

*PROPRIÉTÉS PROBABILISTES
 des DIVISEURS d'un NOMBRE*

par

P. ERDÖS et J.L. NICOLAS

INTRODUCTION

P. Erdős a démontré que la densité asymptotique des entiers ayant deux diviseurs d_1 et d_2 vérifiant : $d_1 < d_2 < 2 d_1$ existe (cf. (2) et le livre de Halberstam et Roth (8), p. 262, th. 14). Soit :

$$F(n) = \max_t \left(\sum_{\substack{t/2 < d \leq t \\ d|n}} 1 \right)$$

L'énoncé précédent revient à dire : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\sum_{\substack{F(n) > 1 \\ n \leq x}} 1 \right) = c$

P. Erdős a conjecturé que $c = 1$, c'est-à-dire que, presque tous les entiers ont deux diviseurs d_1 et d_2 tels que $d_1 < d_2 < 2 d_1$.

Les résultats actuellement connus sont beaucoup moins satisfaisants sur la répartition probabiliste des *diviseurs* d'un nombre que sur celle des *diviseurs premiers* d'un nombre.

En effet, on sait, ((9)) que presque tous les nombres n ont

$$\log \log n + O(\psi(n) \sqrt{\log \log n})$$

facteurs premiers (ψ est une fonction quelconque telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty).$$

Mais on sait aussi que si l'on écrit :

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_w^{\alpha_w}$, pour l'entier "moyen" n , le $i^{\text{ème}}$ facteur premier est de l'ordre de $\exp(\exp i)$. Plus précisément : ((5))

p. 178) : Pour tout $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, il existe i_0 tel que pour tous les $n \leq x$ (sauf au plus εx), on a pour $i > i_0$:

$$(1 - \eta) i < \log \log p_i < (1 + \eta) i .$$

P. Erdős a également démontré (cf. (3) où le théorème 1 donne un résultat plus fort) que presque tous les entiers ont deux diviseurs premiers p et q vérifiant $p < q < p^2$. Enfin nous utiliserons (proposition 2) une autre propriété probabiliste des diviseurs premiers de n .

On peut ainsi considérer l'étude de la fonction $F(n)$ comme une approche de la répartition des diviseurs d'un nombre.

On peut définir également la fonction g :

$$g(n) = \max_{1 \leq m \leq n} \frac{1}{m} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \leq m}} d \right)$$

Il est facile de voir (cf. (7)) que l'on a pour tout n :

$$\frac{1}{2} F(n) \leq g(n) \leq 2 F(n)$$

Dans deux précédents articles, nous avons donné diverses propriétés des fonctions F et g concernant notamment les "grandes" valeurs qu'elles peuvent prendre. (cf. (b) et (7)). Signalons à ce propos que les résultats mentionnés dans ((6) p. 86) sur la fonction f :

$f(n) = n/d_n$ avec d_n le plus petit diviseur de n tel que :

$$\sum_{d|n, d \leq d_n} d \geq n$$

ont été rédigés par Tran ((11)).

Nous allons nous intéresser à la fonction $\Delta(n)$, une des valeurs de m pour laquelle le maximum intervenant dans la définition de $g(n)$ est réalisé. On a donc :

$$g(n) = \frac{1}{\Delta(n)} \sum_{d|n, d \leq \Delta(n)} d$$

Les n pour lesquels le maximum est atteint en plusieurs points sont sûrement très difficiles à étudier, c'est un problème du type : nombres parfaits. Mais dans les résultats que nous obtenons, la détermination de la fonction Δ est sans importance.

Nous nous proposons de démontrer les résultats suivants :

THÉORÈME 1 -

Pour toute constante $c_1 \leq 0,23$ et pour tout n assez grand, on a :

$$\Delta(n) \geq \exp(c_1 \log n / \log \log n)$$

THÉORÈME 2 -

Il existe une constante $c_2 > 0$, telle que pour une infinité de n , on ait :

$$\Delta(n) \leq \exp(c_2 \log n / \log \log n)$$

THÉORÈME 3 -

Pour presque tout n , on a :

$$\Delta(n) < n, \text{ c'est-à-dire } g(n) > \frac{\sigma(n)}{n}$$

où $\sigma(n)$ désigne la somme des diviseurs de n .

