SOME RECENT RESULTS ON EXTREMAL PROBLEMS IN GRAPH THEORY (Results)

P. ERDÖS *

Three years ago I gave a talk on extremal problems in graph theory at Smolenice [2]. I will refer to this paper as I. I will only discuss results which have been found since the publication of I. $\pi(\mathcal{G})$ will denote the number of vertices, $V(\mathcal{G})$ the number of edges of $\mathcal{G}$. $\mathcal{G}(n\,;\,l)$ will denote a graph of n vertices and l edges. The vertices of $\mathcal{G}$ will be denoted by letters $x, y, \ldots$ $\mathcal{G}(x_1, \ldots, x_k)$ will denote the subgraph of $\mathcal{G}$ spanned by the vertices $x_1, \ldots, x_k$. $v(x)$, the valence of x, denotes the number of edges incident to x. $\chi(\mathcal{G})$ will denote the chromatic number of $\mathcal{G}$, K_r the complete graph of r vertices $\mathcal{G}\left(r\,;\,\binom{r}{2}\right)$.

$K_r(p_1, \ldots, p_r)$ denotes the complete r-chromatic graph with p_i vertices of the i-th colour in which every two vertices of different colour are adjacent. C_n is a circuit having n edges.

Denote by $f(n\,;\,\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_k)$ the smallest integer so that every

$$\mathcal{G}(n\,;f(n\,;\,\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_k))$$

contains at least one of the graphs $\mathcal{G}_i$, $i = 1, \ldots, k$ as a subgraph. For the older literature on this subject I refer to I. Here I only state that in 1940 Turán [9] determined $f(n\,;\,K_r)$ for every $r \geqslant 3$, he proved

$$f(n\,;\,K_r) = \big(1 + o(1)\big)\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1}\right). \tag{1}$$

In fact Turán gave an explicit formula for $f(n\,;\,K_r)$ and determined the structure of the unique $\mathcal{G}\big(n\,;f(n\,;\,K_r) - 1\big)$ which does not contain a K_r, but (1) suffices for our purpose.

In a forthcoming paper [3] Simonovits and I proved the following result : Put

$$r = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \chi(\mathcal{G}_i)\,.$$

Then

$$\lim_{n=\infty} f(n\,;\,\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_k)/n^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1}\right). \tag{2}$$

(*) Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézete, Budapest, Hungary.

In other words the asymptotic relation (1) holds in the general case too.

(2) Follows easily from a theorem of Stone and myself [4] which states that if $n > n_0(p_1, ..., p_r, \varepsilon)$ then every

$$\mathscr{G}\left(n\,;\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right)\right)$$

contains $K_r(p_1, ..., p_r)$.

Recently I succeeded in proving the following stronger theorem : There is an $A = A(\varepsilon, r)$ so that for $n > n_0(\varepsilon, r)$ every

$$\mathscr{G}\left(n\,;\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right)\right)$$

contains a

$$K_r(p_1, ..., p_r) \qquad \text{with} \qquad p_r > \frac{n}{A^{p_1 \cdots, p_{r-1}}}\,. \tag{3}$$

In particular (3) implies that every

$$\mathscr{G}\left(n\,;\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right)\right)$$

contains a

$$K_r\big([c_\varepsilon(\log n)^{1/r-1}], ..., [c_\varepsilon(\log n)^{1/r-1}]\big)\,. \tag{4}$$

In [4] we only proved (4) with $(\log_{r-1} n)^{1-\varepsilon}$ instead of $c_\varepsilon(\log n)^{1/r-1}$ ($\log_r n$ is the r-fold iterated logarithm). It seems probable that both (3) and (4) are best possible, but this has been proved only for $r = 2$. In this paper we will not prove (3) and (4).

I have obtained the following sharpening of the theorem of Simonovits and myself :

Consider any one of the extremal graphs $\mathscr{G}\big(n\,; f(n\,; \mathscr{G}_1, ..., \mathscr{G}_k) - 1\big)$ which does not contain any of the graphs $\mathscr{G}_1, ..., \mathscr{G}_k$. Then there is a graph

$$K_{r-1}(p_1, ..., p_{r-1}), \sum_{i=1}^{r-1} p_i = n\,, \qquad p_i = \big(1 + o(1)\big)\frac{n}{r-1}\,, i = 1, ..., r-1\,,$$

so that our $\mathscr{G}\big(n\,; f(n\,; \mathscr{G}_1, ..., \mathscr{G}_k) - 1\big)$ is obtained from this

$$K_{r-1}(p_1, ..., p_{r-1})$$

by adding and subtracting $o(n^2)$ edges.

In fact I can prove the following stronger.

Theorem. *Let* $r \geqslant 3$, *and* $\mathscr{G}(n\,; l)$,

$$l = \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1} + o(1)\right)$$

be a graph which does not contain a $K_r(t, ..., t)$ for some fixed t. Then there is a

$$K_{r-1}(p_1, ..., p_{r-1}), \sum_{i=1}^{r-1} p_i = n, \qquad p_i = (1 + o(1)) \frac{n}{r-1}, \qquad i = 1, ..., r-1$$

which can be obtained from our $\mathcal{G}(n ; l)$ by adding and subtracting $o(n^2)$ edges.

