VARGA TAMÁS EGY PROBLÉMÁJÁRÓL

ERDŐS PÁL és RÉVÉSZ PÁL

1. §. BEVEZEÉS

VARGA TAMÁS általános iskolások valószínűségszámítás oktatását a következő kísérlettel szokta kezdeni:

Az osztályt két részre osztja, az egyik csoportban minden gyereknek egy pénzdarabot kell kétszázszor feldobnia és leírnia egy papírra a dobások eredményeit. A második csoportban a gyerekeknek pénzdobás nélkül kell előállítaniuk egy 200 hosszúságú „véletlen" fej-írás sorozatot. A kísérlet elvégzése után a gyerekeknek a papírokra egy-egy jelszót kell felírniuk. Így a papírosokat összeszedő tanár nem tudja, hogy melyik papírszelet jött az igazi és melyik az ál véletlen csoportból. Ennek ellenére, kevés hibával képes megállapítani a kapott fej-írás sorozatok eredetét.

A kísérlet általában jó eredménnyel végződik, a tanár az eseteknek csak mintegy 10—20 százalékában téved. Mondanunk sem kell, hogy a gyerekeket a sikeres „bűvészmutatvány" nagy lelkesedéssel szokta eltölteni.

VARGA TAMÁS ezen sikeres mutatványa a következő egyszerű észrevételen alapszik. Az a gyerek, aki mesterségesen próbál meg egy véletlen sorozatot gyártani, félni fog túl sok fejet (vagy írást) írni egymás után, úgy gondolja, hogy 3—4 fej után okvetlenül írásnak kell következnie. A pénzdarab „memóriája" nem ilyen jó, egy 200 hosszúságú igazán véletlen fej-írás sorozatban 6—7 hosszúságú tiszta fej blokk is elő szokott fordulni. Ennek alapján Varga Tamás döntési eljárása a következő: azokról a fej-írás sorozatokról mondja, hogy igazi véletlen sorozatok, amelyekben a leghosszabb csak fejeket tartalmazó blokk hossza 5-nél hosszabb. Ez az eljárás vezet az említett sikeres eredményhez.

A sikeres bűvészmutatvány a következő komoly matematikai problémához vezet:

Egy n hosszúságú véletlen fej-írás sorozatban milyen hosszú a leghosszabb csak fejet tartalmazó blokk?

Kétségtelen, hogy ez a probléma igen természetes és egyszerűnek látszó. Valójában a kérdést először ERDŐS és RÉNYI vizsgálták 1970-ben, de még ma is sok igen nehéz, megoldatlan probléma vethető fel ezzel a kérdéssel kapcsolatban.

ERDŐS és RÉNYI a következőt bizonyították be:

Tetszőleges $0<c<1$-re, ha n elég nagy, akkor egy n hosszúságú fej-írás sorozat 1 valószínűséggel tartalmaz[1] $c \log n$ hosszúságú tiszta fej blokkot, míg ha $c>1$, akkor elég nagy n-re az n hosszúságú fej-írás sorozatok nem fognak $c \log n$ hosszúságú tiszta fej blokkot tartalmazni.

[1] Itt és a továbbiakban log mindig 2 alapú logaritmust jelent.

Úgy gondoljuk, hogy az olvasó számára könnyebben érthető lesz cikkünk, ha a következőkben az eredményeket a $0 \leqq x \leqq 1$ valós számok diadikus jegyeire vonatkozó tételek formájában fogalmazzuk meg pontosan és a fej-írás sorozatokra legfeljebb csak a tételek szemléletes tartalmát adjuk meg.