Dans les démonstrations, il sera commode d'utiliser la notation :

$$g_m(n) = \frac{1}{m} \sum_{d|n, d \leq m} d$$

On a ainsi : $\sigma(n) = g_n(n)$ et : $g(n) = \max_{1 \leq m \leq n} g_m(n) = g_{\Delta(n)}(n)$.

Il est d'autre part facile de voir que $\Delta(n)$ est un diviseur de n .

§1. DÉMONSTRATION du THÉORÈME 1

LEMME 1 -

Soit p premier et α entier. Si p divise n , alors $\Delta(n) \geq p^\alpha$.

Démonstration -

Soit $m < p^\alpha$, on va montrer que $g_{pm}(n) > g_m(n)$.

Soit $d_1 = 1, d_2, \dots, d_i$ les diviseurs de n inférieurs à m ; alors $1, p d_1, \dots, p d_i$ seront des diviseurs de n inférieurs à pm . On aura donc :

$$g_{pm}(n) \geq \frac{1}{pm} (1 + p d_1 + \dots + p d_i) = \frac{1}{pm} + g_m(n) > g_m(n).$$

Le lemme 1 montre que $\Delta(n) \geq f(n) = \max_{p^\alpha | n} p^\alpha$.

Les " petites " valeurs de la fonction f sont obtenues pour

$n = e^{\psi(x)}$, où $\psi(x) = \sum_{p^\alpha \leq x} \log p$ est une des fonction de Tchebicheff.

Précisons aussi que $e^{\psi(x)}$ est le p.p.c.m. des entiers $\leq x$. Les

nombres de la forme $n = e^{\psi(x)}$ ont beaucoup de diviseurs, et le

théorème central limite des probabilités (cf. (7)) indique qu'ils

sont regroupés en majorité autour de \sqrt{n} , ce qui implique que $\Delta(n)$

soit voisin de \sqrt{n} , alors que le lemme 1 ne donne qu'une minoration

de l'ordre de $\log n$. C'est en utilisant cette opposition que l'on

démontre le théorème 1.

Soit $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$, vérifiant $q_1 < q_2 < \dots < q_k$

On écrit pour alléger : $A(n) = \exp(c \log n / \log \log n)$ et on

suppose que $\max_i q_i^{\alpha_i} \leq A(n)$ sinon le lemme 1 donne le résultat.

On écrit :

$$(1) \quad n = D_1 D_2 \dots D_r$$

où les D_j sont des diviseurs de n premiers entre eux deux à deux et vérifiant pour tout j : $A(n)^2 \leq D_j \leq A(n)^3$. On peut obtenir une telle décomposition (1) en prenant par exemple :

$$D_1 = q_1^{\alpha_1} \dots q_{i_1}^{\alpha_{i_1}}$$

i_1 étant le plus petit indice pour lequel D_1 soit supérieur à $A(n)^2$. Ensuite on choisit $D_2 = \prod_{i_1 < i \leq i_2} q_i^{\alpha_i}$ etc ...

Comme on a $D_j \leq A(n)^3$, le nombre r de facteurs dans la formule (1) vérifie :

$$r \geq \frac{1}{3} \frac{\log n}{\log A(n)} = \frac{1}{3c} \log \log n$$

Un diviseur d de n s'écrira :

$$d = d_1 d_2 \dots d_r \text{ avec } d_j \mid D_j$$

Choisissons maintenant $m < A(n)$. Si l'on a $d \leq m$, on aura forcément pour tout j : $d_j \leq m < \sqrt{D_j}$ et le nombre de diviseurs d de n inférieurs à m sera majoré par $d(n)/2^r$. Il vient alors :

$$g_m(n) = \frac{1}{m} \sum_{d \mid n, d \leq m} d \leq \sum_{d \mid n, d \leq m} 1 \leq \frac{d(n)}{2^r} = \frac{d(n)}{(\log n)^{(\log 2)^{3c}}}$$

Maintenant, par le principe des tiroirs, on voit que pour tout n ,

$$g(n) \geq \frac{\log 2}{2 \log 2} d(n) \quad \text{cf. (7), prop. 1.}$$

On en déduit que pour $c < \frac{1}{3} \log 2$, on a, pour n assez grand, $\Delta(n) \geq A(n)$ et cela démontre le théorème 1.

