Véletlen mátrixok és a szabad Poisson-eloszlás

ORAVECZ FERENC

1999

ABSTRACT. Replace this text with your own abstract.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetõmnek, Dr. Petz Dénes Professzornak a munkám során nyújtott segítségéért. Mind a témaválasztásban, mind a konkrét célok kijelölésében jelentõs szerepe volt; mint ahogy a felmerülõ problémák megoldásában is gyakran segített tanácsaival, megjegyzéseivel. A vele folytatott beszélgetések során a matematika más területeirõl is számos érdekes új eredményt ismertem meg, s látásmódjából, a matematika tudományához való hozzáállásából is sokat tanultam. Nélküle e munka sohasem készült volna el.

Köszönettel tartozom Dr. Marek Bozejko Professzornak, a Wroclavi Egyetem Matematikai Intézetének vezetõjének is, akivel rövid ideig volt alkalmam együtt dolgozni. Beszélgetéseink során született meg a 4. fejezetben leírtak alapötlete, s a kezdetben felmerülõ kérdések némelyikét is közösen válaszoltuk meg.

Végül szeretnék köszönetet mondani menyasszonyomnak, Antal Emesének az ábrák elkészítéséért s a kézirat gondos átolvasásáért, melynek során számos hibára hívta fel a figyelmemet.

Budapest, 1999 január 25.

Az értekezés bírálatai és a védésrõl készült jegyzõkönyv a késõbbiekben a Budapesti Mûszaki Egyetem Természettudományi Karának Dékáni Hivatalában elérhetõk.

TARTALOM

1. BEVEZETÉS

Az 1980-as években Dan Voiculescu von Neumann algebrák szabad szorzatának vizsgálata során megteremtette a szabad valószínûségelmélet alapjait. A terület nyomban gyors fejlõdésnek indult, és gyümölcsözõnek bizonyult mind a funkcionálanalízis, mind a matematikai fizika sok területén.

A szabad valószínûségelmélet kiindulási fogalma, a nemkommutatív valószínûségi mezõ, a klasszikus valószínûségszámításból kiindulva érthetõ meg legkönnyebben. Tekintsük egy adott eseménytéren értelmezett azon klasszikus valószínûségi változókat, melyeknek minden momentuma létezik. Ezek a pontonkénti összeadással és szorzással algebrát alkotnak, mely algebrán a várható érték egy lineáris funkcionál. Ezek mintájára az $(\mathcal{A}, \varphi)$ párt nemkommutatív valószínûségi mezõnek hívjuk, ha $\mathcal{A}$ egy egységelemes algebra a komplex számtest fölött és φ egy $\mathcal{A} \to \mathbf{C}$ lineáris funkcionál. Az $\mathcal{A}$ algebra elemeit nemkommutatív valószínûségi változóknak hívjuk, $\varphi(a)$ az $a \in \mathcal{A}$ nemkommutatív valószínûségi változó várható értéke, míg $\varphi(a^n)$ a n-edik momentuma. Amennyiben az a nemkommutatív valószínûségi változó $\varphi(a^n)$ momentumsorozata egy μ valószínûségi mértéket határoz meg a valós számegyenesen (hogy ez mikor áll fönn, arra a momentum probléma eredményei nyújtanak támpontot), akkor ezt a μ mértéket tekintjük a eloszlásának. Más esetekben lényegében magát a $\varphi(a^n)$ momentumsorozatot nevezzük a eloszlásának. Ehhez hasonlóan, "vegyes momentumaikon" keresztül értelmezhetõ nemkommutatív valószínûségi változók együttes eloszlása is.

A szabad valószínûségelméletben a függetlenség klasszikus fogalmának az úgynevezett szabad kapcsolat fog megfelelni. Ennek formális definíciója lényegében azt fejezi ki, hogy az egymással szabad kapcsolatban lévõ nemkommutatív valószínûségi változókra - mint az $\mathcal{A}$ algebra elemeire - nem írható fel semmiféle algebrai összefüggés.

A klasszikus konvolúció mintájára szabad kapcsolatban lévõ nemkommutatív valószínûségi változók összegének eloszlásán keresztül értelmezhetõ valószínûségi mértékek szabad konvolúciója. Míg a szokásos konvolúciót a Fourier-transzformáció logaritmusa linearizálja, addig a szabad konvolúciót az úgynevezett R-transzformált, mely ezek alapján a Fourier-transzformáció (vagy valószínûségi változókra vonatkoztatva a karakterisztikus függvény) logaritmusának szabad analogonjának tekinthetõ. Az együttes eloszláshoz hasonlóan az R-transzformált is értelmezhetõ nemkommutatív valószínûségi változók együttesére, de a fogalom (s fõleg az írásmód) ilyenkor az egyváltozós estehez képest bonyolultabb. A kétváltozós R-transzformált segítségével definiálhatók az R-diagonális párok, melyek R-transzformáltja bizonyos speciális alakkal rendelkezik. Ezek a szabad valószínûségelméletben fontos szerepet töltenek be, s velük kapcsolatos a dolgozat utolsó fejezete is.

Elsõ látásra meglepõ, hogy a klasszikus valószínûségszámítás sok mély tétele is szinte változatlan formában érvényben marad a szabad valószínûségelméletben, ha a bennük szereplõ fogalmakat szabad megfelelõikre cseréljük. Így például, a központi határeloszlástétel mintájára megmutatható, hogy nulla várható értékû, egy szórású, egymással szabad kapcsolatban lévõ nemkommutatív valószínûségi változók normált összegének eloszlása határesetben - ha az összeadandók számát minden határon túl növeljük - egy jól meghatározott eloszlás lesz. Ez az eloszlás - az úgynevezett standard Wigner-eloszlás - ugyanazt a szerepet tölti be a szabad elméletben, mint a standard Gauss-eloszlás a klasszikus valószínûségszámításban. Érdekes, hogy ezt az eloszlást Wigner már jóval korábban, az ötvenes években leírta, amikor az atommag energiaszintjeinek kísérleti úton meghatározott statisztikáját próbálta véletlen mátrixok sajátérték-sûrûségének határeloszlásával magyarázni. Már ez is sejteni engedi, hogy a véletlen mátrixok (olyan mátrixok, melyek elemei klasszikus valószínûségi változók) szoros kapcsolatban állnak a szabad valószínûségelmélettel.