Legyen a $0 \leqq x \leqq 1$ valós szám diadikus kifejtése

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{2^n}$$

és legyen

$$S_0 = S_0(x) = 0, \quad S_n = S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(x) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ekkor Erdős és Rényi eredménye a következő két tétel formájában fogalmazható meg:

1. TÉTEL. *Legyen $0 < c < 1$, ekkor majdnem minden $0 \leqq x \leqq 1$-hez van olyan $n_0 = n_0(x)$ pozitív egész szám, hogy*

$$\max_{0 \leqq k \leqq n - [c \log n]} (S_{k+[c \log n]} - S_k) = [c \log n] \tag{1}$$

ha $n \geqq n_0$.

2. TÉTEL. *Legyen $c \geqq 1$, ekkor majdnem minden $0 \leqq x \leqq 1$-re*

$$\lim_{n \to \infty} \max_{0 \leqq k \leqq n - [c \log n]} \frac{S_{k+[c \log n]} - S_k}{[c \log n]} = \alpha(c)$$

ahol $\alpha(c) < 1$ ha $c > 1$ és megkapható, mint a

$$c = \left\{ \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \log (1+\alpha) + \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) \log (1-\alpha) \right\}^{-1}$$

egyenlet egyetlen gyöke, továbbá $\alpha(c) = 1$, ha $c = 1$.

A 2. Tételből nyilvánvalóan következik, hogy $c > 1$ esetén majdnem minden x-hez van olyan $n_0 = n_0(x)$, hogy

$$\max_{0 \leqq k \leqq n - [c \log n]} (S_{k+[c \log n]} - S_k) < [c \log n]$$

ha $n \geqq n_0$.

Nyilvánvaló, hogy ez a két tétel nem adja meg pontosan a leghosszabb tiszta fej blokk hosszát, például nem mondja meg, hogy van-e [logn] hosszuságu tiszta fej blokk.

A következő paragrafusban a leghosszabb tiszta fej blokk hosszára a fentieknél valamivel pontosabb eredményeket adunk.

A következő tétel alsó becslést ad a leghosszabb tiszta fej blokk hosszára.

3. TÉTEL. *Legyen*

$$\alpha_n = \alpha_n(K) = [\log n - \log\log\log n] + K.$$

Ekkor majdnem minden $0 \leqq x \leqq 1$*-re van olyan* $n_0 = n_0(x)$*, hogy*

$$\max_{0 \leqq k \leqq n - \alpha_n(-3)} (S_{k+\alpha_n(-3)} - S_k) = \alpha_n(-3)$$

ha $n \geqq n_0$.

A bizonyításhoz két lemmára lesz szükségünk.

1. LEMMA.

$$\lambda\{x : \max_{0 \leqq k \leqq n} (S_{k+n} - S_k) = n\} = p_n = \frac{n+2}{2^{n+1}}$$

ahol λ *a Lebesgue-mérték.*

Másszóval egy $2n$ hosszúságú fej-írás sorozat p_n valószínűséggel tartalmaz n hosszúságú tiszta fej blokkot.

BIZONYÍTÁS. Legyen

$$A = \{x : \max_{0 \leqq k \leqq n} (S_{k+n} - S_k) = n\}$$

és

$$A_k = \{x : (S_{k+n} - S_k) = n\} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Ekkor nyilván

$$A = A_0 + \bar{A}_0 A_1 + \bar{A}_0 \bar{A}_1 A_2 + \dots + \bar{A}_0 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{n-1} A_n,$$

$$\bar{A}_0 \bar{A}_1 \dots \bar{A}_{j-1} A_j = \bar{A}_{j-1} A_j \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

amiből a lemma azonnal adódik.