§2. DÉMONSTRATION du THÉORÈME 2

On considère des nombres premiers $q_1 < q_2 < \dots < q_k$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \frac{x^1}{\lambda} &< q_k < \frac{x''}{\lambda} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \frac{x^1}{\lambda^{3^i}} &< q_{k-i} < \frac{x''}{\lambda^{3^i}} \end{aligned}$$

où λ est un nombre réel fixé > 1 , et x' et x'' des nombres voisins tendant simultanément vers l'infini; par exemple :

$$x'' = x' \left(1 + \frac{1}{\log x'} \right).$$

Soit $n = q_1 q_2 \dots q_k$. On va montrer que $\Delta(n) = q_k$.

Ce nombre $n = q_1 q_2 \dots q_k$ a les propriétés suivantes :

i) Tout r diviseur δ_r (i. e. tout diviseur produit de r facteurs premiers) est inférieur à tout $(r + 1)$ diviseur δ_{r+1} .

On exigera même d'avoir :

$$(2) \quad \frac{\delta_r}{\delta_{r+1}} < \frac{q_1}{2 q_k}$$

Pour cela il suffit que :

$$(3) \quad 2 \lambda^{3^k} \left(\frac{x''}{x'} \right)^k < x'$$

ii) On écrit un diviseur de n sous la forme $q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_r}$ avec toujours $q_{i_1} < q_{i_2} < \dots < q_{i_r}$. Les r -diviseurs de n sont rangés comme leurs plus petits facteurs premiers. Plus précisément, on a :

$$q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_r} < q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_s}$$

si et seulement si :

$(r < s)$ ou $(r = s$ et $i_1 < j_1)$ ou $(r = s, i_1 = j_1$ et $i_2 < j_2)$ etc ...

On exigera même d'avoir :

$$(4) \quad i_1 < j_1 \Rightarrow \frac{q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_r}}{q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_r}} < \frac{q_{i_1+1}}{2 q_k}$$

Comme on a :

$$q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_r} \leq \frac{x''^r}{\lambda^{3^{k-i_1}}}$$

et $j_1 \geq i_1 + 1$ donne

$$q_{j_1} \dots q_{j_r} \geq \frac{x'^r}{\lambda^3^{k-j_1} + 3^{k-j_2} + \dots} \geq \frac{x'^r}{\lambda^{\frac{3}{2}} 3^{k-j_1}} \geq \frac{x'^r}{\lambda^{\frac{1}{2}} 3^{k-i_1}}$$

Comme on a d'autre part :

$$\frac{q_{i_1+1}}{2 q_k} > \frac{\lambda x'}{2 \lambda^3^{k-i_1-1} x''}$$

Il suffira pour obtenir (4) d'avoir :

$$\frac{\lambda}{2} \lambda^{\frac{1}{6} 3^{k-i_1}} > \left(\frac{x''}{x'}\right)^{r+1}$$

relation qui est entraînée par, car $i_1 < j_1 \leq k$ et

$r \leq k - 1$:

$$(5) \quad \frac{1}{2} \lambda^{3/2} > \left(\frac{x''}{x'}\right)^k$$

iii) On remarque que les propriétés i et ii entraînent que le quotient de deux diviseurs successifs de n est ≥ 2 .

Il reste à démontrer que $\Delta(n) = q_k$. On a d'abord :

$$g_{q_k}(n) = 1 + \frac{q_{k-1}}{q_k} + \dots + \frac{q_1}{q_k}$$

On va montrer que pour tout diviseur $m > q_k$, on a $g_m(n) < g_{q_k}(n)$

Trois cas se présentent, suivant la valeur de d , diviseur de n précédant m . On écrit $m = q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_r}$ avec $r \geq 2$.

Premier cas -

d a $(r - 1)$ diviseurs. Par les propriétés iii et i, on a :

$$g_m(n) \leq 1 + \frac{d}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) \leq 1 + \frac{2d}{m} \leq 1 + \frac{q_1}{q_k}$$

Deuxième cas -

$d = q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_r}$ a r diviseurs premiers. On suppose que $i_1 = j_1$; ... ; $i_{h-1} = j_{h-1}$; et $j_h < i_h$, c'est-à-dire $j_h \leq i_h - 1$ et on suppose $i_h \neq k$, ce qui entraîne $j_h \leq k - 2$.