Azon véletlen mátrixok, melyek minden elemének létezik az összes momentuma, a normalizált nyommal vagy annak várható értékével nemkommutatív valószínûségi mezõt alkotnak. Ez a nemkommutatív valószínûségi mezõ a szabad valószínûségelméletben fontos szerepet tölt be. Azok a véletlen mátrixok, melyek eloszlása (a mátrixméret minden határon túl való növelésekor) a standard Wigner-eloszláshoz tart, a Wigner-eloszlás úgynevezett véletlen mátrix modelljét alkotják. Hasonló értelemben modellezhetõ véletlen mátrixok segítségével a szabad kapcsolat vagy az R-diagonalitás is. Amikor bekapcsolódtam az e területen folyó kutatásokba, elsõ célom az volt, hogy megvizsgáljam, adható-e véletlen mátrix modellje a a Poisson-eloszlás szabad megfelelõjének is. Ez az eloszlás legtermészetesebben a Poisson-határeloszlástételnek a szabad elméletbe való átültetésével értelmezhetõ. Az így kapott eloszlás szintén felbukkan a matematika más területein is, ahol felfedezõi után a Marchenko-Pastur-eloszlás nevet viseli. Az eloszlás momentumainak vizsgálata során kapott eredmények is alátámasztják azt a tényt, hogy a szabad valószínûségelmélet szoros kapcsolatba hozható a nemkeresztezõ partíciók kombinatorikájával.

Az elmélet analitikus módszerekkel való megközelítésének igen nehéz volta miatt a '90-es évek elejétõl kezdve - elsõsorban Roland Speicher és Andu Nica munkája nyomán - a tételek bizonyítása és az egyes fogalmak értelmezése és szemléltetése terén egyre inkább tért nyertek a kombinatorikus módszerek, különös tekintettel a nemkeresztezõ partíciók hálójára vonatkozó ismeretekre. Munkám során általában én is ezt a megközelítést alkalmaztam, így az általam adott bizonyítások is többnyire kombinatorikus jellegûek.

Kutatásaim középpontjául a Poisson-eloszlás szabad megfelelõjét választottam, eleinte Wigner véletlen mátrixokra vonatkozó klasszikus tétele által motiválva. A dolgozatban leírt eredményeim mind a szabad Poisson-eloszlás köré csoportosíthatók, bár egy részük már csak távolabbi kapcsolatban áll azzal, speciális esetként tartalmazva az arra vonatkozó eredményeket. A szabad valószínûségelmélet fiatal kora alapján érthetõ, hogy az általam választott terület is számos további nyitott kérdést tartogat, melyek megválaszolása további kutatások eredményeként remélhetõ.

Az értekezés felépítése a következõ. A bevezetõ utáni elsõ fejezetben összefoglalom a matematika egyes területeinek azon elemeit, melyek kutatásaim kiindulópontjait képezték. A fejezet elsõ része a szabad valószínûségelmélet rövid összefoglalását tartalmazza. Itt találhatók meg a késõbb felhasználásra kerülõ fogalmak definíciói, és a kutatásaim szempontjából fontos tételek (többségükben bizonyítás nélkül). A fejezet második szakaszában a véletlen mátrixokkal kapcsolatos alapismeretek kaptak helyet. A harmadik rész a véges elemszámú halmazok partícióira és párpartícióira vonatkozó ismereteket foglalja össze, és bemutatja, hogy a nemkeresztezõ partíciók hálója milyen kapcsolatban van a szabad valószínûségelmélet legalapvetõbb fogalmaival és - a klasszikus esethez hasonlóan - a szabad valószínûségelméletben felbukkanó legfontosabb eloszlásokkal. Végül a fejezet negyedik része a Hamburger-féle momentum problémára vonatkozó ismereteket adja meg röviden, melyekre a továbbiakban szintén szükség lesz.

A harmadik fejezetben Voiculescu levezetését vázolva megmutatom, hogy lehet meghatározni a klasszikus Poisson-eloszlás szabad analogonját, mely nem más, mint a matematika más területeirõl már ismert Marchenko-Pastur-eloszlás. Ezután explicit formában megadom a szabad Poisson-eloszlás momentumait, melyre korábban csak rekurzív összefüggés volt ismeretes. Rávilágítok a momentumok kombinatorikai jelentésére, a nemkeresztezõ partíciókkal való közvetlen kapcsolatára. Ezt követõen két, Wigner klasszikus tételéhez hasonló (és az által motivált) tételt adok meg, mely bizonyos szimmetrikus véletlen mátrixok sajátérték-sûrûségének határeloszlását adja meg abban az esetben, amikor a mátrix mérete a végtelenhez tart. Kiderül, hogy a keresett eloszlás lényegét tekintve megegyezik a szabad Poisson-eloszlással. A második tétel az elsõ egy élesítése: azt mutatja meg, hogy a vizsgált mátrixok empírikus sajátérték-sûrûsége 1 valószínûséggel konvergál a szabad Poisson-eloszlás fent említett variánsához, ha a mátrix méretét minden határon túl növeljük. Meg kell említenem, hogy az itt bizonyításra kerülõ két tétel egy erõsebb formája megtalálható Wachter egy 1978-as dolgozatában. Fõ célom itt egy, a momentumok módszerén alapuló elemi kombinatorikai bizonyítás megadása volt, mely többek között felhasználja a szabad Poisson-eloszlás momentumaira vonatkozólag kapott eredményt. A felhasznált módszer régóta ismert, véletlen mátrixokra elõször Wigner alkalmazta az 1950-es években. A bizonyítás különösen a második tétel esetében egyszerûsíthetõ jelentõsen a Wachter által megadotthoz képest, speciális esetünkben a konvergencia sebességére egyben pontosabb korlátot adva az általános esetben szereplõhöz képest.

A negyedik fejezetben partíciók egy speciális csoportjával foglalkozom. A tekintett partíciók közös tulajdonsága, hogy lineáris reprezentációjuk a középpontra szimmetrikus, vagyis elõlrõl hátra, illetve visszafelé "olvasva" ugyanazt kapjuk. E tulajdonságuk alapján e partíciókat szimmetrikus partícióknak neveztem el. A fejezet elsõ felében az alapvetõ számossági problémákkal foglalkozom. Míg az n elemû halmazok szimmetrikus partícióinak és a $2n$ elemû halmazok szimmetrikus párpartícióinak a számára csak rekurzív összefüggést sikerült felírnom, addig az n elemû halmazok nemkeresztezõ szimmetrikus partícióinak és a $2n$ elemû halmazok nemkeresztezõ szimmetrikus párpartícióinak a számát explicit formában adom meg. Kiderül, hogy e két utóbbi számosság (azonos n-re) megegyezik egymással, és értékük nem más, mint a Pascal-háromszög $(n+1)$-edik sorában középen álló szám. Ezután megmutatom, hogy az összes partíciók halmazához és a nemkeresztezõ partíciók halmazához hasonlóan a szimmetrikus partíciók és a nemkeresztezõ szimmetrikus partíciók halmaza is hálót alkot a partíciók szokásos rendezésével. A fejezet második felében arra a kérdésre keresem a választ, hogy vajon az összes partíciók illetve párpartíciók halmazához és a nemkeresztezõ partíciók illetve párpartíciók halmazához hasonlóan a (nemkeresztezõ, illetve összes) szimmetrikus partíciók és párpartíciók halmaza is meghatároz-e bizonyos eloszlásokat azok momentumain keresztül. (A standard Gauss-eloszlás n-edik momentuma nem más mint n elem párparícióinak a száma; a normális eloszlás szabad analogonjának tekinthetõ (standard) Wigner-eloszlás n-edik momentumát n elem nemkeresztezõ párpartícióinak a száma adja meg; a λ paraméterû Poisson eloszlás n-edik momentuma λ azon polinomja, ahol λ^i együtthatója n elem azon partícióinak a száma, melyekben a blokkok száma éppen i; míg a λ paraméterû szabad Poisson eloszlásra ugyanez áll fenn, ha csak a nemkeresztezõ partíciókat vesszük számításba.) Kiderül, hogy míg n elem szimmetrikus párpartícióinak vagy nemkeresztezõ szimmetrikus párpartícióinak a száma nem tekinthetõ valamely eloszlás n-edik momentumának (minden n természetes számra), addig n elem nemkeresztezõ szimmetrikus partíciónak a száma már igen. Ez utóbbi bizonyítása az eloszlás konkrét megadásán keresztül történik. Sõt, a (szabad) Poisson-eloszlás mintájára megadható egy egész egy paraméteres eloszláscsalád, melynek momentumai szintén a fenti, zárójeles megjegyzésben leírt módon határozhatók meg - ezúttal a nemkeresztezõ szimmetrikus partíciók segítségével. A kapott eloszláscsalád tehát tekinthetõ a szabad Poisson eloszlás "szimmetrikus analogonjának", bár ez az elnevezés nem túl szerencsés, mivel az adott eloszlások képe egyáltalán nem szimmetrikus.