2. LEMMA. *Legyen*

$$B_k = B_k^{(n)} = \{x : S_{k+\alpha_n} - S_k = \alpha_n\} \quad (k = 0, 1, \dots, n - \alpha_n)$$

$$C_l = C_l^{(n)} = \sum_{k = l\alpha_n}^{(l+1)\alpha_n} B_k \quad \left(l = 0, 1, \dots, 2\left(\left[\frac{n}{2\alpha_n}\right] - 1\right)\right),$$

$$D = D^{(n)}(K) = C_0 + C_2 + \dots + C_{2\left(\left[\frac{n}{2\alpha_n}\right] - 1\right)}.$$

Ekkor

$$\lambda(\bar{D}) = \left(1 - \frac{\alpha_n + 2}{2^{\alpha_n + 1}}\right)^{\left[\frac{n}{2\alpha_n}\right] - 1} \approx 2^{-\log e \frac{n}{4 \cdot 2^{\alpha_n}}} \leqq (\log n)^{-(\log e) 2^{-(K+2)}}.$$

BIZONYÍTÁS. Nyilvánvalóan

$$\lambda(\bar{D}) = \lambda\left(\prod_{j=0}^{\left[\frac{n}{2\alpha_n}\right] - 1} \bar{C}_{2j}\right) = \prod_{j=0}^{\left[\frac{n}{2\alpha_n}\right] - 1} \lambda(\bar{C}_{2j}).$$

(Utóbbi egyenlőség abból következik, hogy a C_{2j} halmazok indikátor függvényei kifejezhetők az $\varepsilon_j(x)$ függvények diszjunkt blokkjainak segítségével, másszóval a C_{2j} események teljesen függetlenek.)

Az 1. Lemma szerint

$$\lambda(\bar{C}_{2j}) = 1 - \frac{\alpha_n + 2}{2^{\alpha_n + 1}},$$

ami bizonyítja lemmánkat.

A 3. Tétel bizonyítása. Legyen

$$E_n(K) = \{x : \max_{0 \le k \le n - \alpha_n(K)} (S_{k+\alpha_n(K)} - S_k) = \alpha_n(K)\},$$

ekkor

$$D^{(n)}(-2) \subset E_n(-2)$$

és

$$\lambda(\bar{E}_n(-2)) \le (\log n)^{-\log e}.$$

Így

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda(\bar{E}_{2^m}(-2)) < \infty$$

és a Borel—Cantelli-lemma szerint majdnem minden $0 \le x \le 1$ az $\{\bar{E}_{2^m}(-2)\}$ halmazsorozatnak csak véges sok eleméhez tartozik hozzá, azaz ha m elég nagy, akkor

$$\max_{0 \le k \le 2^m - \alpha_{2^m}(-2)} (S_{k+\alpha_{2^m}(-2)} - S_k) = \alpha_{2^m}(-2).$$

Tételünk állítása most már következik a következő két egyszerű megjegyzésből:

$$\max_{0 \le k \le 2^m - \alpha_{2^m}(-2)} (S_{k+\alpha_{2^m}(-2)} - S_k) \le \max_{0 \le k \le n - \alpha_{2^m}(-2)} (S_{k+\alpha_{2^m}(-2)} - S_k)$$

és

$$\alpha_n(-3) = \alpha_n(-2) - 1 \le \alpha_{2^m}(-2),$$

ha $2^m \le n \le 2^{m+1}$.

A következő tétel adja felső becslésünket a leghosszabb tiszta fej blokk hosszára.

4. Tétel. *Majdnem minden* $0 \le x \le 1$*-re van olyan* $n_k = n_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *végtelen sorozat, hogy*

$$\max_{0 \le j \le n_k - \tilde{\alpha}_{n_k}(0)} (S_{j+\tilde{\alpha}_{n_k}(0)} - S_j) < \tilde{\alpha}_{n_k}(0),$$

ahol [2]

$$\tilde{\alpha}_n = \tilde{\alpha}_n(0) = \{\log n - \log\log\log n\}.$$

Bizonyítás. A 2. Lemma jelöléseit α_n helyett $\tilde{\alpha}_n$-mal használva, legyen

$$D^* = C_1 + C_3 + \ldots + C_{2\left[\frac{n}{2\tilde{\alpha}_n}\right]+1}.$$

Könnyen látható, hogy

$$\lambda(\bar{E}_n(K)) = \lambda(\bar{D}\bar{D}^*) \ge \lambda(\bar{D})\lambda(\bar{D}^*)$$