Let $\chi(\mathcal{G}) = r$. Then for sufficiently large t, $\mathcal{G}$ is contained in a $K_r(t, ..., t)$. Thus our theorem is stronger then the previous assertion.

We will later prove the theorem for $r = 3$ and only outline the proof for $r > 3$.

Now we state without proof some further recent results : Let $\chi(\mathcal{G}) = 2$. The graph $(\mathcal{G} ; k)$ is defined as follows : Let $y_1, ..., y_k$ be k new vertices ; $(\mathcal{G} ; k)$ is obtained from $\mathcal{G}$ by adding the k new vertices $y_1, ..., y_k$ and by joining each of the y_i, $i = 1, ..., k$ to all the vertices of $\mathcal{G}$. I proved

$$f(n ; (\mathcal{G} ; k)) < \frac{n^2}{4} + c_k f(n ; \mathcal{G}) . \tag{5}$$

Kövári and the Turáns proved that [8]

$$f(n ; K_2(r, r)) < c_1 n^{2-1/r} . \tag{6}$$

In I. I stated that every $\mathcal{G}\left(n ; \frac{n^2}{4} + cn^{2-1/r}\right)$ contains a $K_3(r, r, r)$. In view of (6), (5) immediately implies this result.

Simonovits and I conjectured that for every $\mathcal{G}$:

$$f(n ; \mathcal{G}) = \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1}\right) + cn^{\alpha} + o(n^{\alpha}), \quad \chi(\mathcal{G}) = r \tag{7}$$

for some $0 \leqslant \alpha = \alpha(\mathcal{G}) < 2$. (7) if true will not be easy to prove. If $\chi(\mathcal{G}) = 2$ (7) would imply

$$\lim_{n=\infty} f(n ; \mathcal{G})/n^{\alpha} = c \qquad (c > 0) \tag{8}$$

for some $0 \leqslant \alpha < 2$. We are very far from being able to prove (8). If $\mathcal{G} = C_4$ then recently Brown and independently V. T. Sós, Rényi and I [5] proved that

$$\lim_{n=\infty} f(n ; C_4)/n^{3/2} = \frac{1}{2} .$$

(In I. I conjected that the above limit is $1/2\sqrt{2}$).

Brown [1] recently proved that

$$f(n ; K_2(3, 3)) > c_2 n^{5/3} .$$

Brown's proof seems to break down for $r > 3$ and does not prove the existence of

$$\lim_{n=\infty} f(n ; K_2(3, 3))/n^{5/3} .$$

The determination of $\alpha(\mathcal{G})$ seems to be a very difficult question. Perhaps the following result holds : Let the vertices of $\mathcal{G}$ be $x_1, ..., x_n$. Put

$$v(\mathcal{G}) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} v(x_i), v^*(\mathcal{G}) = \max v\big(\mathcal{G}(x_1, ..., x_k)\big)$$

where $x_1, ..., x_k$ runs through all the 2^n subsets of $x_1, ..., x_n$. Then

$$f(n\,;\mathcal{G}) < cn^{2-1/v^*(\mathcal{G})}. \tag{9}$$

(9) is known if $\mathcal{G}$ is $K_2(r, r)$. I can also prove (9) if $\mathcal{G}$ is the graph determined by the vertices and edges of a cube. In this case probably

$$\alpha(\mathcal{G}) = 2 - \frac{1}{v^*(\mathcal{G})} = \frac{5}{3}.$$

$\alpha(\mathcal{G}) = 2 - \dfrac{1}{v^*(\mathcal{G})}$ certainly does not always hold. In fact we have $v^*(C_6) = 2$ and $f(n\,;C_6) < cn^{4/3}$. A very special case of (9) was conjectured in [6]. It seems that $\alpha(\mathcal{G})$ can take on only the values $1 + \dfrac{1}{k}$, $k = 2, 3, ...$ and $2 - \dfrac{1}{k}$, $k = 1, 2, ...$

Now we prove our theorem. Assume first $r = 3$. We have to show that if $l = \dfrac{n^2}{4}\big(1 + o(1)\big)$ and $\mathcal{G}(n\,;l)$ does not contain a $K_3(t, t, t)$ for some fixed t then there is

$$K_2(p_1, p_2), \quad p_1 + p_2 = n, \quad p_1 = \big(1 + o(1)\big)\frac{n}{2}, \quad p_2 = \big(1 + o(1)\big)\frac{n}{2}$$

and $\mathcal{G}(n\,;l)$ differs from $K_2(p_1, p_2)$ by $o(n^2)$ edges.

First of all we can assume that all but $o(n)$ vertices of our $\mathcal{G}(n\,;l)$ have valence $\geqslant \dfrac{n}{2}\big(1 + o(1)\big)$. For if this would not be true let $x_1, ..., x_k$, $k = [\varepsilon n]$ ($\varepsilon > 0$ is small positive number independant of n), be the vertices of $\mathcal{G}(n\,;l)$ of valence $< \dfrac{n}{2}(1 - c)$. But then we see by a simple computation that $\big(c > c(\varepsilon)\big)$

$$v\big(\mathcal{G}(x_{k+1}, ..., x_n)\big) \geqslant \frac{n^2}{4}\big(1 + o(1)\big) - \frac{kn^2}{2}(1 - c) > \frac{(n-k)^2}{4}(1 + n), \tag{10}$$

$$n = n(\varepsilon, c) > 0.$$

(10) implies by the Erdös-Stone theorem that $\mathcal{G}(x_{k+1}, ..., x_n)$ and therefore our $\mathcal{G}(n\,;l)$ contains a $K_3(t, t, t)$ which contradicts our assumption.