Az ötödik fejezetben megadom egy új, szokatlan jellemzését a Catalan-számok sorozatának. Vegyük azt a végtelen mátrixot, melynek elsõ sorában a $2n$-edik helyen az n-edik Catalan-szám áll ($n = 0, 1, 2, ...$), míg a páratlan sorszámú elemek legyenek mind nullák. Ezután a sor elsõ elemét hagyjuk el, és az így kapott számsorozatot írjuk be a második sorba. A második sor elsõ elemének elhagyásával kapott számsorozatot írjuk be a harmadik sorba, és így tovább. A Hamburger-féle momentum problémára vonatkozó eredményekre és a szabad valószínûségelmélet egyes állításaira támaszkodva igazolom, hogy az így kapott mátrix minden fõminorának a determinánsa 1. Az állítás megfordítása is igaz: amennyiben egy hasonló szerkezetû végtelen mátrix ilyen tulajdonságú, akkor az meg kell egyezzen a fent megadottal. Figyelembe véve, hogy a Catalan számok megegyeznek a standard Wigner eloszlás páros momentumainak sorozatával, valamint azt, hogy a fent leírt mátrix a momentum probléma talán legalapvetõbb objektuma, mondhatjuk, hogy a (standard) Wigner eloszlás a momentum probléma kitüntetett megoldása. Kiderül az is, hogy a mátrixba a $\lambda = 1$ paraméterû szabad Poisson-eloszlás momentumait írva a determinánsok sorozata továbbra is azonosan 1 lesz, az unicitás azonban erre az esetre már nem teljesül. A fentiek egy általánosításaként megmutatom azt is, hogy ha a fenti végtelen mátrixot az úgynevezett q-normális eloszlás momentumaival töltjük föl (q -1 és 1 közé esõ paraméter; a $q = 1$ eset a klasszikus normális eloszlásnak felel meg, a $q = -1$ eset a Bernoulli-eloszlást adja, míg a $q = 0$ esetben a Wigner-eloszlást kapjuk vissza), akkor a fõminorok determinánsainak sorozata a q-egészekbõl képzett faktoriálisok szorzatainak sorozata lesz. (Így például a standard Gauss eloszlás esetében az n-edik fõminor determinánsa $1!2!3!...n!$.)

A hatodik fejezetben kutatásaim egyik fõ eredményeként a harmadik fejezetben szereplõ véletlen mátrixok egy speciális esetét vizsgálva megmutatom, hogy annak bármely pozitív egész kitevõjû hatványa határértékben R-diagonális elem, ha a mátrix méretét minden határon túl növeljük. (Az R-diagonális elemek a szabad valószínûségi változók speciális képviselõi.) Ennek bizonyítását egy általánosabb tétel igazolásával adom meg, mely szerint bármely cirkuláris elem bármely pozitív egész kitevõjû hatványa R-diagonális elem. (A cirkuláris elemek szintén kitüntetett és igen fontos képviselõi a szabad valószínûségi változóknak.) A bizonyítás nagyrészt itt is kombinatorikus jellegû; bizonyos nemkeresztezõ partíciók és párpartíciók közötti kapcsolaton alapul.

2. ALAPOZÁS

2.1. Szabad valószínûségelmélet

Nemkommutatív valószínûségi változók

A klasszikus valószínûségszámításban a valószínûségi változók mérhetõ függvények egy Ω eseménytér fölött. Tekintsük azon valószínûségi változókat, melyeknek minden momentuma létezik. Ezek a pontonkénti összeadásra és szorzásra nézve algebrát alkotnak. A várható érték egy lineáris funkcionál ezen az algebrán. A szabad (más néven nemkommutatív) valószínûségelmélet alapfogalmai talán innen kiindulva érthetõk meg legtermészetesebben.

2.1.1. Definíció. (Voiculescu, [**V1**]) *Az $(\mathcal{A}, \varphi)$ párt* ***nemkommutatív valószínûségi mezõnek*** *nevezzûk, ha $\mathcal{A}$ egységelemes algebra $\mathbf{C}$ fölött, φ pedig olyan lineáris funkcionál $\mathcal{A}$-n, amire $\varphi(\mathbf{1}) = 1$.*

Az $(\mathcal{A}, \varphi)$ nemkommutatív valószínûségi mezõ $a \in \mathcal{A}$ elemeit *nemkommutatív valószínûségi változóknak* hívjuk, $\varphi(a)$ neve pedig *a várható értéke.* A klasszikus esettel analóg módon *a n-edik momentumán* $\varphi(a^n)$-t értjük.

A nemkommutatív valószínûségi mezõre az egyik legegyszerûbb példa egy $\mathcal{H}$ Hilbert-tér korlátos operátorainak $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ algebrájából kiindulva kapható meg. Legyen ξ tetszõleges egységvektor $\mathcal{H}$-ban, azaz $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| = 1$, és a definícióban szereplõ φ lineáris funkcionál legyen

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) & \to & \mathbf{C} \\ A & \longmapsto & \varphi(A) = \langle A\xi, \xi \rangle, \end{array}$$

ahol $\langle\, , \rangle$ a Hilbert-tér skalárszorzatát jelöli. Ekkor a $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \varphi)$ pár egy nemkommutatív valószínûségi mezõ.

