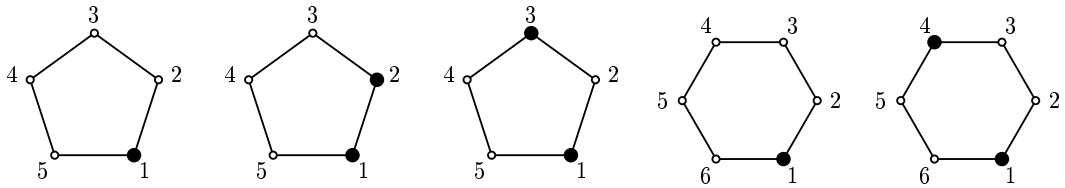
Mivel az egybevágóságok hossztartók, ezért a fenti 4 esetben szereplő csúcspárok páronként különböző pályákon vannak. Másrészt könnyű meggondolni, hogy a szimmetriacsoport koordinátánkénti hatása tranzitív a csúcsokon (1. eset), éleken (2. eset), lapátlókon (3. eset) és testátlókon (4. eset), tehát 4 pálya van, és így a pályák mérete rendre megegyezik a kocka csúcsainak, éleinek, lapátlóinak és testátlóinak számával.

7. Szabályos n-szög alakú karkötőket csinálunk, k darab borostyán-színű gyöngyöt használunk, a többi türkiz színű (van elég mindegyik színből). Két karkötőt akkor tekintünk egyformának, ha egybevágóságokkal átvihetők egymásba. Hányféle ilyen karkötőt csinálhatunk, ha

$$(a)\ n = 5,\ k = 1 \qquad (b)\ n = 5,\ k = 2 \qquad (c)\ n = 6,\ k = 1 \qquad (d)\ n = 6,\ k = 2\ ?$$

Megoldás. A feladattal inkább az orbit-stabilizátor tételt akarjuk illusztrálni, semmint a leszámlálás lenne érdekes, vagy nehéz. Az (a) és (c) kérdés triviális, (b) könnyű, és (d) is egyszerű. Egy-egy karkötőt úgy írhatunk le, hogy a szabályos n-szög csúcsait megszámozzuk, és megjelöljük, hol vannak

a borostyán színű gyöngyök. Ezután az a feladatunk, hogy leszámoljuk a páronként nem egybevágó színezett csúcsú szabályos n-szögeket.



(a): Nyilvánvaló, hogy egybevágóság erejéig 1 ilyen karkötő van: ha veszünk 2 színezett ötszöget, akkor a borostyán színű csúcsaikat forgatásokkal egymásra tudjuk vinni. Gondoljuk meg ezt az orbit-stabilizátor tétellel is. Ebben az esetben $\binom{5}{1} = 5$ számozott csúcsú színezett ötszög van, és az (a) ábrán látható példányt D_5-ben (5-ödrendű diéder-csoportban) az identitáson kívül csak az a tükrözés hagy fixen, melynek tengelye átmegy az 1. csúcson és merőlegesen felezi a 3-as és 4-es csúcs által alkotott élt. Ezért (figyelembe véve, hogy $|D_5| = 10$) azt kapjuk, hogy $|Stab_{D_5}(a)| = 2$ ezért $[D_5 : Stab_{D_5}(a)] = 5 \rightsquigarrow$ az (a) példány pályája 5 elemű. De ennyi színezett ötszögünk van összesen, tehát mind ugyanazon a pályán van $\rightsquigarrow$ egybevágóság erejéig 1 ilyen karkötő van.

(b): Ebben az esetben $\binom{5}{2} = 10$ számozott csúcsú színezett ötszög van (az 5 csúcsból kell kiválasztanunk a 2 borostyán színűt). A (b) ábrán látható két ötszög különböző pályákon van, mert az egyikben a 2 borostyán színű távolsága 1 oldalhossznyi, a másikban meg egy átlónyi, és az egybevágóságok távolságtartók. A (b) ábra első ötszögét az identitáson kívül csak az 1-es és 2-es csúcs közti él felezőmerőlegesére való tükrözés hagyja fixen, ezért a stabilizátor-csoportja 2 elemű $\rightsquigarrow$ az (a) részhez hasonlóan a stabilizátor indexe D_5-ben 5 $\rightsquigarrow$ a (b) ábra első ötszögének pályája 5-elemű. Teljesen hasonlóan, a (b) ábra második ötszögét az identitáson kívül csak a 4. és 5. csúcs közti él felezőmerőlegesére való tükrözés hagyja fixen, ezért a stabilizátor-csoport 2 elemű $\rightsquigarrow$ indexe D_5-ben 5 $\rightsquigarrow$ a (b) ábra második ötszögének is 5-elemű a pályája. Eddig 2 darab 5-elemű pályát találtunk, és összesen 10 számozott csúcsú színezett ötszögünk van, ezért nincs több eset. Azt kaptuk, hogy a (b) esetben egybevágóság erejéig (az ábrán látható) 2 darab karkötő van.

(c): Az (a) esethez hasonlóan egybevágóság erejéig 1 ilyen karkötő van.

(d): A korábbiakhoz hasonlóan végiggondolható. Érdekesség, hogy a (d) ábrán látható karkötőt nem csak egy tükrözés, hanem a 180-fokos forgatás is fixen hagyja, ezért ennek a példánynak a legnagyobb a stabilizátor-csportja $\rightsquigarrow$ legkisebb a pályája, vagyis a (d)-vel egybevágó példányokból van a legkevesebb (ritkaságánál fogva ez a legértékesebb, vagy legalábbis legkülönlegesebb fajta?).

Konzultáció a ZH-ra:
amiket ezzel kapcsolatban megbeszéltünk, azokat nem gépelem le.

A feladatlap letölthető innen:
`https://users.renyi.hu/~sagi/algebra1-2026osz-letoltesek.html`