Let now

$$x_1, ..., x_m, m = \big(1 + o(1)\big)\,n \tag{11}$$

be the vertices of $\mathcal{G}(n\,;l)$ which have valence $\geqslant \frac{n}{2}(1+o(1))$. By (11) it follows that the valence of all the vertices of $\mathcal{G}(x_1, ..., x_m)$ (in $\mathcal{G}(x_1, ..., x_m)$) is

$$\frac{m}{2}(1+o(1)) = \frac{n}{2}(1+o(1))$$

also, by (11)

$$V(\mathcal{G}(x_1, ..., x_m)) = \frac{m^2}{4}(1+o(1)) = \frac{n^2}{4}(1+o(1)). \tag{11}$$

Thus to prove our theorem it will suffice to show that there is a

$$K_2(p_1, p_2), \quad p_1 + p_2 = m, \quad p_1 = (1+o(1))\frac{m}{2}, \quad p_2 = (1+o(1))\frac{m}{2},$$

which differs from $\mathcal{G}(x_1, ..., x_m)$ by $o(m^2)$ edges. Thus it is clear that without loss of generality we can assume that all the vertices of our $\mathcal{G}(n\,;l)$ have valence $\geqslant \frac{n}{2}(1+o(1))$, and henceforth we will always make this assumption (*).

An edge of $\mathcal{G}(n\,;l)$ is called bad if it is contained in only $o(n)$ triangles of our $\mathcal{G}(n\,;l)$. Assume first that $\mathcal{G}(n\,;l)$ has at least εn^2 bad edges. By the Erdös-Stone theorem there are vertices $x_1, ..., x_t\,; y_1, ..., y_t$ so that all the edges (x_i, y_j), $1 \leqslant i, j \leqslant t$ are bad. Now since each of the vertices x_i and y_j have valence $(1+o(1))\frac{n}{2}$ and each of the edges (x_i, y_j) are contained in $o(n)$ triangles, a simple argument shows that the remaining $n - 2t$ vertices of our $\mathcal{G}(n\,;l)$ can be divided into two classes (neglecting $o(n)$ vertices)

$$z_1, ..., z_{u_1}\,; \quad w_1, ..., w_{u_2}, \quad u_1 = (1+o(1))\frac{n}{2}, \quad u_2 = (1+o(1))\frac{n}{2}$$

so that all the x_i are joined to all the z's and all the y_j are joined to all the w's.

If both graphs $\mathcal{G}(z_1, ..., z_{u_1})$ and $\mathcal{G}(w_1, ..., w_{u_2})$ have $o(n^2)$ edges then a simple computation shows that the $K_2(u_1, u_2)$ having the vertices $z_1, ..., z_{u_1}\,; w_1, ..., w_{u_2}$ differs from our $\mathcal{G}(n\,;l)$ by $o(n^2)$ edges which proves our theorem (the remaining $n - u_1 - u_2 = o(n)$ vertices can clearly be ignored). If say $\mathcal{G}(z_1, ..., z_{u_1})$ does not have $o(n^2)$ edges then by the Erdös-Stone theorem it contains a $K_2(t, t)$ having the vertices $z_1, ..., z_t\,; z_{t+1}, ..., z_{2t}$. But then the graph $\mathcal{G}(x_1, ..., x_t, z_1, ..., z_t, z_{t+1}, ..., z_{2t})$ clearly contains a $K_3(t, t, t)$ which contradicts our assumption.

Henceforth we can thus assume that there are $o(n^2)$ bad edges. Thus there are $\frac{n^2}{4}(1+o(1))$ edges each of which are contained in rn triangles. We now

(*) We now no longer will have to use $l = \frac{n^2}{4}(1+o(1))$, $l > cn^2$ would suffice, but this is no real gain since our assumption $v(x_i) = (1+o(1))\frac{n}{2}$, $i = 1, ..., n$ already implies $l = \frac{n^2}{4}(1+o(1))$.

deduce from this assumption that $\mathcal{G}(n\,;l)$ contains a $K_3(t, t, t)$ (in fact we will only use that $\mathcal{G}(n\,;l)$ has εn^2 edges each of which are contained in rn triangles). Let $e_1, \ldots, e_s$, $s > \varepsilon n^2$ be the edges of $\mathcal{G}(n\,;l)$ each of which are contained in at least rn triangles. Let $x_1^{(i)}, \ldots, x_{r_i}^{(i)}$ be the vertices which form a triangle with e_i, $r_i > rn$. Form all possible t-tuples from the $x_j^{(i)}$, $1 \leqslant j \leqslant r_i$ for all i, $1 \leqslant i \leqslant s$. In this way we get

$$\sum_{i=1}^{s} \binom{r_i}{t} \geqslant \varepsilon n^2 \frac{(rn)^t}{3^t\, t\,!} > \varepsilon n^2 \left(\frac{r}{3}\right)^t \binom{n}{t}$$

t-tuples. Since the total number of t-tuples formed from n elements is $\binom{n}{t}$ there is a t-tuple say $z_1, \ldots, z_t$ which corresponds to at least $\varepsilon \left(\frac{r}{3}\right)^t n^2$ edges e_i — in other words each of these e_i form a triangle with all the z_j, $j = 1, \ldots, t$. By the theorem of Erdös-Stone these edges determine a $K_2(t, t)$ with the vertices $x_1, \ldots, x_t\,; y_i, \ldots, y_t$. Thus finally $\mathcal{G}(x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_t, z_1, \ldots, z_t)$ contains a $K_3(t, t, t)$ as stated. But by our assumption our $\mathcal{G}(n\,;l)$ does not contain a $K_3(t, t, t)$. This contradiction completes the proof of our theorem.