A nemkommutatív valószínûségi mezõ definíciójában szereplõ $\mathcal{A}$ algebrától gyakran megköveteljük további tulajdonságok teljesülését is. Így például, ha $\mathcal{A}$ egy *-algebra, azaz értelmezve van rajta egy * mûvelet (úgynevezett involúció), melyre

$$\begin{array}{rcll} a & \longmapsto & a^* & \text{konjugált lineáris,} \\ (ab)^* & = & b^*a^* & \forall a,b \in \mathcal{A}, \\ a^{**} & = & a & \forall a \in \mathcal{A}, \end{array}$$

akkor az $(\mathcal{A},\varphi)$ párt *-*valószínûségi mezõnek* hívjuk, ha φ állapot, azaz olyan lineáris funkcionál $\mathcal{A}$-n, amire

$$\begin{array}{rcll} \varphi(\mathbf{1}) & = & 1, & \\ \varphi(a^*) & = & \overline{\varphi(a)} & \text{és} \\ \varphi(a^*a) & \geq & 0 & \forall a \in \mathcal{A} \end{array}$$

(itt $\overline{\varphi(a)}$ a $\varphi(a)$ szám konjugáltját jelenti).

Elõzõ példánk esetében a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ algebrán *-mûveletnek tekinthetjük az operátorok adjungálásának mûveletét. Könnyen ellenõrízhetõ, hogy ekkor a példában megadott φ valóban állapot, miszerint $(\mathcal{B}(\mathcal{H}),\varphi)$ egy *-valószínûségi mezõ.

A *-valószínûségi mezõk (s így persze a nemkommutatív valószínûségi mezõk) másik egyszerû képviselõjét kaphatjuk meg a 2×2-es véletlen mátrixok segítségével. Véletlen mátrixnak azokat a mátrixokat hívjuk, melyek elemei egy klasszikus valószínûségi mezõ (klasszikus) valószínûségi változói. A szokásos mátrix-mûveletekkel az $n\times n$-es véletlen mátrixok *-algebrát alkotnak. Így például, ha a,b,c,d olyan klasszikus valószínûségi változók valamely (klasszikus) valószínûségi mezõ fölött, melyek minden momentuma létezik, *-algebrát alkotnak a

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

alakú 2×2-es véletlen mátrixok. Jelölje ezt az algebrát $\mathcal{A}$, és legyen $\varphi(T) = E(a)$, a várható értéke. Ellenõrízhetõ, hogy ekkor $(\mathcal{A},\varphi)$ egy *-valószínûségi mezõ. (Véletlen mátrixokkal késõbb még bõvebben foglalkozunk.)

Azokat a *-valószínûségi mezõket, melyekben az $\mathcal{A}$ *-algebra egy C^*-algebra, C^*-*valószínûségi mezõknek* hívjuk. (Egy $\mathcal{A}$ *-algebrát akkor nevezünk C^*-algebrának, ha $\mathcal{A}$-n értelmezve van egy norma, melyre

$$\begin{array}{rcll} \|a^*a\| & = & \|a\|^2 & \forall a \in \mathcal{A}, \\ \|ab\| & \leq & \|a\|\,\|b\| & \forall a,b \in \mathcal{A} \text{ és} \\ \|1\| & = & 1 & \end{array}$$

teljesül, és $\mathcal{A}$ erre a normára nézve Banach-tér.) Vegyük $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-n az operátor normát, ekkor az elõzõ példánkban szereplõ $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \varphi)$ pár egyben egy C^*-valószínûségi mezõnek is tekinthetõ. Megemlítjük, hogy a Genfald-Naimark tétel szerint minden C^*-algebra izometrikusan izomorf egy $\mathcal{H}$ Hilbert-téren ható operátorok zárt részalgebrájával [**T**].

Fontos látni, hogy a klasszikus valószínûségszámítás legalapvetõbb fogalmaiként megismert objektumok, mint például az eseménytér, az események és azok valószínûségei, a szabad valószínûségelméletben nem jelennek meg. Mindamellett a két elméletben sokminden analóg módon írható le és magyarázható. Ezt részben indokolja az a tény, hogy minden korlátos klasszikus valószínûségi változó tekinthetõ nemkommutatív valószínûségi változónak. A klasszikus valószínûségi változók nemkommutatív reprezentációjára több lehetõség is van. Ezek egyike a következõ. Jelölje $\mathbf{C}\langle X\rangle$ az X határozatlan polinomjainak $\mathbf{C}$ fölötti algebráját, és legyen ξ olyan klasszikus valószínûségi változó, melynek minden n természetes szám esetén létezik az $E(\xi^n)$ n-edik momentuma. Ezek után a $\varphi : \mathbf{C}\langle X\rangle \to \mathbf{C}$ lineáris funkcionált definiáljuk a $\varphi\left(X^k\right) = E\left(\xi^k\right)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ egyenlõségekkel. Ekkor $(\mathbf{C}\langle X\rangle, \varphi)$ egy nemkommutatív valószínûségi mezõ, $X \in \mathbf{C}\langle X\rangle$ pedig egy nemkommutatív valószínûségi változó, melynek momentumsorozata egybeesik ξ momentumsorozatával. Ebben az értelemben ξ-t azonosíthatjuk X-el. Hogy ez a megfeleltetés mennyire lényegi, abból is érezhetõ, hogy a szabad valószínûségelméletben két nemkommutatív valószínûségi változót általában akkor tekintünk ekvivalensnek, ha momentumaik rendre megegyeznek. Épp ebbõl kiindulva - a klasszikus valószínûségszámítás fogalmait szem elõtt tartva - egy $(\mathcal{A}, \varphi)$ nemkommutatív valószínûségi mezõ $a \in \mathcal{A}$ nemkommutatív valószínûségi változója esetén a

$$\begin{array}{ccc} \mu_a & : & \mathbf{C}\langle X\rangle \to \mathbf{C} \\ X^k & \longmapsto & \varphi\left(a^k\right) \qquad k = 0, 1, \ldots \end{array} \tag{2.1.1}$$

formulával értelmezett lineáris funkcionált nevezzük *a eloszlásának* [**V1**]. Ezen túlmenõen, ha a $\varphi(a^n)$ momentumsorozat egy valószínûségi mértéket határoz meg, az általa képviselt eloszlást is tekinthetjük az a nemkommutatív valószínûségi változó eloszlásának. Az persze nem igaz, hogy minden számsorozat megegyezik valamely valószínûségi mérték momentumsorozatával. Hogy ez mikor teljesül mégis, arra keresi a választ az úgynevezett momentum probléma. Az idevágó ismeretek rövid összefoglalása a 2.4. alfejezetben található meg; míg a 4. fejezet - többek között - az elmélet egy alkalmazására ad példát. Ha egy $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \varphi)$ nemkommutatív valószínûségi mezõben a φ lineáris funkcionál $\varphi(A) = \langle A\xi, \xi\rangle$ típusú összefüggéssel adott, akkor μ_a-t az A operátor ξ *vektorban való eloszlásának* hívjuk.

