Некоторые теоремы о паросочетаниях[1]

Д. Элиотт, П. Эрдёш

Граф G называется *двудольным*, если множество его вершин можно разделить на такие два непересекающихся класса A и B, что никакие две вершины одного и того же класса не соединены ребром. Если к тому же каждый класс содержит точно n вершин, то граф G называется *графом типа* (n, n). Мы будем рассматривать только такие графы. Если каждая вершина из A соединена ребром с каждой вершиной из B, то будем называть граф G *полным*.

Паросочетанием[2]) графа G называется множество ребер, покрывающее каждую вершину ровно один раз. В работе [1] показано, что если число ребер графа G превосходит $(^1/_2+c)n^2$, где $c > 0$, то граф G не может иметь единственное паросочетание. Метод доказательства опирается на результат Жнама. Этот результат позволяет находить в графе G непересекающиеся полные подграфы G_i типа (r, r), где $r > c' \log n$, такие, что, добавляя ребра, можно расширить каждое паросочетание графа $\sum G_i$ до паросочетания графа G. В настоящей статье мы покажем, что для этого достаточно найти подграф графа G, ребра которого распределены с некоторой регулярностью, и получим для числа паросочетаний лучшие оценки.

Теорема 1. *Двудольный граф G типа (n, n), содержащий не менее $(^1/_2 + c)n^2$ ребер и имеющий хотя бы одно паросочетание, имеет по крайней мере*

$$2^{\mu}\mu! \tag{1}$$

различных паросочетаний, где $\mu = [m/2]$ и m — наименьшее из целых чисел, не меньших an,

$$a = 1 - (1 - 2c)^{1/2}. \tag{2}$$

В частности, при фиксированном c и большом n число различных паросочетаний превосходит $(n!)\ c_1$, где $c_1 > 0$ зависит только от c.

---

[1]) Elliott D., Erdös P., Some matching theorems, *J. Indian Math. Soc.*, 32, 3—4 (1968—1969), 215—219.

[2]) Здесь и далее имеются в виду совершенные паросочетания в терминологии Бержа, или 1-факторы в терминологии Харари. — *Прим. перев.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ — два множества вершин графа G, и пусть граф G имеет паросочетание, ребрами которого служат $a_i b_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Обозначим через $\rho(a_i)$ число вершин из множества $\{b_1, \ldots, b_n\}$, соединенных ребрами с вершиной a_i, а через $\sigma(b_i)$ — число вершин из множества $\{a_1, \ldots, a_n\}$, соединенных ребрами с вершиной b_i. Ясно, что

$$\sum_{i=1}^{n} \{\rho(a_i) + \sigma(b_i)\} \geqslant (1 + 2c) n^2, \tag{3}$$

так как слева стоит удвоенное число всех ребер графа G.

Обозначим через N число тех индексов i, для которых $\rho(a_i) + \sigma(b_i) \geqslant (1 + \alpha) n$. Тогда из неравенств $\rho(a_i) \leqslant n$ и $\sigma(b_i) \leqslant n$ следует, что сумма в (3) не больше $2nN + (1 + \alpha) n (n - N)$, и потому

$$N \geqslant \frac{n(2c - \alpha)}{1 - \alpha} = \alpha n.$$

Последнее равенство вытекает из определения числа α (см. (2)).

Таким образом, можно считать, что

$$\rho(a_i) + \sigma(b_i) \geqslant (1 + \alpha) n$$

для $i = 1, \ldots, m$, где m — наименьшее из целых чисел, не меньшее αn.

При фиксированном i обозначим через N_0 число индексов $j (1 \leqslant j \leqslant n)$, отличных от i, для которых в графе G нет ребер $a_i b_j$ и $b_i a_j$. Число тех j, для которых есть одно такое ребро, обозначим через N_1, а число тех j, для которых есть два таких ребра, обозначим через N_2. Тогда

$$N_0 + N_1 + N_2 = n - 1,$$
$$N_1 + 2N_2 \geqslant (1 + \alpha) n - 1.$$

Произведя очевидные преобразования, получим $N_2 \geqslant \alpha n$, откуда $N_2 \geqslant m$.

Итак, для каждого $i = 1, \ldots, m$ существуют также числа $r_1^{(i)}, \ldots, r_m^{(i)}$, что при каждом $r \in \{r_1^{(i)}, \ldots, r_m^{(i)}\}$ граф G содержит ребра $a_i b_r$ и $a_r b_i$. Это дает нам возможность строить различные паросочетания графа G следующим образом.

Заменим ребра $a_1 b_1$ и $a_r b_r$ исходного паросочетания ребрами $a_1 b_r$ и $a_r b_1$, где $r \in \{r_1^{(1)}, \ldots, r_m^{(1)}\}$. Это можно сделать m способами. Выбрав один из них, возьмем наименьший индекс i, отличный от 1 и r (т. е. $i = 2$ или 3), и заменим ребра $a_i b_i$ и $a_s b_s$ исходного паросочетания ребрами $a_i b_s$ и $a_s b_i$, где $s \in \{r_1^{(i)}, \ldots, r_m^{(i)}$ и $s \neq 1, r$. Это можно сделать по крайней мере $m-2$ способами. Затем возьмем наименьший индекс j, отличный от $1, r, i, s$ (т. е. $j \leqslant 5$), и сделаем аналогичную замену. Ее можно осуществить по крайней мере $m-4$ способами, и т. д.

Число различных паросочетаний, построенных таким образом, не меньше $\prod\limits_{0 \leqslant r < m/2} (m-2r)$. Так как $m \geqslant 2\mu$, то эта величина не меньше $2^\mu \mu!$, что и утверждалось.