On a alors :

$$g_m(n) \leq 1 + \frac{d}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) < 1 + \frac{2d}{m} \leq 1 + \frac{q_{j_h} + 1}{q_k} \leq 1 + \frac{q_{k-1}}{q_k}$$

en utilisant la relation (4).

Troisième cas -

On suppose que $i_r = k$. Les diviseurs précédant m sont :

$$\frac{q_\ell}{q_k} m \text{ pour } \ell = k-1, k-2, \dots, i_{r-1} + 1$$

et soit d celui qui vient juste avant. On a alors :

$$g_m(n) \leq 1 + \frac{q_{k-1}}{q_k} + \dots + \frac{q_{i_{r-1} + 1}}{q_k} + \frac{2d}{m}$$

Si d a $(r-1)$ facteurs premiers, on sait que $\frac{2d}{m} < \frac{q_1}{q_k}$.

Si d a r facteurs premiers, on l'écrit $d = q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_r}$

On suppose $i_1 = j_1 ; \dots ; i_{h-1} = j_{h-1}$; et $j_h < i_h$, c'est-à-dire

$j_h \leq i_h - 1$. On a forcément $i_h \leq i_{r-1}$ et d'après la relation (4)

on a $\frac{2d}{m} < \frac{q_{i_{r-1}-1}}{q_k}$, ce qui achève de montrer que $\Delta(n) = q_k$.

En regardant les conditions (3) et (5), on peut voir

qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles :

$$\Delta(n) \leq \exp [(\log 3 + \epsilon) \log n / \log \log n]$$

Ce qui démontre le théorème 2. Avec un peu plus de soin, on peut

remplacer le 3 de $\log 3$ (qui vient des exposants 3^k) par $2 + \epsilon$.

Il semble que la "bonne" constante c entre les théorèmes 1

et 2 soit $\log 2$.

PROPOSITION 1 -

La densité inférieure des n tels que $\Delta(n) < \sqrt{n}$

est strictement positive.

Démonstration -

On considère les $n \leq x$ ayant 3 diviseurs premiers

q_1, q_2, q_3 vérifiant par exemple :

$$\begin{aligned} x^{\alpha-\epsilon} < q_1 < x^\alpha & \text{ avec } \alpha = \frac{1}{3} - \frac{3}{100} \\ x^{\beta-\epsilon} < q_2 < x^\beta & \beta = \frac{1}{3} + \frac{1}{100} \text{ et } \epsilon = \frac{1}{1000} \\ x^{\gamma-\epsilon} < q_3 < x^\gamma & \gamma = \frac{1}{3} + \frac{2}{100} \end{aligned}$$

Combien y a-t-il de tels nombres $n \leq x$? Il y en a :

$$\sum_{q_1, q_2, q_3} \left[\frac{x}{q_1 q_2 q_3} \right] = \sum_{q_1, q_2, q_3} \frac{x}{q_1 q_2 q_3} + O\left(\frac{x^{\alpha+\beta+\gamma}}{\log^3 x}\right)$$

$$= x \left(\sum_{q_1} \frac{1}{q_1} \right) \left(\sum_{q_2} \frac{1}{q_2} \right) \left(\sum_{q_3} \frac{1}{q_3} \right) + o(x).$$

Or
$$\sum_{x^a \leq p \leq x^b} \frac{1}{p} = \log \log(x^b) - \log \log(x^a) + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

$$= \log \frac{b}{a} + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

Le nombre des $n \leq x$ est donc :

$$x \left(\log \frac{\alpha}{\alpha - \varepsilon} \right) \left(\log \frac{\beta}{\beta - \varepsilon} \right) \left(\log \frac{\gamma}{\gamma - \varepsilon} \right) + o(x)$$

Montrons maintenant que pour $n = n' q_1 q_2 q_3$, alors $\Delta(n) \leq q_3 n'$.