Az alábbiakban szükségünk lesz a nemkommutatív valószínûségi mezõk következõ fontos példájában szereplõ fogalmakra.

Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, ekkor szokásos írásmódban a $\mathcal{H}$ fölötti (teljes) Fock-tér

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \mathbf{C}\cdot\phi \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}^{\otimes n} \oplus \ldots,$$

ahol ϕ az úgynevezett *vákumvektor* $(\|\phi\| = 1)$, $\oplus$ a direkt összeget, míg $\otimes$ a tenzorszorzatot jelöli. A Fock-tér $\mathcal{H}^{\otimes n}$ részét alkotják az úgynevezett n-részecske vektorok. Jelölje $\mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ a Fock-téren ható korlátos operátorok algebráját, $\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H})) \to \mathbf{C}$ pedig legyen az a lineáris funkcionál, melyre $\varphi(A) = \langle A\phi, \phi\rangle$ minden $A \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ esetén. Ekkor $(\mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H})), \varphi)$ egy nemkommutatív valószínûségi mezõ. A Hilbert tér minden $h \in \mathcal{H}$ vektorához hozzárendelhetünk egy $l(h) \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ operátort, melyet a következõ formulákkal értelmezünk.

$$\begin{aligned} l(h)\,\phi &= h, \\ l(h)\,\eta_1\otimes\eta_2\otimes\ldots\otimes\eta_n &= h\otimes\eta_1\otimes\eta_2\otimes\ldots\otimes\eta_n \end{aligned}$$

(és lineárisan kiterjesztve). $l(h)$ neve (a h vektorhoz tartozó) keltõ operátor. Ennek $l(h)^*$ adjungáltja az eltüntetõ operátor nevet viseli, melynek hatása

$$\begin{aligned} l(h)^*\,\phi &= 0, \\ l(h)^*\,\eta_1\otimes\eta_2\otimes\ldots\otimes\eta_n &= \langle\eta_1, h\rangle\cdot\eta_2\otimes\ldots\otimes\eta_n. \end{aligned}$$

Tehát ha egy n-részecske vektorra $l(h)$-t alkalmazzuk, eredményül egy $(n+1)$-részecske vektort kapunk, míg $l(h)^*$ egy $(n-1)$-részecske vektort eredményez. (Erre utal az elnevezés.) Amint az rögtön látható,

$$l(h_1)^*\,l(h_2) = \langle h_2, h_1\rangle\, I, \tag{2.1.2}$$

ahol I az egységoperátort jelöli.

Megmutatjuk, hogy az $l(h)^* + l(h)$ (úgynevezett mezõ operátor) eloszlása a ϕ vákumvektorban az $m = 0$, $r = 2\|h\|$ paraméterû *Wigner-eloszlás*, melynek sûrûségfüggvénye

$$w_{m,r}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2 - (x-m)^2}, & \text{ha } m - r \le x \le m + r, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Itt m és r valós számok, m az eloszlás centruma (és egyben várható értéke), r pedig az eloszlás "sugara". $w_{0,r}$ helyett általában csak w_r-et írunk, míg w a $w_{0,2}$ úgynevezett *standard Wigner-eloszlást* jelöli. Mivel ez esetben a sûrûségfüggvény képe egy origó középpontú lapított félkör, a Wigner-eloszlást szokták *félköreloszlásnak* is nevezni.

Amint arról a késõbbiekben még lesz szó (2.2. alfejezet), ezt az eloszlást Wigner írta le [**Wi1**], amikor az atommag energiaszintjeinek kísérleti úton meghatározott sûrûségeloszlását próbálta véletlen mátrixok sajátértéksûrûség eloszlásával magyarázni.

A fentebb elmondottak értelmében $w_{2\|h\|}$-t akkor tekinthetjük $l(h)^* + l(h)$ ϕ-beli eloszlásának, ha

$$\left\langle \left(l(h)^* + l(h)\right)^n \phi, \phi \right\rangle = \int x^n w_{2\|h\|}(x)\, dx \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Az egyszerûség kedvéért a továbbiakban legyen $\|h\| = 1$, és $l(h)$ illetve $l(h)^*$ helyett írjunk csak l-et illetve l^*-ot. Az $m_n = \langle (l^* + l)^n \phi, \phi \rangle$ momentumok kiszámításánál az n-edik hatványt kifejtve $\ldots l^* l l l^* l^* \ldots$ típusú szorzatokat kapunk, vagyis keltések és eltüntetések bizonyos sorozatait. Az ilyen szorzatoknak feleltessünk meg olyan síkbeli bolyongásokat, melyek az origóból indulnak, és minden lépésben vagy ferdén fölfelé, vagy ferdén lefelé ugranak egyet, attól függõen, hogy az adott helyen keltõ vagy eltüntetõ operátor áll-e a szorzatban. Így például az $lll^*l^*ll^*$ szorzatnak a 2.1.1. ábrán látható pálya fog megfelelni.

2.1.1. *Ábra*

A (2.1.2) egyenlet alapján egy adott szorzatnak csak akkor van járuléka, ha azt a vákumra hattatva ismét a részecske nélküli rendszert kapjuk vissza, ami persze egyben azt is jelenti, hogy a rendszerünk menet közben nem szûnt meg létezni, vagyis az eltüntetõ operátornak mindig volt mit eltüntetnie. Így a momentumok kiszámításánál csak azok a szorzatok adnak járulékot (mégpedig mindig egységnyi járulékot), amelyeknek azok az origóból induló pályák felelnek meg, melyek a vízszintes tengelyen végzõdnek, és sehol nem kerülnek az alá. Az ilyen pályákat szokták Catalan-pályáknak nevezni [**HiPe**], s mint ismeretes, ezek száma $2n$ lépésszám mellett épp az n-edik Catalan-szám,

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \tag{2.1.4}$$

[**HiPe**]. (Páratlan n esetén ilyen pálya nyilván nem létezik.) Ezek alapján

$$m_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ c_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}, & \text{ha } n = 2k. \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Az, hogy a w standard Wigner-eloszlás momentumai pont ugyanezek, a (2.1.3) képletbõl közvetlenül adódik. (Az $m_n = \int x^n w(x)\, dx$ momentumokra parciális integrálással egy rekurziós öszefüggést kapunk, melyet épp (2.1.5) elégít ki.)

