MEGJEGYZÉSEK AZ AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY EGY PROBLÉMÁJÁHOZ

ERDŐS PÁL ÉS SZEMERÉDI ENDRE

Erdős Pál néhány éve a következő feladatot tűzte ki.

Legyen $1 \leqq a_1 < \dots$ egész számok végtelen sorozata. E sorozatot A-val jelöljük. Legyen

$$f(A, k, i) = [a_k, \dots, a_{k+i-1}]$$

és $F(A, x, i)$ azon k számok száma, melyre

$$f(A, k, i) \leqq X.$$

Bebizonyítandó, hogy

$$F(A, x, i) < C_i X^{1/i},$$

ahol C_i csak i-től függő a konstans.

$i=2$-re a bizonyítás nagyon egyszerű. E cikkben először is $i=2$-re a következő élesebb tételt bizonyítjuk be:

I. Tétel

$$\limsup F(A, X, 2)/X^{1/2} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1/2}-(k-1)^{1/2}}{k}. \tag{1}$$

Továbbá, ha A olyan, hogy (1)-ben egyenlőség áll fenn, akkor

$$\liminf F(A, X, 2)/X^{1/2} = 0.$$

II. Tétel. Minden A-ra

$$\liminf F(A, X, 2)/X^{1/2} \leqq 1.$$

Bebizonyítjuk a következő tételt:

III. Tétel. Legyen $i > 4$. Van olyan $\alpha_i > 0$, melyre minden elég nagy x-re és alkalmas A-ra

$$F(A, X, i) > X^{1/i+\alpha_i}.$$

Tehát a feladat állítása teljesen hamis — a hiba oka nyilván az volt, hogy Erdős csak $i=2$-re bizonyította be és felületesen feltételezte, hogy $i>2$-re is minden igaz marad.

Biztosra vesszük, hogy $i>3$-ra is igaz a tétel. $i=4$-re igaz lesz, hogy

$$F(A, X, 4) > X^{1/4+\alpha_4}.$$

Tudjuk, hogy minden A-ra

$$F(A, X, 3) < c_0 X^{1/3} \log X,$$

és igaz, hogy alkalmas A-ra, végtelen sok X-re

$$F(A, X, 3) > c_1 X^{1/3} \log X.$$

Lehetséges, hogy van olyan A, melyre minden X-re

$$F(A, X, 3) > c_2 X^{1/3} \log X,$$

de ebben egyáltalán nem vagyunk biztosak.

Felvethetjük a következő érdekesnek és nehéznek látszó kérdést: igaz-e, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan k, hogyha $a_1 < \dots$ tetszőleges sorozat, akkor

$$F(A, X, k) < X^{\varepsilon}?$$

Konstruálunk egy sorozatot, melyre $F(A, X, k)$ nagy. Legyen — egyszerűség kedvéért $k = \binom{2l}{l}$. Tekintsük a $\{2tl+1 \dots (2t+2)l\}$ számokat $t = 1, 2, \dots$-re, s ezen számokból alkotott összes l-es szorzatát. Ezeket nagyság szerint rendezve kapjuk az a-kat. Ezen $\binom{2l}{l}$ szám legkisebb közös többszöröse $\prod_{i=1}^{2l} (2t+i) < X$ ha $t < \frac{X^{1/2l}}{2l} - 1$ így $k = \binom{2l}{l}$-re $\varepsilon \geqq \frac{1}{2l}$. Ebből könnyen következik a III. tétel.

Problémáinkat felfoghatjuk mint egy extrém problémát. Jelölje $f_k(X)$ illetve $F_k(X)$ azt a maximális l értéket, melyre van $1 \leqq a_1 < \dots < a_l$ úgy, hogy $[a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+k-1}] \leqq X$ minden $1 \leqq i \leqq l$-re, illetve melyre van oly $a_1 < \dots < X$, hogy l db a_i-re $[a_i, \dots, a_{i+k-1}] \leqq X$). Nyilván $F_k(X) \geqq f_k(X)$. Elsősorban kellene tudni, hogy van-e egyenlőség fix k és végtelen sok X-re.

Tegyük fel, hogy $k=2$. Érdekes lenne $f_2(X)$ és $F_2(X)$-et pontosan meghatározni és az extrem sorozatokat leírni végtelen sok X-re, de talán egy-két nagy X-re is érdekes lehetne.