és így

$$\lambda\{x : \sup_{1 \le k \le n - \tilde{\alpha}_n} (S_{k+\alpha_n} - S_k) < \tilde{\alpha}_n\} = O\left(2^{-\log e \frac{n}{2^{\tilde{\alpha}_n+1}}}\right)$$

[2] $\{Z\}$ jelenti a legkisebb z-nél nem kisebb egész számot.

továbbá, ha $m_j = [2^{j^{1+\delta}}]$, és $\delta = \left[\frac{2}{\log e} - 1\right)$ akkor

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(\bar{E}_{m_j}(0)) = \infty . \tag{2}$$

A tétel bizonyításához most már csak azt kell belátnunk, hogy bár az $\{\bar{E}_{m_j}(0)\}$ sorozat nem független események sorozata, a Borel—Cantelli-lemma mégis alkalmazható, azaz (2)-ből következik, hogy majdnem minden $0 \le x \le 1$ végtelen sok $\bar{E}_{m_j}(0)$-hoz tartozik hozzá. Ezt legkönnyebben az ERDŐS és RÉNYI által bizonyított Borel—Cantelli-típusú lemma segítségével láthatjuk be. Ők a következő lemmát bizonyították be:

3. LEMMA. *Legyenek $A_1, A_2, \ldots$ a $[0, 1]$ intervallum mérhető részhalmazai, amelyekre $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) = \infty$ és*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda(A_i A_j)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i)\right)^2} = 1.$$

Ekkor

$$\lambda\left(\prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1$$

azaz majdnem minden $x \in [0, 1]$ az A_k halmazok közül végtelensokhoz hozzátartozik.

Így tehát feladatunk mindössze abban áll, hogy megmutassuk, hogy

4. LEMMA.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda(\bar{E}_{m_i}(0)\bar{E}_{m_j}(0))}{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda(\bar{E}_{m_i}(0))\right)^2} = 1.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen

$$E_{ij}^* = E_{ij}^*(0) = \left\{x : \max_{0 \le k \le m_i - \tilde{\alpha}_{m_j}(0)} (S_{k + \tilde{\alpha}_{m_j}(0)} - S_k) = \tilde{\alpha}_{m_j}(0)\right\} \quad (i < j)$$

és

$$E_{ij} = E_{ij}(0) = \left\{x : \max_{m_i \le k \le m_j - \tilde{\alpha}_{m_j}(0)} (S_{k + \tilde{\alpha}_{m_j}(0)} - S_k) = \tilde{\alpha}_{m_j}(0)\right\} \quad (i < j).$$

Ekkor

$$\lambda(\bar{E}_{m_i}(0)\bar{E}_{m_j}(0)) = \lambda(\bar{E}_{m_i}(0))\lambda(\bar{E}_{ij})$$

és

$$\lambda(\bar{E}_{m_j}(0)) = \lambda(\bar{E}_{ij}^*)\lambda(\bar{E}_{ij}).$$

Így

$$\lambda(\bar{E}_{m_i}(0)\bar{E}_{m_j}(0)) = \frac{\lambda(\bar{E}_{m_i}(0))\lambda(\bar{E}_{m_j}(0))}{\lambda(\bar{E}_{ij}^*)} . \tag{3}$$

Továbbá az 1. Lemma alkalmazásával adódik, hogy

$$\lambda(\bar{E}_{ij}^*) \geqq \left(1-\frac{\tilde{\alpha}_{m_j}+2}{2^{\tilde{\alpha}_{m_j}+1}}\right)^{\frac{m_i}{\tilde{\alpha}_{m_j}}} \approx 1-\frac{m_i}{2^{\tilde{\alpha}_{m_j}+1}}. \tag{4}$$

(3)-ból és (4)-ből lemmánk azonnal következik, amivel egyúttal 4. Tételünket is bizonyítottuk.

