

1. (Az 1. feladatlap 7. feladata és a 2. feladatlap 5. feladata.)
Legyen K tetszőleges test. Igazoljuk, hogy K egyszerű (csak triviális kongruenciarelációi vannak).
2. (A 2. feladatlap 9. feladata.) Igazoljuk, hogy minden véges félcsoportban van idempotens elem.
3. Legyen $\mathcal{G}$ csoport, $H, K, L \subseteq G$ komplexusok, $a, b \in G$. Igazoljuk, hogy
 - (a) ha $H \leq G$, akkor $b \in aH \iff aH = bH$;
 - (b) $a(H \cup K) = aH \cup aK$ sőt, $L(H \cup K) = LH \cup LK$ és $(H \cup K)L = HL \cup KL$;
 - (c) $H(K \cap L) \subseteq HK \cap HL$ és $(K \cap L)H \subseteq KH \cap LH$;
 - (d) $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1}$.
4. Legyen D_3 -ban t az AC oldal felezőmerőlegesére való tükrözés. Hány eleme van $\langle t \rangle$ -nek? Soroljuk fel H összes baloldali és összes jobboldali mellékosztályait. Igaz-e, hogy mindegyik baloldali mellékosztály jobboldali mellékosztály is?
5. Van-e $Sym([10])$ -nek 2026 elemű részcsoporthja?
6. Legyen $\mathcal{G} = \langle G, \cdot, {}^{-1}, e \rangle$ véges csoport. Igazoljuk, hogy $\mathcal{G}$ generálható legfeljebb $1 + \log_2(|G|)$ darab (sőt legfeljebb $\log_2(|G|)$ darab) elemével (azaz van olyan $X \subseteq G$, melyre $|X| \leq \log_2(|G|)$ és $\langle X \rangle = \mathcal{G}$).
7. Legyen $m \in \mathbb{N}$. Emlékeztető:
 - $R \subseteq \mathbb{N}$ egy RMR (redukált maradékrendszer ($\text{mod } m$)), ha $|R| = \varphi(m)$ és R elemei páronként inkongruensek ($\text{mod } m$) (ezért $\mathbb{N}$ minden eleme kongruens R valamelyik elemével ($\text{mod } m$)).
 - Euler-Fermat-tétel: Ha $(a, m) = 1$, akkor $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.
 - (a) Igazoljuk, hogy ha R egy RMR ($\text{mod } m$), akkor $V = \{a/(\text{mod } m) : a \in R\}$ részcsoporthja $\mathbb{Z}_m$ szorzásra vett reduktumának (itt $\mathbb{Z}_m$ a ($\text{mod } m$) maradékosztályok szokásos gyűrűje).
 - (b) A csoportelméleti Lagrange-tételt használva adjunk rövid bizonyítást az Euler-Fermat-tételre.
8. Adjunk meg egy olyan végtelen G csoportot, melynek minden végesen generált részcsoporthja véges (ilyenkor azt is mondjuk, hogy G lokálisan véges).
9. Igazoljuk, hogy ciklikus csoportok minden részcsoporthja is ciklikus.

A feladatlap letölthető innen:

<https://users.renyi.hu/~sagi/algebra1-2026osz-letoltesek.html>



Érdekes kitekintés a túloldalon!!

10. Legyen $\mathcal{M} = \langle A, \varrho \rangle$ metrikus (vagy akár topologikus) tér. Legyen $a \in A$ rögzített.

- $H_a = \{f : [0, 1] \rightarrow A : f(0) = f(1) = a, f \text{ folytonos}\}$ az a -hoz tartozó hurkok halmaza;
- H_a -n bevezetünk két műveletet: ha $f, g \in H$, akkor fg az a hurok, hogy (ebben a sorrendben) dupla sebességgel végigmegyünk g -n, majd f -en. Formálisabban:

$$(\forall x \in [0, 1]) \quad fg(x) = \begin{cases} g(2x) & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ f(2x - 1) & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Továbbá legyen f^{-1} az a hurok, hogy f -en fordított irányban megyünk végig:

$$(\forall x \in [0, 1]) \quad f^{-1}(x) = f(1 - x).$$

- Legyen

$$\Theta = \{\langle f, g \rangle \in H_a^2 : \exists h : [0, 1]^2 \rightarrow A : h \text{ folytonos és } (\forall x \in [0, 1]) : h(0, x) = f(x), h(1, x) = g(x)\}.$$

Szemléletesen: $\langle f, g \rangle \in \Theta$ folytonosan egymásba deformálhatók. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy f és g homotóp-ekvivalensek és h homotópia f és g között.

- Igazoljuk, hogy Θ egy ekvivalenciareláció H_a -n;
- Igazoljuk, hogy Θ kompatibilis a bevezetett műveletekkel: ha $f, f', g, g' \in H_a$ és $f/\Theta = f'/\Theta$, $g/\Theta = g'/\Theta$, akkor $fg/\Theta = f'g'/\Theta$ és $f^{-1}/\Theta = (f')^{-1}/\Theta$.
- H_a/Θ -n vezessük be a következő műveleteket:

$$(f/\Theta) \cdot (g/\Theta) = fg/\Theta, \quad (f/\Theta)^{-1} = (f^{-1})/\Theta.$$

Igazoljuk, hogy ezek jóldefiniáltak, és ezekkel a műveletekkel H_a/Θ csoportot alkot (Vigyázat: H_a az eredeti műveletekkel nem alkot csoportot. Miért?)