TURÁN PÁL GRÁF TÉTELÉRŐL

ERDŐS PÁL

Turán Pál 60. születésnapjára

$G(n)$ jelentsen egy n szögpontú gráfot, $G(n; k)$ egy n szögpontú és k élű gráfot. $K(r)$ jelenti az r szögpontú teljes gráfot és C_r egy r élű kört. $K(a_1, ..., a_r)$ jelenti a teljes r-kromatikus gráfot, ahol a_j j-edik színű pont van és bármely két különböző színű pont össze van kötve. $f(n; G_1)$ jelenti azt a legnagyobb számot, melyre még van oly $G(n; f(n; G_1))$, mely nem tartalmaz G_1-et mint részgráfot. Turán Pál [3] egy 30 év előtti cikkében bebizonyította, hogy

(1)
$$f(n; K(r)) = \frac{r-2}{2(r-1)}(n^2-h^2) + \binom{h}{2} \quad \text{ahol} \quad n \equiv h\,(\mathrm{mod}\,(r-1)), \quad 0 \leqq h < r-1.$$

Turán azt is kimutatta, hogy az egyetlen $G(n; f(n; K(r)))$, mely nem tartalmaz $K(r)$-et egy $K(a_1, ..., a_{r-1})$, ahol
$$a_1 + ... + a_{r-1} = n \quad \text{és} \quad a_i = \left[\frac{n}{r-1}\right] \quad \text{vagy} \quad \left[\frac{n}{r-1}\right] + 1.$$

Legyen $G_1(n)$ és $G_2(n)$ két gráf, $x_1, ..., x_n$, illetve $y_1, ..., y_n$ szögpontjaik $v(x_i)$, illetve $v(y_i)$ a szögpontok fokai (azaz $v(x_i)$ az x_i-vel éllel összekötött pontok száma). Legyen $v(x_1) \geqq ... \geqq v(x_n)$ és $v(y_1) \geqq ... \geqq v(y_n)$. Akkor mondjuk, hogy $G_1(n) \geqq G_2(n)$, ha minden i-re $v(x_i) \geqq v(y_i)$. Nyilvánvaló, hogyha $G_1(n) \geqq G_2(n)$, akkor $e(G_1) \geqq e(G_2)$, ahol $e(G)$ G éleinek száma. Fennáll mármost a következő

TÉTEL: *Legyen $G(n)$ oly gráf, mely nem tartalmaz $K(r)$-et. Akkor van egy $G_1(n)$, mely $(r-1)$-kromatikus és melyre*
$$G_1(n) \geqq G(n).$$

E tételből Turán tétele rögtön következik, ugyanis könnyű bebizonyítani, hogyha $G_1(n)$ $(r-1)$-kromatikus, akkor
$$e(G_1(n)) \leqq f(n; K(r)),$$
egyenlőség csak akkor, ha $G_1(n)$ gráfunk $K(a_1, ..., a_{r-1})$, ahol $a_i = \left[\frac{n}{r-1}\right]$ vagy $\left[\frac{n}{r-1}\right] + 1$.

Turán több hasonló kérdést felvetett és így cikkével a gráfelmélet egy új fejezete kezdődött, a gráfelméleti extrém problémák vizsgálata. E kérdéseknek most már elég nagy irodalmuk van, lásd például [2].

Tételünk bizonyítása Andrásfai azon ötletét használja, mellyel ő Turán tételét bebizonyította [1]. Indukciót használunk r-re, $r=2$-re tételünk triviális, ugyanis egy $k(2)$-őt nem tartalmazó gráfnak nincsen éle. Tegyük fel, hogy tételünket $(r-1)$-re már bebizonyítottuk, kimutatjuk r-re. Legyen tehát $G(n)$ gráf, mely nem tartalmaz $K(r)$-et és legyen x_1 a legnagyobb fokú pontja, legyen $v(x_1)=l$ és legyenek $x_{n-l+1}, \dots, x_n$ az x_1-el összekötött pontok. Jelölje $G(x_{n-l+1}, \dots, x_n)$ $G(n)$ azon részgráfját, melyet az $x_{n-l+1}, \dots, x_n$ szögpontok generálnak (azaz az x_i és x_j pontok $n-l+1 \leqq i < j \leqq n$, akkor és csakis akkor vannak összekötve $G(x_{n-l+1}, \dots, x_n)$-ben, ha $G(n)$-ben is össze vannak kötve). $G(x_{n-l+1}, \dots, x_n)$ nyilván nem tartalmaz $K(r-1)$-et s ezért az indukciós feltevés szerint van oly $G_1(l)$, mely $(r-2)$-kromatikus és melyre $G_1(l) \geqq G(x_{n-l+1}, \dots, x_n)$. A $G_1(n)$ gráfot mármost úgy kapjuk, hogy az $x_1, \dots, x_{n-l}$ pontok mindegyikét összekötjük a $G_1(l)$ gráf minden pontjával. Azonnal világos, hogy $G_1(n)$ r-kromatikus és könnyű belátni, hogy $G_1(n) \geqq G(n)$. Tudniillik az $x_1, \dots, x_{n-l}$ pontok foka $G(n)$-ben legfeljebb l, ($G(n)$-ben minden pont foka $\leqq l$), $G_1(n)$-ben pontosan l. Legyenek $y_{n-l+1}, \dots, y_n$ $G_1(l)$ pontjai, és $v_1(y_{n-l+i})$ e pontok fokai $G_1(l)$-ben. Nyilván