By slightly greater care we could prove the following stronger statement : Let $\mathcal{G}(n\,;l)$, $l = \frac{n^2}{4}(1 + o(1))$ be a graph which does not contain a $K_3(t, t, t)$ for $t = o(\log n)$. Then there is a

$$K_{r-1}(p_1, \ldots, p_{r-1}), \qquad \sum_{i=1}^{r-1} p_i = n, \quad p_i = \big(1 + o(1)\big)\frac{n}{r-1}, \quad i = 1, \ldots, r-1$$

which differs from our $\mathcal{G}(n\,;l)$ by $o(n^2)$ edges.

The proof for $r > 3$ does not substantially differ from $r = 3$. As in the case $r = 3$ we first show that without loss of generality we can assume that every vertex of $\mathcal{G}(n\,;l)$ has valence $\geqslant n\left(1 - \frac{1}{r-1} + o(1)\right)$. An $(r-1)$-tuple $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r-1}}$ formed from the vertices $x_1, \ldots, x_n$ of $\mathcal{G}(n\,;l)$ is called bad if there are only $o(n)$ of the x_j so that each edge of the complete r-tuple $\{ x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r-1}}, x_j \}$ belongs to our $\mathcal{G}(n\,;l)$. Now as in the case $r = 3$ we first assume that there are more than $\varepsilon \binom{n}{r-1}$ bad $(r-1)$-tuples. We complete the proof as in the case $r = 3$ only instead the Erdös-Stone theorem we here have to use the following result [7] : Let $e_1, \ldots, e_k$, $n > n_0(\varepsilon, k, r)$ $k > \varepsilon \binom{n}{r-1}$ be a family of $(r-1)$-tuples formed from the vertices $x_1, \ldots, x_n$. Then there are $(r-1)\,t$ vertices $x_i^{(j)}$, $1 \leqslant i \leqslant t\,; 1 \leqslant j \leqslant r-1$ so that all the t^{r-1} $(r-1)$-tuples $\{ x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}, \ldots, x_{i_{r-1}}^{(r-1)} \}$ are e's.

In the second case there are only $o\binom{n}{r-1}$ bad $(r-1)$-tuples. It is not difficult to deduce then that our $\mathcal{G}(n\,;l)$ contains more than εn^{r-1} complete

$(r-1)$-tuples so that to each of them there are at least rn vertices each of which are joined to all the vertices of the $(r-1)$-tuple. Using this result and [7] we can complete the proof as in the case $r = 3$.

By the same method we can prove the following sharper result :

$$\text{every} \quad \mathscr{G}\left(n\,;\frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{r-1}-\varepsilon\right)\right)$$

which does not contain a $K_r(t, \ldots, t)$, contains for $n > n_0(r, t, \varepsilon)$ an $(r-1)$-chromatic subgraph having more than $\frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{r-1}-c_r\,\varepsilon\right)$ edges. I just learn that Mr Simonovits proved this independently by a different method.

REFERENCES

[1] The Brown's paper will appear in the *Bulletin of the Canadian Math. Soc.*

[2] Erdös, P., Extremal problems in graph theory, Theory of graphs and its applications *Proc. Symp. Smolenice*, Plublishing House of the Czechoslovak Academy of Science, Prague, 1964.

[3] Our paper will appear in *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.*

[4] Erdös, P. and Stone, A., On the structure of linear graphs, *Bull. American Mathematical Society*, **52,** 1946, 1087-1091.

[5] Brown's paper will appear in the *Bull. Canadian Math. Soc.*, our paper will appear in *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.*

[6] Erdös, P., on some extremal problems in graph theory, *Israel J. of Math.*, **3,** 1965, 113-116.

[7] Erdös, P., *On extremal problems of graph and generalised* graphs, *Israel J. of Math.*, **2,** 1964, 184-190.

[8] Kövári, T., Sós, V. T. and Turán. P., On a problem of K. Zarankiewicz, *Coll. Math.*, **3,** 1954, 50-57.

[9] Turán, P., Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie (written in Hungarian), *Mat. és Fiz. Lapok*, **48,** 1941, 436-452. See also. Turán, P., On the theory of graphs, *Coll. Math.*, **3,** 1954, 19-30.