Cela résulte d'abord de ce que $\Delta(q_1 q_2 q_3) = q_3$. Ensuite, comme n'

est tout petit, les diviseurs de n de la forme $d' D$, où $d' \mid n'$

et $D \mid q_1 q_2 q_3$ sont rangés prioritairement suivant les valeurs

de D . On a donc pour $m = m' D$:

$$g_{m'D}(n) = \frac{\sigma(m')}{m'D} \sum_{\substack{d \mid q_1 q_2 q_3 \\ d < D}} d + \frac{1}{m'} \sum_{\substack{d' \mid n' \\ d' \leq m'}} d'$$

$$= g_{m'}(n') + \frac{\sigma(m')}{m'} (g_D(q_1 q_2 q_3) - 1)$$

et cette dernière quantité est maximale pour $D = q_3$.

On sait d'autre part que, si l'on désigne par $P(n)$

le plus grand facteur premier de n , la densité des n pour lesquels

$P(n) \geq n^c$ existe (cf : (1)) et vaut $\log \frac{1}{\alpha}$ pour $c \geq \frac{1}{2}$.

D'après le lemme 1, la densité des n pour lesquels $\Delta(n) < \sqrt{n}$

est donc majorée par $1 - \log 2 < 0,31$. Tout ceci laisse conjecturer

l'existence d'une fonction $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ croissante et continue

telle que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \text{card} \{n \leq x, \Delta(n) < n^c\} = \phi(c)$$

§3. DÉMONSTRATION du THÉORÈME 3

Soit $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers de n .

On écrit :

$$n = \prod_{i=1}^{\omega(n)} q_i^{\alpha_i}$$

et l'on pose pour $2 \leq j \leq \omega(n)$:

$$\prod_{i=1}^{j-1} q_i^{\alpha_i} = q_j^{\gamma_j(n)}$$

PROPOSITION 2 - (P. ERDÖS, (4), Th. 2).

Il existe une fonction continue strictement croissante ϕ , avec $\phi(0) = 0$, $\phi(\infty) = 1$ telle que, si l'on enlève un ensemble E de densité 0 on ait :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \notin E}} \frac{1}{\log \log n} \sum_{\gamma_j(n) \leq c} 1 = \phi(c)$$

PROPOSITION 3 -

Soit $\psi(n)$ une fonction croissante tendant vers l'infini avec n . Presque tous les entiers n vérifient, si $n = q_1^{\alpha_1} \dots q_k^{\alpha_k}$:

$$i \leq k-1 \text{ et } q_i > \psi(n) \Rightarrow q_{i+1} > 2 q_i$$

Démonstration -

Considérons les entiers n entre \sqrt{x} et x . Ceux qui ne vérifient pas la propriété ont deux diviseurs premiers $q > \psi(\sqrt{x})$ et p , $q < p < 2q$. De tels entiers, il y en a au plus :

$$\sum_{\substack{q > \psi(\sqrt{x}) \\ q < p < 2q}} \left[\frac{x}{p q} \right] \leq x \sum_{q > \psi(\sqrt{x})} \frac{1}{q} \left(\sum_{q < p < 2q} \frac{1}{p} \right)$$

Or $\sum_{q < p < 2q} \frac{1}{p} \sim \frac{\log 2}{\log q}$, et comme la série $\sum \frac{1}{q \log q}$ lorsque q est premier, est convergente, son reste, lorsque $q > \psi(\sqrt{x})$ tend vers 0.

PROPOSITION 4 -

Soit n vérifiant : Il existe $j \geq 7$ tel que

$1 < \gamma_j(n) < \frac{3}{2}$ et $q_i > 2 q_{i-1}$ pour $i \geq j$. Pour un tel n , on a

$$g_m(n) > \frac{\sigma(n)}{n} \text{ avec } m = q_1^{\alpha_1} \dots q_{j-1}^{\alpha_{j-1}}$$

et donc $\Delta(n) \neq n$.

Démonstration -

Comme $j \geq 7$, on a $q_j \geq 17$ et $m \geq 2.3.5.7.11.13 = 30\ 030$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(n)}{n} &= \frac{\sigma(m)}{m} \prod_{i \geq j} \left(1 + \frac{1}{q_i} + \dots + \frac{1}{q_i^{\alpha_i}}\right) \\ &\leq \frac{\sigma(m)}{m} \prod_{i \geq j} \frac{1}{1 - 1/q_i} \leq \frac{\sigma(m)}{m} \prod_{i \geq j} \left(1 + \frac{2}{q_i}\right) \\ &\leq \frac{\sigma(m)}{m} \prod_{i \geq j} \left(1 + \frac{2}{2^{i-j} q_j}\right) \leq \frac{\sigma(m)}{m} \exp \sum_{i \geq j} \log \left(1 + \frac{2}{2^{i-j} q_j}\right) \\ &\leq \frac{\sigma(m)}{m} \exp \frac{1}{q_j} \sum_{i \geq j} \frac{2}{2^{i-j}} \leq \frac{\sigma(m)}{m} \exp \frac{4}{q_j} \leq \frac{\sigma(m)}{m} \left(1 + \frac{8}{q_j}\right) \end{aligned}$$