$$(2) \qquad v(y_{n-l+i}) = v_1(y_{n-l+i}) + n - l$$

ahol $v(y_{n-l+i})$ y_{n-l+i} foka $G_1(n)$-ben. Legyen x_{n-l+i} foka $G(n)$-ben $v(x_{n-l+i})$ és $G(x_{n-l+1}, \dots, x_n)$-ben $v_1(x_{n-l+i})$. Minthogy $G_1(l) \geqq G(x_{n-l+1}, \dots, x_n)$

$$(3) \qquad v_1(y_{n-l+i}) \geqq v_1(x_{n-l+i}).$$

Továbbá nyilvánvaló, hogy

$$(4) \qquad v(x_{n-l+i}) \leqq v_1(x_{n-l+i}) + n - l.$$

(2), (3) és (4)-ből azonnal adódik, hogy $G_1(n) \geqq G(n)$ és evvel tételünk be van bizonyítva.

Vizsgáljuk mármost a következő kérdést: Mekkora

$$\max \sum_{i=1}^{n} v(x_i)^l$$

ahol a maximum az összes oly n szögpontú gráfra veendő, mely nem tartalmaz $K(r)$-et és mely gráfokra éretik el a maximum?

Tételünkből azonnal következik, hogy az extrém gráf a $K(a_1, \dots, a_{r-1})$, $\sum_{i=1}^{r-1} a_i = n$ gráfok valamelyike s az extrém gráf ezen gráfok közül az elemi analízis eszközeivel könnyen megtalálható. Például ha $r=3$ és $1 \leqq l \leqq 3$, akkor az egyetlen extrém gráf a Turán-gráf, $r=3$ és $l=4$ esetén az extrém gráf már nem a Turán-gráf. Általában könnyű belátni, hogyha $1 \leqq l < 2r-2$, akkor az extrém gráf a Turán-gráf, de $l = 2r-2$-re már nem Turán-gráf.

Hajnal András kérdezte, hogy Simonovitscsal való tételem [2] élesíthető-e a következő értelemben: Legyen $n \to \infty$ és $G(n)$ oly n szögpontú gráf, mely nem tartalmaz egy fix r-kromatikus gráfot. Elhagyható-e akkor $G(n)$-ből $o(n^2)$ él úgy, hogy az így nyert $G(n)$ gráfhoz legyen egy $G_1(n)$ $(r-1)$-kromatikus gráf, melyre $G_1(n) \leqq G(n)$.

T. Sós Vera és én e tételt bebizonyítottuk, de a tétel valószínűleg még élesíthető lesz s itt most nem foglalkozunk vele.

Végül még egy kérdést szeretnék említeni: Legyen $G(n)$ háromszögnélküli, szögpontjai $x_1, \dots, x_n$. Mekkora a $v(x_i)$, $i=1, \dots, n$ sorozat szórásának maximuma és mely gráfokra éretik el a maximum?

IRODALOM

[1] B. ANDRÁSFAI, Neuer Beweis eines Graphentheoretischen Satzes von Turán, Publ. Math. Inst. Hung. Akad. 7 (1962), 193—196.

[2] P. ERDŐS, Extremal problems in graph theory, Theory of graphs and its Applications, Proc. symp. held at Smolenice in June 1963. 29—30, M. Simonovits, A method for solving extremal problems in graph theory, stability problems. Theory of Graphs, Proc. Coll. held at Tihany, Hungary, Akad. Kiadó 1968, 279—319, P. Erdős and M. Simonovits, A limit theorem in graph theory, Studia Math. Sci. Hungar. 1 (1966) 51—57.

[3] TURÁN PÁL, Egy gráfelméleti szélsőérték feladatról, Mat. és Fiz. Lapok 48 (1941), 436—452.

О ТЕОРЕМЕ ПАЛА ТУРАНА В ТЕОРИИ ГРАФОВ

ПАЛ ЕРДЁШ

ON THE GRAPH-THEOREM OF TURÁN

P. ERDŐS