RÉSULTATS RÉCENTS SUR LES PROBLÈMES EXTRÉMAUX EN THÉORIE DES GRAPHES (Résultats)

P. ERDÖS

J'ai fait une conférence à Smolence il y a trois ans sur les problèmes extrêmaux en théorie des graphes [2]. Je citerai cet article comme I. Je discuterai seulement de résultats obtenus depuis la publication de I. On note $\pi(\mathcal{G})$ le nombre de sommets, $v(\mathcal{G})$ le nombre d'arêtes de G. On note $\mathcal{G}(n\,;l)$ un graphe de n sommets et l arêtes. Les sommets de $\mathcal{G}$ seront notés par des lettres $x, y, \ldots$ et le sous-graphe engendré par les sommets $x_1, \ldots, x_k$ sera noté $G(x_1, \ldots, x_k)$. On notera $v(x)$ la valence de x, c'est-à-dire le nombre de sommets incidents à x. $\chi(\mathcal{G})$ sera le nombre chromatique de $\mathcal{G}$; K_r sera le graphe complet de r sommets $\mathcal{G}\left(r\,;\binom{r}{2}\right)$; $K_r(p_1, \ldots, p_r)$ sera le graphe complet r-chromatique avec p_i sommets de la i-ième couleur et deux sommets de couleur différente adjacents ; C_n est un circuit avec n arêtes.

Soit $f(n\,;\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_k)$ le plus petit entier tel que tout $\mathcal{G}(n\,;f(n, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_k))$ contienne au moins un des graphes $\mathcal{G}_i$, $i = 1, \ldots, k$ comme sous-graphe.

On consultera I pour la bibliographie ancienne du sujet. Je remarquerai simplement que Turán, en 1940 a déterminé $f(n\,;K_r)$; pour tout $r \geqslant 3$, il a démontré

$$f(n\,;K_r) = [1 + o(1)]\,\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1}\right). \tag{1}$$

Turán donne en fait une formule explicite pour $f(n\,;K_r)$ et il détermine la structure de l'unique $\mathcal{G}(n\,;f(n\,;K_r) - 1)$ qui ne contient pas de K_r ; ici (1) suffira.

Simonovits et moi-même avons prouvé le résultat suivant qui paraîtra dans un prochain article. Posons :

$$r = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \chi(\mathcal{G}_i)\,,$$

alors

$$\lim_{n=\infty} f(n\,;\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_k)/n^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1}\right). \tag{2}$$

Autrement dit la relation asymptotique (1) reste valable dans le cas général.

(2) s'obtient facilement à partir du théorème suivant de Stone et moi-même : si $n > n_0(p_1, \ldots, p_r, \varepsilon)$, alors tout

$$\mathcal{G}\left(n ; \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right)\right)$$

contient $K_r(p_1, \ldots, p_r)$.

J'ai réussi récemment à prouver le théorème plus fort suivant : il existe $A = A(\varepsilon, r)$, tel que pour $n > n_0(\varepsilon, r)$, tout

$$\mathcal{G}\left(n ; \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n-1} + \varepsilon\right)\right)$$

contient un

$$K_r(p_1, \ldots, p_r), \qquad \text{avec} \qquad p_r > \frac{n}{A^{p_1 \ldots p_{r-1}}} . \tag{3}$$

De (3) on déduit en particulier que tout

$$\mathcal{G}\left(n ; \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right)\right)$$

contient un

$$K_r\left([c_\varepsilon(\log n)^{1/r-1}], \ldots, [c_\varepsilon(\log n)^{1/r-1}]\right) . \tag{4}$$

Dans [4], nous démontrons (4) seulement avec $(\log_{r-1} n)^{1-\varepsilon}$ et non $c_\varepsilon(\log n)^{1/r-1}$ ($\log_r n$ est le logarithme itéré r fois). (3) et (4) ne peuvent sans doute pas s'améliorer, mais ceci n'a été prouvé que pour $r = 2$. Dans cette communication nous ne démontrerons pas (3) et (4).

J'ai accentué ainsi le théorème de Simonovits et moi-même : considérons l'un quelconque des graphes extrémaux $\mathcal{G}(n ; f(n, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_k) - 1)$ qui ne contient aucun des graphes $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_k$. Il existe alors un graphe

$$K_{r-1}(p_1, \ldots, p_{r-1}) ,$$

avec $\quad \sum_{i=1}^{r-1} p_i = n, \qquad p_i = (1 + o(1)) \dfrac{n}{r-1}, \qquad i = 1, \ldots, r-1 ,$

tel que $\mathcal{G}(n ; f(n ; \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_k) - 1)$ s'obtienne à partir de $K_{r-1}(p_1, \ldots, p_{r-1})$ par addition et soustraction de $o(n^2)$ arêtes.

En fait, je peux démontrer le résultat plus fort suivant :

Théorème. *Soient* $r \geqslant 3$, $\mathcal{G}(n ; l)$, *avec*

$$l = \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1} + o(1)\right)$$

un graphe qui ne contient pas de $K_r(t, ..., t)$ pour un t fixé ; il existe alors un

$$K_{r-1}(p_1, ..., p_{r-1}), \sum_{i=1}^{r-1} p_i = n\,; \quad p_i = (1 + o(1))\frac{n}{r-1}, \quad i = 1, ..., r-1$$

qu'on peut obtenir de $\mathcal{G}(n\,; l)$ par addition et suppression de $o(n^2)$ arêtes.

Soit $\chi(\mathcal{G}) = r$. Alors pour t assez grand, $\mathcal{G}$ est contenu dans $K_r(t, ..., t)$. Notre théorème est donc plus fort que l'assertion précédente.

Nous démontrons ce théorème plus loin pour $r = 3$ et nous esquisserons la preuve pour $r > 3$.