3. és 4. tételünk együttesen azt állítja, hogy egy n hosszúságú dobássorozatban a leghosszabb tiszta fej blokk hossza $[\log n - \log\log\log n]-3$ és $\{\log n - \log\log\log n\}$ közé esik, azaz, ha n elég nagy, akkor $[\log n - \log\log\log n]-3$ hosszúságú tiszta fej blokk van, de $\{\log n - \log\log\log n\}$ hosszú általában nincs. Természetesen ugyanakkor előfordulhat, hogy végtelen sok n-re lényegesen hosszabb tiszta fej sorozat is van. A következőkben a leghosszabb — még előforduló — tiszta fej blokk hosszát fogjuk vizsgálni és bebizonyítjuk a következő két tételt:

5. Tétel. *Legyen $\{\gamma_n\}$ egész számoknak olyan sorozata, amelyre*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\gamma_n} = \infty,$$

ekkor majdnem minden $0 \leqq x \leqq 1$-re van olyan $n_j = n_j(x)$ végtelen sorozat, hogy

$$\max_{0 \leqq k \leqq n_j - \gamma_{n_j}} (S_{k+\gamma_{n_j}} - S_k) = \gamma_{n_j}.$$

6. Tétel. *Legyen $\{\delta_n\}$ egész számoknak olyan sorozata, amelyre*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\delta_n} < \infty,$$

ekkor majdnem minden $0 \leqq x \leqq 1$-re van olyan $n_0 = n_0(x)$, hogy

$$\max_{0 \leqq k \leqq n-\delta_n} (S_{k+\delta_n} - S_k) < \delta_n,$$

ha $n \geqq n_0$.

Fenti két tétellel nyilvánvalóan ekvivalens a következő két tétel:

5*. Tétel. *Legyen $\{\gamma_n\}$ egész számoknak olyan sorozata, amelyre*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\gamma_n} = \infty,$$

ekkor majdnem minden $0 \leqq x \leqq 1$-re van olyan $n_j = n_j(x)$ végtelen sorozat, hogy

$$S_{n_j} - S_{n_j - \gamma_{n_j}} = \gamma_{n_j}.$$

6*. Tétel. *Legyen $\{\delta_n\}$ egész számoknak olyan sorozata, amelyre*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\delta_n} < \infty,$$

ekkor majdnem minden $0 \leqq x \leqq 1$-re van olyan $n_0 = n_0(x)$, hogy

$$S_n - S_{n-\delta_n} < \delta_n$$

ha $n \geqq n_0$.

Mivel $\lambda\{x: S_n(x)-S_{n-\delta_n}(x)=\delta_n\}=2^{-\delta_n}$, a 6* Tétel közvetlenül következik a Borel—Cantelli-lemmából. Az 5* Tétel bizonyításához mindössze azt kell belátnunk, hogy az

$$F_n = \{x: S_n(x)-S_{n-\gamma_n}(x) = \gamma_n\}$$

eseménysorozatra teljesülnek a 3. Lemma feltételei. Vagyis elegendő belátnunk, hogy

5. Lemma.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda(F_i F_j)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda(F_i)\right)^2} = 1.$$

Bizonyítás. Legyen $i<j$, ekkor

$$\lambda(F_i F_j) = \begin{cases} 2^{-(\gamma_i+j-i)} & \text{ha } i > j-\gamma_j \\ \lambda(F_i)\lambda(F_j) = 2^{-(\gamma_i+\gamma_j)} & \text{ha } i \leqq j-\gamma_j \end{cases}$$

ebből lemmánk azonnal következik.

3. §. A leghosszabb legfeljebb egy írást tartalmazó blokk hosszának becslése

A címben felvetett kérdés vizsgálatában alapvető szerepet játszik az 1. Lemmához hasonló következő

6. Lemma.

$$\lambda\{x: \max_{0\leqq k\leqq n}(S_{k+n}-S_k) \geqq n-1\} = q_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(n^2+4-\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Más szóval egy $2n$ hosszúságú fej-írás sorozat q_n valószínűséggel tartalmaz legfeljebb egy írást tartalmazó n hosszúságú blokkot.