Megjegyezzük, hogy a kvantummechanikában igen fontos szerepet játszik az $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ Fock-tér két altere, $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$, az úgynevezett szimmetrikus Fock-tér, és az $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$ antiszimmetrikus Fock-tér. Amíg az elõbbi a bozonikus állapotokat tartalmazza, addig $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$ a fermionok lehetséges állapotait adja meg (automatikusan kielégítve az úgynevezett Pauli-elv követelményeit). E két altéren is definiálhatók $l(h)$ mintájára úgynevezett keltõ operátorok, ezeket jelölje $a_+(h)$ a bozonok, $a_-(h)$ a fermionok esetében. ($a_+(h)^*$ és $a_-(h)^*$ adjungáltjaikat itt is eltüntetõ operátornak hívjuk.) Az $a_\pm(h) + a_\pm(h)^*$ mezõ operátoroknak (pontosabban azok önadjungált lezárásának) ϕ-beli eloszlása ($\|h\| = 1$ feltevés mellett) bozonok esetében épp a standard normális eloszlás, míg fermionokra $\frac{1}{2}(\delta_{-1}(x) + \delta_1(x))$ lesz. A helyzetet az teszi némileg bonyolultabbá, hogy az $a_+(h)$ - $l(h)$-val ellentétben - nem korlátos operátor. A témakör részletei sokhelyen megtalálhatók, l. például [**BR**].

Az alábbiakban megadjuk a fent elmondottak egy érdekes általánosítását. Legyen $q \in (-1;1)$. Ekkor definiálhatjuk az úgynevezett q-egész számokat, melyekre

$$[n]_q = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Legyen továbbá $l^2(\mathbf{Z}^+)$-on S_q a következõ súlyozott eltolás operátor, mely hatása definíció szerint

$$S_q \delta_n = \sqrt{[n+1]_q}\,\delta_{n+1} \qquad \left(\forall n \in \mathbf{Z}^+\right), \tag{2.1.6}$$

ahol $\{\delta_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ $l^2(\mathbf{Z}^+)$ szokásos ortogonális bázisa. S_q ekkor egy korlátos operátor, melyre

$$\|S_q\| = \sup\left\{\sqrt{[n]_q} : n \in \mathbf{N}\right\} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-q}}, & \text{ha } q \in [0;1), \\ 1, & \text{ha } q \in (-1;0]. \end{cases}$$

$q = 0$ esetben S_0 a szokásos eltolás operátor. Az

$$S_q^* S_q = 1 + q S_q S_q^*$$

formula a kanonikus kommutálási relációk [**BR**] általánosítását adja [**JSW**], s ezek alapján S_q-t szokták q-keltõ operátornak is nevezni. Az $S_q S_q^*$ "q-szám operátor" spektruma nem lesz más, mint a q-természetes számok halmaza. Az $S_q + S_q^*$ "q-mezõ operátor" minden $q \in (-1;1)$ esetén önadjungált lesz, és eloszlása δ_0-ban az a valószínûségi mérték, melynek tartója a $\left[\frac{-2}{\sqrt{1-q}}; \frac{2}{\sqrt{1-q}}\right]$ intervallum, és melynek sûrûségfüggvénye [**LM**] alapján

$$C_q\sqrt{1-\frac{(1-q)\,x^2}{4}}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{(1-q)\,q^2x^2}{\left(1+q^k\right)^2}\right), \tag{2.1.7}$$

ahol

$$C_q=\frac{\sqrt{1-q}}{\pi}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-q^{2k}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+q^k\right). \tag{2.1.8}$$

Ezt a valószínûségeloszlást szokták *q-deformált Gauss-eloszlásnak* (vagy röviden csak *q-Gauss-* vagy *q-normális eloszlásnak*) nevezni. $q=0$ esetben ez megegyezik a w standard Wigner-eloszlással, $q\to-1$ esetén $\frac{1}{2}\left(\delta_{-1}(x)+\delta_1(x)\right)$ adódik, míg $q\to 1$ határesetben a standard normális eloszlást kapjuk meg [**LM**] (ez indokolja az elnevezést).

A q-Gauss-eloszlásra az 5. fejezetben még érintõlegesen visszatérünk. A "q-matematika" témakörének az itt leírtak csak kis részletét teszik ki, a terület - mely több mint egy évszázados múltra tekint vissza - bõvebb feldolgozása megtalálható például [**AI**]-ban.

Az R-transzformált

Legyen ξ_1 és ξ_2 két független klasszikus valószínûségi változó, melyek a μ_1 illetve μ_2 valószínûségi mértéket határozzák meg a valós számegyenesen. Ekkor a $\xi=\xi_1+\xi_2$ valószínûségi változóhoz tartozó μ valószínûségi mérték μ_1 és μ_2 konvolúciója, azaz

$$\mu=\mu_1*\mu_2.$$

Valószínûségi változóink $\varphi_\xi(t)=E\left(e^{it\xi}\right)$ karakterisztikus függvényeit nézve (mely az eloszlásokra vonatkoztatva lényegében a Fourier-transzformált) azt kapjuk, hogy

$$\varphi_\xi(t)=\varphi_{\xi_1}(t)\cdot\varphi_{\xi_2}(t),$$

míg a karakterisztikus függvények logaritmusaira

$$\ln\varphi_\xi(t)=\ln\varphi_{\xi_1}(t)+\ln\varphi_{\xi_2}(t)$$

adódik, vagyis a Fourier-transzformált logaritmusa linearizálja a konvolúciót. A karakterisztikus függvény logaritmusát sor alakban felírva

$$\ln\varphi_\xi(t)=\ln E\left(e^{it\xi}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}s_n\frac{(it)^n}{n!}$$

adódik, ahol az s_n együttható neve ξ n-edik kumulánsa. A fentiek alapján tehát két független valószínûségi változó összegének n-edik kumulánsa minden $n \in \mathbf{N}$ esetén megegyezik a két valószínûségi változó n-edik kumulánsának összegével:

$$s_n(\xi_1 + \xi_2) = s_n(\xi_1) + s_n(\xi_2) \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

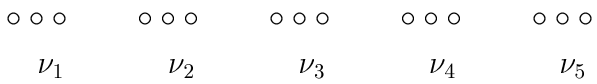
A úgynevezett momentum-kumuláns formula [**Sh**] szerint egy ξ (klasszikus) valószínûségi változó momentumai a következõ képlet alapján számíthatók ki ξ kumulánsaiból:

$$m_n(\xi) = \sum_{\nu} \prod_{V \in \nu} s_{|V|}(\xi) \qquad (\forall n \in \mathbf{N}). \tag{2.1.9}$$

Itt az összegzés az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz partícióin fut végig, a produktum az adott partíció blokkjaira (az adott partícióban szereplõ részhalmazokra) vonatkozik, $|V|$ pedig a V részhalmaz elemszámát jelöli. (A partíciókról a 2.3. alfejezetben lesz szó bõvebben, most elég annyit tudnunk, hogy egy halmaz partíciója a halmaz diszjunkt részhalmazokra bontását jelenti.)