Enonçons maintenant quelques résultats récents sans démonstration. Soit $\chi(\mathcal{G}) = 2$. On définit le graphe $(\mathcal{G}\,; k)$ comme suit : soient $y_1, ..., y_k$, k nouveaux sommets ; $(\mathcal{G}\,; k)$ s'obtient à partir de $\mathcal{G}$ en lui ajoutant ces k nouveaux sommets et en joignant chacun des y_i, $i = 1, ..., k$ à chacun des sommets de $\mathcal{G}$.

Je démontre

$$f(n\,; (\mathcal{G}\,; k)) < \frac{n^2}{4} + c_k f(n\,; \mathcal{G})\,. \tag{5}$$

Kövári et Turán ont démontré [8].

$$f(n\,; K_2(r, r)) < c_1\, n^{2-1/r}\,. \tag{6}$$

Dans I, j'établis que tout $\mathcal{G}\left(n, \dfrac{n^2}{4} + cn^{2-1/r}\right)$ contient un $K_3(r, r, r)$; ce résultat provient immédiatement de (5), compte tenu de (6). Simonovits et moi-même conjecturons que pour tout $\mathcal{G}$:

$$f(n\,; \mathcal{G}) = \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1}\right) + cn^\alpha + o(n^\alpha), \quad \chi(\mathcal{G}) = r \tag{7}$$

pour un α, avec $0 \leqslant \alpha = \alpha(\mathcal{G}) < 2$. Si (7) est vrai, il ne sera pas facile à démontrer. Pour $\chi(\mathcal{G}) = 2$, (7) entraînerait

$$\lim_{n=\infty} f(n\,; \mathcal{G})/n^\alpha = c \quad (c > 0) \tag{8}$$

pour un α, avec $0 \leqslant \alpha < 2$. Or nous sommes très loin de pouvoir démontrer (8). Pour $\mathcal{G} = C_4$, Brown et indépendamment V. T. Sós, A. Rényi et moi-même [5] ont prouvé récemment :

$$\lim_{n=\infty} f(n\,; C_4)/n^{3/2} = \frac{1}{2}.$$

(Dans I, j'avais conjecturé que cette limite était $1/2\sqrt{2}$.)

Brown a récemment démontré [1] :

$$f(n\,; K_2(3, 3)) > c_2\, n^{5/3}\,.$$

La preuve de Brown semble échouer pour $r > 3$ et elle ne démontre pas l'existence de

$$\lim_{n=\infty} f\left(n\,;K_2(3,3)\right)/n^{5/3}\,.$$

La détermination de $\alpha(G)$ semble une question très difficile. On a peut-être le résultat suivant ; soient $x_1, \ldots, x_n$ les sommets de G. Posons :

$$v(\mathscr{G}) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} v(x_i), \qquad v^*(\mathscr{G}) = \max v\left(\mathscr{G}(x_1, \ldots, x_k)\right)$$

où $x_1, \ldots, x_k$ appartiennent aux 2^n sous-ensembles de $x_1, \ldots, x_n$. Alors :

$$f(n\,;\mathscr{G}) < cn^{2-1/v^*(\mathscr{G})}\,. \tag{9}$$

(9) est vrai pour $\mathscr{G} = K_2(r, r)$. Je peux aussi le démontrer si $\mathscr{G}$ est le graphe sommets et arêtes d'un cube. On a probablement dans ce cas

$$\alpha(\mathscr{G}) = 2 - \frac{1}{v^*(\mathscr{G})} = \frac{5}{3}\,.$$

Mais $(\mathscr{G})$ n'est certainement pas toujours égal à $2 - \dfrac{1}{v^*(\mathscr{G})}$. Ainsi on a $v^*(C_6) = 2$ et $f(n\,; C_6) < cn^{4/3}$. On a conjecturé un cas très particulier de (9) dans [9]. Il semble que $\alpha(\mathscr{G})$ ne puisse prendre que les valeurs

$$1 + \frac{1}{k}, \qquad k = 2, 3, \ldots, \quad \text{et} \quad 2 - \frac{1}{k}, \qquad k = 1, 2 \ldots$$

Nous démontrons maintenant notre théorème. Supposons d'abord $r = 3$. On doit montrer que si

$$l = \frac{n^2}{4}\left(1 + o(1)\right) \quad \text{et} \quad \mathscr{G}(n\,; l)$$

est un graphe ne contenant pas de $K_3(t, t, t)$ pour un t fixé, alors il existe un

$$K_2(p_1, p_2), \quad \text{avec} \quad p_1 + p_2 = n, \quad p_1 = \left(1 + o(1)\right)\frac{n}{2}, \quad p_2 = \left(1 + o(1)\right)\frac{n}{2}$$

tel que $\mathscr{G}(n\,; l)$ et $K_2(p_1, p_2)$ ne diffèrent que par $o(n^2)$ arêtes.

On peut d'abord supposer que tous les sommets de $\mathscr{G}(n, l)$, à l'exception de $\sigma(n)$, ont une valence $\geqslant \dfrac{n}{2}\left(1 + o(1)\right)$. En effet, si cela est faux, soient $x_1, \ldots, x_k$ les sommets de $\mathscr{G}(n\,; l)$ de valence $< \dfrac{n}{2}(1 - c)$, avec $k = [\varepsilon n]$ ($\varepsilon > 0$ est un nombre positif, petit, indépendant de n). Mais alors un calcul simple montre $\left(c > c(\varepsilon)\right)$

$$v\left(\mathscr{G}(x_{k+1}, \ldots, x_n)\right) \geqslant \frac{n^2}{4}\left(1 + o(1)\right) - \frac{\varepsilon n^2}{2}(1 - c) > \frac{(n-k)^2}{4}(1 + n)\,, \tag{10}$$

$n = n(\varepsilon,\ c) > 0$.