Bizonyítás. Legyen

$$A = \{x: \max_{0\leqq k\leqq n}(S_{k+n}-S_k) \geqq n-1\},$$

$$A_k = \{x: (S_{k+n}-S_k) \geqq n-1\} \quad (k=0,1,\dots,n),$$

$$B_j = \{x: \varepsilon_j(x) = 0\}.$$

Ekkor nyilván

$$A = A_0 + \bar{A}_0 A_1 + \bar{A}_0\bar{A}_1 A_2 + \dots + \bar{A}_0\bar{A}_1\dots\bar{A}_{n-1}A_n$$

és

$$\lambda(A_0) = \frac{n+1}{2^n}.$$

Továbbá $k \geqq 1$ esetén

$$\bar{A}_0\bar{A}_1\dots\bar{A}_{k-1}A_k = \sum_{j=k+1}^{k+n-1} \bar{A}_0\bar{A}_1\dots\bar{A}_{k-1}A_k B_j =$$

$$= \sum_{j=k+1}^{n} \bar{A}_0\bar{A}_1\dots\bar{A}_{k-1}A_k B_j + \sum_{j=n+1}^{k+n-1} \bar{A}_0\bar{A}_1\dots\bar{A}_{k-1}A_k B_j$$

és

$$\bar{A}_0\bar{A}_1 \dots \bar{A}_{k-1}A_kB_j = A_kB_jB_k \quad \text{ha} \quad k+1 \leqq j \leqq n,$$

$$\bar{A}_0\bar{A}_1 \dots \bar{A}_{k-1}A_kB_j = A_kB_jB_k\left(\sum_{l=j-n}^{k-1} B_l\right) \quad \text{ha} \quad n+1 \leqq j \leqq k+n-1,$$

$$\lambda(A_kB_jB_k) = \frac{1}{2^{n+1}},$$

$$\lambda\left(A_kB_jB_k \sum_{l=j-n}^{k-1} B_l\right) = \lambda(A_kB_jB_k)\lambda\left(\sum_{l=j-n}^{k-1} B_l\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1-\frac{1}{2^{k-n+j}}\right).$$

Így

$$\lambda(\bar{A}_0 \dots \bar{A}_{k-1}A_k) = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{j=n+1}^{k+n-1} \frac{1}{2^{n+1}}\left(1-\frac{1}{2^{k+n-j}}\right) = \frac{n-2+1/2^{k-1}}{2^{n+1}}$$

és

$$\lambda(A) = \frac{n+1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n-2+1/2^{k-1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(n^2+4-\frac{1}{2^{n-1}}\right),$$

ami bizonyítja lemmánkat.

Ezen lemma felhasználásával pontosan ugyanúgy, ahogy a 2. §-ban bizonyítottuk eredményeinket, bebizonyíthatjuk a következő két tételt.

6. TÉTEL. *Legyen*

$$\beta_n(K) = [\log n + \log\log n - \log\log\log n] + K.$$

Ekkor majdnem minden $0 \leqq x \leqq 1$*-re van olyan* $n_0 = n_0(x)$, *hogy*

$$\max_{0 \leqq k \leqq n-\beta_n(-3)} (S_{k+\beta_n(-3)} - S_k) \geqq \beta_n(-3) - 1,$$

ha $n \geqq n_0$.