Последнее утверждение теоремы 1 получается немедленно, поскольку при фиксированном c число α также фиксировано и $\mu! > (n!)^{c_1}$.

При желании получить нетривиальный результат для любого $c > 0$ следует обратить внимание на то, что в случае, когда c стремится к $^1/_2$, c_1 не стремится к 1, как этого можно было бы ожидать. Поэтому в случае больших значений c, возможно, представляет интерес

Теорема 2. *Пусть граф G удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Если* $2c > \sqrt{3} - 1$, *то G имеет по крайней мере $m!$ различных паросочетаний, где m — наименьшее из целых чисел, для которых*

$$m + 1 \geqslant n\left(2c - (2-4c)^{1/2}\right).$$

Доказательство. Будем пользоваться теми же обозначениями, что и в теореме 1. Ясно, что найдется индекс i, для которого

$$\rho(a_i) + \sigma(b_i) \geqslant (1+2c)\,n.$$

Без потери общности можно положить $i = 1$. Пусть k — наименьшее из целых чисел, не меньших $2cn$. Тогда, как и в доказательстве теоремы 1, можно считать, что граф G содержит все ребра a_ib_1 и a_1b_i $(i = 1, \ldots, k)$.

Для любого θ $(0 < \theta < 1)$ обозначим через N_θ число индексов i, для которых $\rho(a_i) \geqslant \theta n$. Тогда

$$nN_\theta + \theta n(n - N_\theta) \geqslant \sum \rho(a_i) \geqslant \left(\frac{1}{2} + c\right) n^2,$$

откуда

$$N_\theta \geqslant \frac{n\,(^1/_2 + c - \theta)}{1-\theta}.$$

Выбирая $\theta = 1 - (^1/_2 - c)^{1/2}$ и обозначая через V наименьшее из целых чисел, не меньших θn, получаем, что $N_\theta \geqslant V$. Из всех этих значений i по крайней мере $k + V - n$ удовлетворяют неравенству $i \leqslant k$, поэтому, переобозначая при необходимости индексы, можно считать, что

$$\rho(a_i) \geqslant V \quad (i = 1, \ldots, k + V - n).$$

Кроме того, для любого такого i число ребер $a_i b_j$, для которых $j \leqslant k + V - n$, не меньше

$$(k + V - n) + V - n = k + 2V - 2n.$$

Рассмотрим подграф G' с вершинами a_i, b_j, где $i, j = 1, \ldots, k + V - n$. Добавляя ребра $a_s b_s$ $(k + V - n < s \leqslant n)$, можно, очевидно, расширить паросочетание графа G' до паросочетания графа G. Построим паросочетания графа G', конструируя различные циклы, каждый из которых содержит одно общее для всех циклов ребро.

Определим $\rho'(a_i)$ и $\sigma'(b_i)$ по аналогии с тем, как в теореме 1 определялись $\rho(a_i)$ и $\sigma(b_i)$. Ясно, что

$$\rho'(a_i) \geqslant k + 2V - 2n \quad (i = 1, \ldots, k + V - n),$$
$$\rho'(a_1) = \sigma'(b_1) = k + V - n.$$

Построим циклы, каждый из которых содержит ребро $a_1 b_1$. Сначала выберем такой индекс $j (1 < j \leqslant k + V - n)$, что ребро $a_1 b_j$ принадлежит графу G'. Это можно сделать $\rho'(a_1) - 1$ способами. Пусть $j = j_1$. Тогда ребро $a_{j_1} b_{j_1}$ принадлежит графу G'. Выберем такой индекс j_2, отличный от 1 и j_1, что ребро $a_{j_1} b_{j_2}$ принадлежит графу G'. Это можно сделать $\rho'(a_{j_1}) - 2$ способами. Ребро $a_{j_2} b_{j_2}$ принадлежит G'. Продолжим этот процесс до тех пор, пока после выбора $k + 2V - 2n - 1$ ребер мы не получим ребро $a_s b_s$, где $s \neq 1$. Затем мы закончим цикл, добавив ребро $a_s b_1$. Такое добавление можно сделать, поскольку для всякого i ребро $a_i b_1$ принадлежит графу G'.

Число построенных таким образом циклов и, следовательно, число паросочетаний графа G' не меньше

$$\prod_{i=1}^{k+2V-2n} (\rho'(a_{j_{i-1}}) - i) \geqslant (k + 2V - 2n - 1)!$$

Заметим, что условие $2c > \sqrt{3} - 1$ гарантирует положительный множитель при n в выражении $k + 2V - 2n - 1$. Теорема доказана.

Слегка изменив условия теоремы 1, можно убедиться, что если граф G содержит более $n(n+1)/2$ ребер, то он не может иметь единственное паросочетание. Этот результат в некотором смысле неулучшаем, поскольку граф, составленный из ребер $a_i b_j$, где $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, имеет $n(n+1)/2$ ребер и ровно одно паросочетание.

В заключение отметим, что число c_1 из теоремы 1 не может быть больше $(2c)^{1/2}$. Рассмотрим граф G, составленный из ребер $a_i b_j$, где $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ или $n - [n\sqrt{2c}] < j < i \leqslant n$. Этот граф имеет более $(^1/_2 + c)n^2$ ребер (разумеется, здесь $0 < c < ^1/_2$), но только $\exp\{(1 + o(1))\sqrt{2c}\, n \log n\}$ паросочетаний. На самом деле, по-видимому, верхняя граница для константы в показателе расположена еще ближе к c_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Elliott P. D., Even graphs (в печати).