Par le théorème d'Erdös-Stone on déduit de (10) que $\mathscr{G}(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ et donc $\mathscr{G}(n\,;\,l)$ contient un $K_3(t, t, t)$ ce qui contredit notre hypothèse.

Soient maintenant

$$x_1, \ldots, x_m, \quad m = \big(1 + o(1)\big)\, n\,, \tag{11}$$

les sommets de $\mathscr{G}(n\,;\,l)$ de valence $\geqslant \frac{n}{2}\big(1 + o(1)\big)$. De (11), on déduit que la valence de tous les sommets de $\mathscr{G}(x_1, \ldots, x_m)$ $\big($dans $\mathscr{G}(x_1, \ldots, x_m)\big)$ est

$$\frac{m}{2}\big(1 + o(1)\big) = \frac{n}{2}\big(1 + o(1)\big)\,;$$

de même, par (11),

$$v\big(\mathscr{G}(x_1, \ldots, x_m)\big) = \frac{m^2}{4}\big(1 + o(1)\big) = \frac{n^2}{4}\big(1 + o(1)\big)\,.$$

Donc, pour démontrer notre théorème, il suffit de démontrer l'existence de

$$K_2(p_1, p_2), \qquad p_1 + p_2 = m, \qquad p_1 = \big(1 + o(1)\big)\frac{m}{2}\,, \qquad p_2 = \big(1 + o(1)\big)\frac{m}{2}$$

ne différant de $\mathscr{G}(x_1, \ldots, x_m)$ que par $o(m^2)$ arêtes. Il est donc clair qu'on peut supposer, sans perte de généralité, tous les sommets de $\mathscr{G}(n\,;\,l)$ de valence $\geqslant \frac{n}{2}\big(1 + o(1)\big)$; cette hypothèse sera toujours faite désormais. (Nous n'aurons plus maintenant à utiliser $l = \frac{n^2}{4}\big(1 + o(1)\big)$; $l > cn^2$ est suffisant, mais ceci n'est pas en fait une amélioration, car de notre hypothèse

$$v(x_i) = \big(1 + o(1)\big)\frac{n}{2}\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,,$$

on déduit

$$l = \frac{n^2}{4}\big(1 + o(1)\big)\,.\Big)$$

On dit qu'une arête de $\mathscr{G}(n\,;\,l)$ est « mauvaise » si elle est contenue seulement dans $o(n)$ triangles de $\mathscr{G}(n\,;\,l)$. Supposons d'abord que $\mathscr{G}(n\,;\,l)$ ait au moins n arêtes mauvaises. Du théorème d'Erdös-Stone on déduit qu'il y a des sommets $x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_t$ tels que toutes les arêtes (x_i, y_j), $1 \leqslant i, j \leqslant t$ sont mauvaises. Maintenant tous les sommets x_i, y_j étant de valence $\big(1 + o(1)\big)\frac{n}{2}$ et toutes les arêtes (x_i, y_j) étant contenues dans $o(n)$ triangles, un argument simple montre que les $n - 2\,t$ sommets restants de $\mathscr{G}(n\,;\,l)$ peuvent être divisés en deux classes $\big($en négligeant $o(n)$ sommets$\big)$

$$z_1, \ldots, z_{u_1}\,;\, w_1, \ldots, w_{u_2}, \qquad u_1 = \big(1 + o(1)\big)\frac{n}{2}\,, \qquad u_2 = \big(1 + o(1)\big)\frac{n}{2}$$

telles que tous les x_i sont joints à tous les z et tous les y_j sont joints à tous les w.

Si les deux graphes $\mathcal{G}(z_1, ..., z_{u_1})$ et $\mathcal{G}(w_1, ..., w_{u_2})$ ont $o(n^2)$ arêtes, un calcul simple montre alors que $K_2(u_1, u_2)$, de sommets $z_1, ..., z_{u_1}, w_1, ..., w_{u_2}$ diffère de $\mathcal{G}(n\,;\,l)$ de $o(n^2)$ arêtes, ce qui démontre notre théorème (il est clair qu'on peut négliger les $n - u_1 - u_2 = o(n)$ sommets restants).

Si par exemple $\mathcal{G}(z_1, ..., z_{u_1})$ n'a pas $o(n^2)$ arêtes, alors du théorème d'Erdös-Stone, on déduit qu'il contient un $K_2(t, t)$ de sommets $z_1, ..., z_t\,;\, z_{t+1}, ..., z_{2t}$. Mais alors, il est clair que le graphe $\mathcal{G}(x_1, ..., x_t\,;\, z_1, ..., z_t, z_{t+1}, ..., z_{2t})$ contient un $K_3(t, t, t)$ ce qui contredit notre hypothèse.