Így például $n = 3$ esetén, a 2.1.2. ábra alapján

$$m_3 = s_1^3 + 3s_2s_1 + s_3.$$



2.1.2. *Ábra*

A partíciók hálójára vonatkozó Moebius inverziós tétel [**An**] felhasználásával megmutatható, hogy (2.1.9) invertálható, azaz ξ momentumainak ismeretében ξ kumulánsai is meghatározhatók. A megfelelõ formula (2.1.9)-hez hasonló szerkezetû, bár kicsit bonyolultabb [**Sh**]:

$$s_n(\xi) = \sum_{\nu} (-1)^{|\nu|-1} (|\nu| - 1)! \prod_{V \in \nu} m_{|V|}(\xi) \qquad (\forall n \in \mathbf{N})$$

(itt $|\nu|$ a ν partícióban szereplõ blokkok (részhalmazok) számát jelöli).

A fent vázolt gondolatmenetben fontos szerepe volt a függetlenség fogalmának. A szabad valószínûségelméletben e fogalom megfelelõje az úgynevezett szabad kapcsolat, melynek értelmezését a következõ definíció adja meg.

2.1.2. Definíció. (Voiculescu, [**V1**]) *Legyen* $(\mathcal{A},\varphi)$ *nemkommutatív valószínûségi mezõ, és* $\mathcal{A}_i$ $(i\in I)$ *legyenek* $\mathcal{A}$ *részalgebrái. Az* $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ ***részalgebrák*** φ***-re vonatkozólag szabad kapcsolatban vannak*** *(röviden* ***szabadok****), ha* $\forall n\in\mathbf{N}$, $i(1),i(2),\ldots,i(n)\in I$; $i(k)\neq i(k+1)$ $(1\le k\le n-1)$ *esetén abból, hogy* $a_k\in\mathcal{A}_{i(k)}$, $\varphi(a_k)=0$ $(1\le k\le n)$, *következik* $\varphi(a_1a_2\ldots a_n)=0$.

Az $a_1,a_2,\ldots a_n\in\mathcal{A}$ ***nemkommutatív valószínûségi változók*** φ***-re vonatkozólag szabad kapcsolatban vannak*** *(röviden* ***szabadok****), ha az általuk generált részalgebrák (vagyis az* a_1 *által generált* $\mathcal{A}_1$ *részalgebra, az* a_2 *által generált* $\mathcal{A}_2$ *részalgebra,... és az* a_n *által generált* $\mathcal{A}_n$ *részalgebra) szabad kapcsolatban vannak.*

Példaképpen tekintsük a korábban már vizsgált $(\mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H})),\varphi)$ nemkommutatív valószínûségi mezõ $l(h_1)$ és $l(h_2)$ nemkommutatív valószínûségi változóit (h_1 és h_2 a $\mathcal{H}$ Hilbert tér elemei). A szabad kapcsolat definíciója és (2.1.2) alapján megmutatható, hogy $l(h_1)$ és $l(h_2)$ pontosan akkor szabadok, ha h_1 és h_2 ortogonálisak, azaz $\langle h_1,h_2\rangle=0$.

Az alábbiakban továbbra is a $(\mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H})),\varphi)$ nemkommutatív valószínûségi mezõt vizsgáljuk. Legyen $h\in\mathcal{H}$ egy rögzített egységvektor $\mathcal{H}$-ban, és jelölje az $l(h)$ keltõ operátort l, az $l(h)^*$ eltüntetõ operátort l^*. Ha $\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_{k+1}|<\infty$, akkor az $l^*+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{k+1}l^k$ sor pontonként konvergál a Fock-térben, s így beszélhetünk az $l^*+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{k+1}l^k$ operátor

$$m_n=\left\langle\left(l^*+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{k+1}l^k\right)^n\phi,\phi\right\rangle$$

momentumairól. Mivel az n-edik hatvány kifejtésekor járulékot csak azok a tagok adnak, melyekben l eredõ hatványa és l^* eredõ hatványa megegyezik egymással, látható, hogy a sort $k=n$-ben levágva az elsõ n momentumra kapott érték nem változik. Ez alapján $l^*+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{k+1}l^k$ momentumait olyankor is értelmezhetjük, amikor $\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_{k+1}|=\infty$, vagyis amikor $l^*+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{k+1}l^k$ nem definiál egy korlátos operátort. Ilyen esetben az $l^*+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{k+1}l^k$ összeget formális kifejezésnek tekintjük. Ezek alapján értelmes a következõ

2.1.3. Definíció. (Voiculescu, [**V2**]) *Legyen* $(\mathcal{A},\varphi)$ *tetszõleges nemkommutatív valószínûségi mezõ. Az* $a\in A$ *nemkommutatív valószínûségi változó* R***-transzformáltja*** *(vagy* R***-sora****) az*

$$R_a(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{k+1}z^k\qquad(z\in\mathbf{C})\tag{2.1.10}$$

formális hatványsor, ha

$$\varphi\left(a^n\right)=\left\langle\left(l^*+\sum_{k=0}^{n}\alpha_{k+1}l^k\right)^n\phi,\phi\right\rangle\qquad\forall n\in\mathbf{N}.\tag{2.1.11}$$

Ha a eloszlása (a momentumok értelmében) a valós számegyenesen adott μ valószínûségi mérték, a fentiek alapján a (2.1.10) alatti formális hatványsort μ R-transzformáltjának (vagy R-sorának) is hívjuk.

Láttuk, hogy l^*+l eloszlása a standard Wigner-eloszlás. Ebbõl azonnal következik, hogy a standard Wigner-eloszlás R-sora

$$R_w(z)=z.$$

Ehhez hasonlóan azt sem nehéz megmutatni, hogy az általános Wigner-eloszlás R-sora

$$R_{w_{m,r}}(z)=m+\frac{r^2}{4}z$$

alakú.

Ha egy a nemkommutatív valószínûségi változó R-transzformáltja $R_a(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{k+1}z^k$, akkor az $l^*+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{k+1}l^k$ formális kifejezést az *a-hoz tartozó kanonikus nemkommutatív valószínûségi változónak* hívjuk. (A határozottság kedvéért legyen l például az $l^2\left(\mathbf{Z}^+\right)=\mathcal{F}(\mathbf{C})$ izometrikus jobbra tolás operátora.)

Legyen μ_1 és μ_2 két kompakt tartójú valószínûségi mérték a valós számegyenesen. Megmutatható (l. például [**V1**]), hogy ilyenkor mindig található egy (A,φ) nemkommutatív valószínûségi mezõ és abban olyan a_1 és a_2 nemkommutatív valószínûségi változók, hogy a_1 és a_2 szabad kapcsolatban van, és a_1 eloszlása μ_1, a_2 eloszlása μ_2 (vagyis

$$\int x^k d\mu_i(x)=\varphi\left(a_i^k\right)\qquad(i=1,2)$$

minden $k=0,1,2,\ldots$ esetén). Ezen felül az is igaz [**V1**], hogy ilyenkor a_1+a_2 momentumai szintén valószínûségi mértéket határoznak meg, azaz létezik olyan μ valószínûségi mérték a valós számegyenesen, hogy

$$\int x^k d\mu(x)=\varphi\left((a_1+a_2)^k\right)\qquad(\forall k\in\mathbf{N}).$$

A továbbiakban ezt a μ mértéket μ_1 és μ_2 *szabad konvolúciójának* fogjuk nevezni [**V1**], a mûvelet jelölésére pedig a $\mu=\mu_1\boxplus\mu_2$ írásmódot választjuk. (Az irodalomban az úgynevezett multiplikatív szabad konvolúciótól [**V3**] való megkülönböztetés végett az additív szabad konvolúció elnevezés az elterjedt, mivel azonban e disszertációban csak ez utóbbi fordul elõ, a rövidebb szóhasználat nem okozhat félreértést.)