7. TÉTEL. *Majdnem minden* $0 \leqq x \leqq 1$*-re van olyan* $n_j = n_j(x)$ *végtelen sorozat, hogy*

$$\max_{0 \leqq k \leqq n_j - \beta_{n_j}} (S_{k+\tilde{\beta}_{n_j}(0)} - S_k) < \tilde{\beta}_{n_j}(0) - 1,$$

ahol

$$\tilde{\beta}_n(K) = \{\log n + \log\log n - \log\log\log n\} + K.$$

Természetesen kérdezhetjük, hogy mi mondható a leghosszabb legfeljebb T írást tartalmazó blokk hosszáról. Ugyanolyan eszközökkel (és ugyanolyan értelemben) azt a választ kapjuk, hogy ez a hossz $[\log n + T\log\log n - \log\log\log n - \log T!] - 3$ és $\{\log n + T\log\log n - \log\log\log n - \log T!\}$ között lesz.

Kérdezhetjük, hogy az 5., 6., illetve 5*., 6*. Tételeknek megadható-e a legfeljebb T írást tartalmazó verziója. Minden új gondolat nélkül bizonyíthatóak a következők:

8. TÉTEL. *Legyen* $\{\gamma_n\}$ *egész számoknak olyan sorozata, amelyre*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^T 2^{-\gamma_n} = \infty,$$

ekkor majdnem minden $0 \leqq x \leqq 1$*-re van olyan* $n_j = n_j(x)$ *végtelen sorozat, hogy*

$$\max_{0 \leqq k \leqq n_j - \gamma_{n_j}} (S_{k+\gamma_{n_j}} - S_k) \geqq \gamma_{n_j} - T$$

és

$$S_{n_j} - S_{n_j - \gamma_{n_j}} \geqq \gamma_{n_j} - T.$$

9. Tétel. *Legyen* $\{\delta_n\}$ *egész számok olyan sorozata, amelyre*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^T 2^{-\delta_n} < \infty,$$

ekkor majdnem minden $0 \leqq x \leqq 1$*-re van olyan* $n_0 = n_0(x)$*, hogy*

$$\max_{0 \leqq k \leqq n - \delta_n} (S_{k+\delta_n} - S_k) < \delta_n - T$$

és

$$S_n - S_{n-\delta_n} < \delta_n - T$$

ha $n \geqq n_0$.

4. §. PROBLÉMÁK

1. A 3. §-ban megvizsgáltuk a leghosszabb legfeljebb T írást tartalmazó blokk hosszát. Természetesen feltételeztük, hogy T n-től független, fix szám. Nehezebbnek látszik az analóg kérdés vizsgálata, ha T-t egy $\{T_n\}$ sorozattal helyettesítjük. Például kérdezhetjük: mely $\{T_n\}$ sorozatokra igaz az, hogy majdnem minden $x \in [0, 1]$-re van olyan $n_0 = n_0(x)$ egész, hogy

$$\max_{0 \leqq k \leqq n - \varepsilon_n} (S_{k+\varepsilon_n} - S_k) \geqq \varepsilon_n - T_n,$$

ha $n \geqq n_0$, ahol $\varepsilon_n = \log n + (1 + o(1)) T_n \log \log n$.

2. Az előzőekben láttuk — illetve kérdeztük —, hogy mi a leghosszabb tiszta fej sorozat hossza. Kérdezhetjük, hogy az n hosszúságú dobássorozatban hányszor fordul elő ilyen (vagy közel ilyen) hosszúságú tiszta fej sorozat. (Ilyen típusú kérdéseket vizsgált Komlós János és Tusnády Gábor.) Például egy lehetséges konkrét kérdés a következő: melyek azok az $m = m(n, K)$ függvények, melyekre igaz az, hogy majdnem minden $x \in [0, 1]$-re van olyan $n_0 = n_0(x)$, hogy ha $n \geqq n_0$, akkor létezik egy $0 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leqq n - \alpha_n(K)$ sorozat úgy, hogy

$$S_{k_1 + \alpha_n(K)} - S_{k_1} = S_{k_2 + \alpha_n(K)} - S_{k_2} = \ldots = S_{k_m + \alpha_n(K)} - S_{k_m} = \alpha_n(K).$$