Compte tenu de ce que pour $0 \leq x \leq 1$, $e^x \leq 1 + 2x$.

On a d'autre part : $(\gamma_j(n) > 1 \Rightarrow q_j < m)$

$$g_m(n) \geq \frac{1}{m} (\sigma(m) + q_j) = \frac{\sigma(m)}{m} \left(1 + \frac{q_j}{\sigma(m)}\right)$$

Il reste donc à démontrer :

$$\frac{8}{q_j} < \frac{q_j}{\sigma(m)}$$

soit, comme $q_j^{\gamma_j(n)} = m$, que $m^{2/\gamma_j(n)} > 8 \sigma(m)$.

Comme $\gamma_j(n) < 3/2$, ceci sera assuré pour $\sigma(m) < \frac{1}{8} m^{4/3}$.

Il n'y a qu'un nombre fini de m qui vérifient cette inégalité.

L'étude des nombres colossalement abondants nous apprend même,

(cf. (6), tableau III) que tout n vérifie :

$$\sigma(n) \leq \sigma(12) \left(\frac{n}{12}\right)^{1,114} \leq 1,76 n^{1,14}$$

ce qui entraîne $\sigma(m) > \frac{1}{8} m^{4/3}$ pour $m \geq 7317$.

La démonstration du théorème 3 se fait de la façon suivante :

Les propositions 2 et 3 montrent que presque tous les entiers vérifient les hypothèses de la proposition 4.

Une caractérisation plus précise des entiers n pour lesquels $\Delta(n) = n$ semble difficile.

REFERENCES

- [1] N.G. BRUIN (de) On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$.- Indagationes Math. 13, 1951.- p. 50-60.
- [2] P. ERDÖS On the density of some sequences of integers.- Bull. Amer. Math. Soc.- (1948).- t. 54.- p. 685-692.
- [3] P. ERDÖS Some remarks on prime factors of integers.- Canadian j. Maths.- (1959).- t. 11.- p. 161-167
- [4] P. ERDÖS On some properties of prime factors of integers.- Nagoya Math. J. (1966).- t. 27.- p. 617-623.
- [5] P. ERDÖS On the distribution of prime divisors.- Aequationes Math. (1969).- t. 2.- p. 177-183
- [6] P. ERDÖS & J.L. NICOLAS Répartition des nombres superabondants.- Bull. Soc. Math. France.- (1975).- t. 103 p. 65-90.
- [7] P. ERDÖS & J.L. NICOLAS Méthodes probabilistes et combinatoires en théorie des nombres.- à paraître au Bulletin des Science Mathématiques.- t. 100 (1976) et Séminaire de Théorie des nombres de l'Université de Bordeaux.- (1974-75) exposé n° 13.
- [8] H. HALBERSTAM & K.F. ROTH Séquences.- Oxford at the Clarendon Press (1966).
- [9] G.H. HARDY & S. RAMANUJAN The Normal number of prime factors of a number n .- Quarterly Journal of Mathematics.- 48;- (1917) p. 76-92 et Collected papers of Ramanujan.- p. 262-275.
- [10] J. KUBILIUS Probabilistic methods in the theory of numbers.- vol. 11.- Translations of Mathematical Monographs.
- [11] T. H. TRAN Sur le nombre d'entiers $\leq x$ et non divisibles par les nombres premiers $> y$.- Séminaire de Théorie des nombres Delange-Pisot-Poitou.- (1975-76) (Groupe d'étude).

P. ERDÖS
Académie des Sciences de Hongrie
BUDAPEST, Hongrie

J.L. NICOLAS
Département de Mathématiques
U.E.R. des Sciences de LIMOGES
123, rue Albert Thomas
87100 - LIMOGES