On en déduit qu'on peut supposer le nombre d'arêtes mauvaises égales à $o(n^2)$. Il y a donc $\frac{n^2}{4}\,(1 + o(1))$ arêtes chacune contenue dans rn triangles. Il en résulte que $\mathcal{G}(n\,;\,l)$ contient un $K_3(t, t, t)$. (En fait on utilisera seulement le fait que $\mathcal{G}(n\,;\,l)$ a εn^2 arêtes chacune contenue dans rn triangles). Soient $e_1, ..., e_s$, $s > \varepsilon n^2$ les arêtes de $\mathcal{G}(n\,;\,l)$ dont chacune est contenue dans au moins rn triangles. Soient $x_1^{(i)}, ..., x_{n_i}^{(i)}$ les sommets formant un triangle avec e_i, $r_i > rn$. Formons tous les t-uples des $x_j^{(i)}$, $1 \leqslant j \leqslant r_i$ pour tous les i, $1 \leqslant i \leqslant s$. On obtient ainsi

$$\sum_{i=1}^{s} \binom{r_i}{t} \geqslant \varepsilon n^2 \frac{(rn)^t}{3^t t!} > \varepsilon n^2 \left(\frac{r}{3}\right)^t \binom{n}{t}$$

t-uples. Puisque le nombre total de t-uples formés à partir de n éléments est $\binom{n}{t}$, il existe un t-uple, $z_1, ..., z_t$ correspondant à au moins $\varepsilon(r/3)^t\, n^2$ arêtes e_i ; autrement dit chacun de ces e_i forme un triangle avec tous les z_j, $j = 1, ..., t$. Du théorème d'Erdös-Stone, on déduit que ces arêtes déterminent un $K_2(t, t)$ de sommets $x_1, ..., x_t\,;\, y_1, ..., y_t$. Ainsi $\mathcal{G}(x_1, ..., x_t, y_1, ..., y_t\,;\, z_1, ..., z_t)$ contient un $K_3(t, t, t)$ comme il était annoncé. Mais par hypothèse $\mathcal{G}(n\,;\,l)$ ne contient pas de $K_3(t, t, t)$. Cette contradiction achève la démonstration de notre théorème.

Avec un peu plus de soin, on peut prouver le résultat plus fort suivant :

Soit $\mathcal{G}(n, l)$, avec $l = \frac{n^2}{4}(1 + o(1))$, un graphe qui ne contient pas de $K_3(t, t, t)$ pour $t = o(\log n)$. Alors il y a un

$$K_{r-1}(p_1, ..., p_{r-1}), \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{r-1} p_i = n, \quad p_i = (1 + o(1))\frac{n}{r-1}, i = 1, ..., r-1$$

qui diffère de $\mathcal{G}(n\,;\,l)$ par $o(n^2)$ arêtes.

La preuve pour $r > 3$ ne diffère pas substantiellement de celle pour $r = 3$. Comme dans ce cas, on montre d'abord qu'on peut supposer, sans perte de généralité, tous les sommets de $\mathcal{G}(n\,;\,l)$ de valence $\geqslant n\left(1 - \frac{1}{r-1} + o(1)\right)$.

On dit qu'un $(r-1)$-tuple $x_{i_1}, ..., x_{i_{r-1}}$ pris parmi les sommets $x_1, ..., x_n$ de

$\mathcal{G}(n\ ;\ l)$ est mauvais, si il y a seulement $o(n)$ x_j tels que toute arête du r-tuple complet $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r-1}}, x_j\}$ appartient à $G(n\ ;\ l)$. Ensuite, comme pour $r = 3$, on suppose d'abord que le nombre des $(r - 1)$-tuples mauvais est supérieur à $\varepsilon \binom{n}{r-1}$. On complète la démonstration comme dans le cas $r = 3$; mais au lieu du théorème d'Erdös-Stone, on utilise le résultat suivant [7]. Soient

$$e_1, \ldots, e_k, \qquad n > n_0(\varepsilon, k, r), \qquad k > \varepsilon \binom{n}{r-1}$$

une famille de $(r - 1)$-tuples formée à partir des sommets $x_1, \ldots, x_n$; il y a alors $(r - 1)\ t$ sommets $x_i^{(j)}$, $1 \leqslant i \leqslant t\ ;\ 1 \leqslant j \leqslant r - 1$, tels que les t^{r-1} $(r - 1)$-tuples $\{x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}, \ldots, x_{i_{r-1}}^{(r-1)}\}$ sont des e.

Dans le second cas, il y a seulement $o\binom{n}{r-1}$ $(r - 1)$-tuples mauvais. Il n'est pas difficile d'en déduire que $\mathcal{G}(n\ ;\ l)$ contient plus de $\varepsilon n^r (r - 1)$-tuples complets, tels que pour chacun d'entre eux, il y a au moins rn sommets joints à tous les sommets du $(r - 1)$-tuple. En utilisant ce résultat et [7], nous pouvons achever la démonstration comme dans le cas $r = 3$.

On peut prouver par la même méthode le résultat suivant, plus incisif :

tout $$\mathcal{G}\left(n\ ;\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1} - \varepsilon\right)\right)$$

ne contenant pas de $K_r(t, \ldots, t)$, contient, pour $n > n_0(n, t, \varepsilon)$, un sous-graphe $(r - 1)$-chromatique ayant plus de $\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n-1} - c_r\,\varepsilon\right)$ arêtes. Je viens juste d'apprendre que M. Simonovits a démontré indépendamment ce résultat par une méthode différente.