Az I. Tétel és II. Tétel bizonyításánál felhasználjuk az alábbi egyszerű megjegyzést:

(1) megjegyzés: Ha $\sqrt{(k-1)x} < y, z < \sqrt{kx}$ és $[y, z] \leqq x$ akkor $z - y \geqq k$. Állításunk következik abból, hogy $[z, y] = \frac{zy}{(z, y)} > \frac{(k-1)x}{z-y}$ az (1) megjegyzésből következik az alábbi:

(2) megjegyzés: Ha az A sorozat elemeinek száma $a\left[\sqrt{(k-1)x}, \sqrt{kx}\right]$ intervallumban $B\left(\sqrt{kx} - \sqrt{(k-1)x}\right)$, akkor legfeljebb $\frac{1-B}{k-1}\left(\sqrt{kx} - \sqrt{(k-1)x}\right)$ olyan $y, z \in A$ pár van, melyre $[y, z] \leqq x$. Elég észrevennünk, hogy ha $[y, z] \leqq x$, akkor az (1) megjegyzés szerint $z - y \geqq k$ és ezért $y+1, \dots y+k-1$ nem elemei a sorozatnak, tehát ha l pár van, akkor legalább $l(k-1)$ egész van, melyek nem elemei A-nak, és innen $l \leqq \frac{1-B}{k-1}\left(\sqrt{kx} - \sqrt{(k-1)x}\right)$. Az (1) megjegyzés miatt a $\left[\sqrt{(k-x)}, \sqrt{kx}\right]$ intervallumban a jó y, z párok száma legfeljebb $\frac{\left(\sqrt{kx} - \sqrt{(k-1)x}\right)}{k}$ és ezért

$$\limsup F(A, X, 2)/X^{1/2} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1/2} - (k-1)^{1/2}}{k}.$$

Most bebizonyítjuk, hogy ha az A sorozatra

$$\limsup F(A, X, 2)/X^{1/2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1/2}-(k-1)^{1/2}}{k}$$

akkor

$$\liminf F(A, X, 2)/X^{1/2} = 0,$$

és ezzel az I. Tétel bizonyítása teljes lesz.

Legyen k_1 elég nagy és X olyan egész, melyre

$$F(A, X, 2)/X^{1/2} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1/2}-(k-1)^{1/2}}{k} - \frac{1}{k_1 4}.$$

Ekkor a $[k_1\sqrt{x}, k_1^2\sqrt{x}]$ intervallumban az A elemeinek száma legfeljebb $2k_1\sqrt{x}$ mert ellenkező esetben volna olyan l, $(k_1<l<k_1^2)$, hogy az $[\sqrt{(l-1)x}, \sqrt{lx}]$ intervallumban az A elemeinek száma legalább $\frac{2}{k_1}(\sqrt{lx}-\sqrt{(l-1)x})$, és így a (2) megjegyzés értelmében a jó y, z párok száma legfeljebb $\left(1-\frac{2}{k_1}\right)\frac{1}{l-1}(\sqrt{lx}-\sqrt{(l-1)x})$ lenne, ami kisebb mint $\left(\frac{1}{l-1}(\sqrt{l}-\sqrt{l-1})-\frac{1}{k_1 4}\right)X^{1/2}$. Ez nem lehetséges X választása miatt.

Mármost nyilván $F(A, k_1^3 x, 2) < 3k_1 x^{1/2} + k_1^{3/2} x^{1/2} \sum\limits_{k_1^{1/2}}^{\infty} \frac{\sqrt{l}-\sqrt{l-1}}{l} < k_1^{3/2} x^{1/2} k_1^{-1/4}$ ami éppen a bizonyítandó állítást adja, hiszen k_1 tetszőlegesen nagy lehet.

Most rátérünk a II. Tétel bizonyítására.

Jelölje $A(x)$ A elemeinek számát x-ig.

Legyen $\liminf \frac{A(x)}{x} = \alpha$ és l elég nagy egész szám. Tehát ha $x > x_0(l)$, akkor $\frac{A(x)}{x} > \alpha - \frac{1}{l^2}$. Definiáljuk az $x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots$ sorozatot a következőképpen: legyen $\frac{A(x_i)}{x_i} < \alpha + \frac{1}{l^2}$. Mármost az x_i definíciójából következik, hogy az A-nak az $[x_i, \sqrt{j}x_i]$ intervallumban legalább

$$\left(\alpha - \frac{2\sqrt{j}}{l^2}\right)(\sqrt{j}-1)x_i (j \leqq l) \text{ eleme van.}$$

Ezért a (2) megjegyzés segítségével könnyen adódik, hogy

$$F(A, x_i^2, 2) \leqq \left(\alpha+\frac{1}{l^2}\right)x_i + (1-\alpha)x_i \sum_{j=2}^{l} \frac{\sqrt{j}-\sqrt{j-1}}{j-1} +$$

$$+\frac{1}{l}x_i\left(\sum_{j=2}^{l} \frac{\sqrt{j}-\sqrt{j-1}}{j-1} + x_i \sum_{j=l}^{\infty} \frac{\sqrt{j}-\sqrt{j-1}}{j-1}\right).$$

Mivel

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{\sqrt{j}-\sqrt{j-1}}{j-1} = \gamma < 1$$

$$F(A, x_i^2, 2) \leqq \alpha x_i + (1-\alpha)x_i\gamma + \left(\frac{1}{l^2}+\frac{1}{l^\gamma}+\frac{1}{l^{1/2}}\right)x_i,$$

ami a bizonyítandó állítást adja.