3. Az előbbi kérdéshez sok tekintetben hasonló a következő: mi a hossza a leghosszabb ismétlődő blokknak. Például, melyek azok a $\mu = \mu(n)$ függvények, amelyekre igaz az, hogy majdnem minden $x \in [0, 1]$-hez van olyan $n_0 = n_0(x)$, hogy minden $n \geqq n_0$-ra található olyan $i = i(x)$ és $j = j(x)$, hogy $1 \leqq i < i + \mu \leqq j < j + \mu \leqq n$ és

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}, \ldots, \varepsilon_{i+\mu-1}) = (\varepsilon_j, \varepsilon_{j+1}, \ldots, \varepsilon_{j+\mu-1}).$$

Ezzel a kérdéssel már foglalkozott Zubkov és Mihajlov.

4. Az előbbi kérdéseknek bizonyos értelemben a fordítottja a következő: milyen hosszú ideig kell egy pénzdarabot dobálni, hogy l hosszúságú tiszta fej blokkhoz jussunk. Pontosabban, legyen $n_l = n_l(x)$ a legkisebb egész, amelyre

$$\max_{0 \leqq k \leqq n_l - l} (S_{k+l} - S_k) = l.$$

Kérdés: mi mondható az $\{n_l\}$ sorozatról. (Eddigi eredményeinkből világos, hogy n_l körülbelül 2^l.)

5. Egy n hosszúságú dobássorozatban mekkora a leghosszabb tiszta fej- és leghosszabb tiszta írás sorozat hossza közti különbség. Pontosabban, legyen $\alpha_n=\alpha_n(x)$, illetve $\beta_n=\beta_n(x)$ a legnagyobb egészek, amelyekre

$$\max_{0\le k\le n-\alpha_n}(S_{k+\alpha_n}-S_k)=\alpha_n$$

$$\min_{0\le k\le n-\beta_n}(S_{k-\beta_n}-S_k)=0.$$

Mi mondható az $\{\alpha_n-\beta_n\}$ sorozatról?

Könnyen látható például, hogy majdnem minden $x\in[0, 1]$-re van olyan $n_k=n_k(x)$ $(k=1, 2, \dots)$ sorozat, hogy $\alpha_{n_k}(x)=\beta_{n_k}(x)$. Nehéznek látszó kérdés azonban a következő: található-e majdnem minden $x\in[0, 1]$-re olyan $n_k=n_k(x)$ $(k=1, 2, \dots)$ sorozat, hogy $\alpha_{n_k}(x)=\beta_{n_k}(x)$ és $\alpha_{n_k+1}(x)=\beta_{n_k+1}(x)$, illetve hogy valamely adott pozitív egész C esetén található-e majdnem minden $x\in[0, 1]$-re olyan $n_k=n_k(x)$ $(k=1, 2, \dots)$ sorozat, amelyre $\alpha_{n_k}(x)-\beta_{n_k}(x)=C$ és $\alpha_{n_k+1}(x)-\beta_{n1+_k}(x)=C$.

6. Adott k esetén legyen $n_k=n_n(x)$ a legkisebb olyan egész, amelyre igaz az, hogy a 2^k lehetséges k hosszúságú blokk mindegyike előfordul legalább egyszer. Mi mondható az $\{n_k\}$ sorozatról?

IRODALOM

P. Erdős—A. Rényi: On a new law of large numbers. *Journ. Analyse Mathématique* **22** (1970) 103—111.

Rényi A.: Valószínűségszámítás (324. old.) Tankönyvkiadó, Budapest 1966.

J. Komlós—G. Tusnády: On the „pure heads". *The Annals of Probability* **3** (1975).

А. М. Зубков—В. Г. Михайлов: Предельные распределения случайных величин, связанных с длинными повторениями в последовательноста независимых испытаний. Теория вероатностей и её прим. **19** (1974) 173—181.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ТАМАША ВАРГА

ПАЛ ЭРДЁШ—ПАЛ РЕВЕС

ON A PROBELM OF T. VARGA

P. ERDŐS—P. RÉVÉSZ