Most belátjuk, hogy $F(A, x, 3) \leqq x^{1/3} \log x$. Legyen z, y, w olyan hármas, melyre

$$[z, y, w] \leqq x \quad \text{és} \quad 2^i x^{1/3} \leqq z, \leqq 2^{i+1} x^{1/3}.$$

Az ilyen hármast jó hármasnak nevezzük. Minthogy

$$[z, y, w] \geqq \frac{zyw}{(z, y)(z, w)(y, w)} \geqq \frac{zyw}{(w-z)^3}$$

kapjuk, hogy $(w-z) > 2^i$. Tehát a $[2^i x^{1/3}, 2^{i+1} x^{1/3}]$ intervallumban legfeljebb $x^{1/3}$ jó hármas van és ezért $F(A, x, 3) \leqq x^{1/3} \log x$, mivel az intervallumok száma kisebb mint $\log x$. Végül konstruálunk egy olyan $A = \{a_1, a_2, \dots a_l\}$ $(a_l \leqq x, x$ elég nagy) sorozatot, melyre $F(A, X, 3) \geqq \frac{1}{10^5} x^{1/3} \log x$. Rögzített j-re $(x^{1/20} < 2^j < x^{1/10})$, legyen

$$(m_1, m_3) = 1, \quad 2^j < m_1, \quad m_3 < 2^{j+1}.$$

Nyilván van olyan c és d, melyekre $m_1 c - m_3 d = -1$, $c < 2m_3$, $d < 2m_1$.

Tekintsük az

$$a_{t, m_1, m_3} = m_1(m_1+m_3)c + tm_1(m_1+m_3)m_3$$

$$b_{t, m_1 m_3} = m_1 m_3(d+c) + tm_1(m_1+m_3)m_3$$

$$c_{t, m_1, m_3} = (m_1+m_3)m_3 d + tm_1(m_1+m_3)m_3$$

számhármasokat, ahol $2^j x^{1/3} < a_{t, m_1, m_3}, b_{t, m_1, m_3}, c_{t, m_1, m_3} < 2^{j+1} x^{1/3}$. A hármasaink száma legalább $\frac{1}{20} \frac{x^{1/3}}{2^{2j}}$. Könnyen belátható, hogy tetszőleges $(m_1, m_2) \neq (m_1^*, m_3^*)^2$ párra, legfeljebb $\frac{x^{1/3}}{4^{2j}} t^*$ egész szám van úgy, hogy valamely t-re

$$|a_{t, m_1, m_3} - a_{t^*, m_1^*, m_3^*}| < 2^{j+1}.$$

Ha $\frac{1}{10^2} 2^{2j} \{m_1, m_3\}$ párt tekintünk, akkor minden $\{m_1, m_3\}$ párra legalább $\frac{1}{40} \frac{x^{1/3}}{2^{2j}}$ olyan t van, melyre

$$|a_{t, m_1, m_3} - a_{t^*, m_1^*, m_3^*}| > 2^{j+2}$$

minden t^*, m_1^*, m_3^* választással.

Tekintsük az $\{m_1, m_3\}$ párra azokat az $a_{t, m_1, m_3}, b_{t, m_1, m_3}, c_{t, m_1, m_3}$ hármasokat, melyekhez nincs t^*, m_1^*, m_3^* úgy, hogy

$$|a_{t, m_1, m_3} - a_{t^*, m_1^*, m_3^*}| < 2^{j+2}$$

és legyenek ezek a hármasok az A sorozat három egymásutáni tagjai: Nyilván $[a_{t, m_1, m_3}, b_{t, m_1, m_3}, c_{t, m_1, m_3}] \leqq x$ és a hármasaink száma legalább $\frac{1}{10^3} x^{1/3}$.

Minthogy legalább $\frac{1}{10^2} \log x$ j egészünk van a kívánt A sorozatot megkonstruáltuk.

ЗАМЕЧАНИЯ К ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ИЗ ЖУРНАЛА

ЭРДЁШ ПАЛ и СЕМЕРЕДИ ЕНДРЕ

REMARKS ON A PROBLEM OF THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY

P. ERDŐS and E. SZEMERÉDI