Mivel tetszõleges $(\mathcal{A}, \varphi)$ nemkommutatív valószínûségi mezõ $a_1 = x \cdot \mathbf{1}$ és $a_2 = y \cdot \mathbf{1}$ $(x, y \in \mathbf{R})$ elemeire a_1 eloszlása δ_x, a_2 eloszlása δ_y, a_1 és a_2 szabad kapcsolatban van és $a_1 + a_2$ eloszlása nyilvánvalóan δ_{x+y}, így pontmértékekre

$$\delta_x \boxplus \delta_y = \delta_{x+y}. \tag{2.1.12}$$

Hasonlóan, mivel tetszõleges $(\mathcal{A}, \varphi)$ nemkommutatív valószínûségi mezõ tetszõleges $a \in \mathcal{A}$ eleme az $\mathcal{A}$ algebra $\mathbf{1}$ egységelemével (mint nemkommutatív valószínûségi változóval) szabad kapcsolatban van, $\delta_x \boxplus \mu$ nem más, mint a μ mérték $x \in \mathbf{R}$ értékkel való eltoltja.

Azt szintén nem nehéz belátni (l. például [**HP**]), hogy két Wigner-eloszlás szabad konvolúciója megintcsak Wigner-eloszlás, nevezetesen

$$\begin{aligned} w_{m_1,r_1} \boxplus w_{m_2,r_2} &= w_{m,r}, \quad \text{ahol} \\ m &= m_1 + m_2 \quad \text{és} \\ r^2 &= r_1^2 + r_2^2 \end{aligned}$$

(analógiában a Gauss-eloszlás viselkedésével a szokásos konvolúció esetén).

Voiculescu megmutatta [**V2**] , hogy ha egy μ mérték a μ_1 és μ_2 mértékek szabad konvolúciója, akkor μ R-sora μ_1 és μ_2 R-sorainak összege. Az állítás nemkommutatív valószínûségi változókra átfogalmazva azt mondja ki, hogy ha az a_1, a_2 nemkommutatív valószínûségi változók szabad kapcsolatban vannak, akkor

$$R_{a_1+a_2}(z) = R_{a_1}(z) + R_{a_2}(z). \tag{2.1.13}$$

(A bizonyítás megtalálható [**VDN**]-ben és [**HP**]-ben is.) A szabad konvolúciót tehát az R-transzformált linearizálja, s így az a Fourier-transzformáció (vagy ha úgy tetszik, a karakterisztikus függvény) logaritmusának a szabad analogonja. (2.1.13)-at az R-sorok együtthatóira felírva, a_1 és a_2 szabad kapcsolatban lévõ nemkommutatív valószínûségi változók esetén

$$\alpha_k(a_1 + a_2) = \alpha_k(a_1) + \alpha_k(a_2)$$

adódik, ami alapján (a klasszikus esettel való analógiára hivatkozva) egy a nemkommutatív valószínûségi változó $R_a(z) = \sum \alpha_{k+1} z^k$ R-sorának α_k együtthatóját *a k-adik szabad kumulánsának* nevezzük.

Amint azt Speicher megmutatta [**Sp2**], a momentumok hasonló kapcsolatban állnak a szabad kumulánsokkal, mint a klasszikus kumulánsokkal. A momentum-kumuláns formula szabad változata szerint ugyanis

$$m_n = \sum_{\nu \in NC(n)} \prod_{V \in \nu} \alpha_{|V|} \qquad (\forall n \in \mathbf{N}). \tag{2.1.14}$$

A különbség (2.1.9)-hez képest annyi, hogy az összegzést itt az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak nem az összes, hanem csak a nemkeresztezõ partícióira (ezek összessége $NC(n)$) kell elvégezni. A nemkeresztezõ partíciók definíciója a 2.3. alfejezetben található meg (2.3.1. definíció); szemléletes megközelítésben azonban egy partíció akkor nemkeresztezõ, ha ábrázolásában a partíció blokkjait kijelölõ vonalak nem metszik egymást. A 2.1.3. ábra az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaz egy nemkeresztezõ (ν_1) és egy keresztezõ (ν_2) partíciójára ad példát.

ν_1 ν_2

2.1.3. *Ábra.*

A klasszikus momentum-kumuláns formula invertálhatóságának bizonyításához hasonlóan igazolható (2.1.14) invertálhatósága (l. például [**Sp2**] vagy [**HP**]). Az inverz formulára

$$\alpha_n = \sum_{\nu \in NC(n)} (-1)^{|\nu|-1} c_{|\nu|-1} \prod_{V \in \nu} m_{|V|} \qquad (\forall n \in \mathbf{N})$$

adódik, ahol $c_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$ a k-adik Catalan-szám.

Az alábbiakban megadjuk a klasszikus és a szabad valószínûségelmélet közötti analógia egyik legszebb példáját, mely egyben minden eddiginél jobban alátámasztja azt is, hogy miért szokták a Wigner-eloszlást a Gauss-eloszlás szabad megfelelõjének tartani.

A központi határeloszlástétel szerint, ha $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású klasszikus valószínûségi változók, úgy, hogy $E(\xi_i) = 0$ és $E(\xi_i^2) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$, akkor

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}}$$

eloszlása $n \to \infty$ határesetben a standard Gauss-eloszlás. Meglepõ módon a tétel állítása szinte változatlan formában ültethetõ át a szabad esetre:

2.1.4. Tétel. *(Voiculescu, [**V1**], [**VDN**]) Legyen $(\mathcal{A},\varphi)$ nemkommutatív valószínûségi mezõ. Legyenek $a_1, a_2, \ldots \in \mathcal{A}$ szabad kapcsolatban lévõ nemkommutatív valószínûségi változók, melyekre $\varphi(a_i) = 0$ és $\varphi(a_i^2) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Ezenkívül tegyük fel, hogy minden $k \in \mathbf{N}$ esetén van olyan $C_k \in \mathbf{R}$, hogy $\left|\varphi\left(a_{i(1)}a_{i(2)}\ldots a_{i(k)}\right)\right| \leq C_k$ az $i(1), i(2), \ldots \in \mathbf{N}$ indexek bármely megválasztása esetén. Ekkor*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{\sqrt{n}}$$

eloszlása $n \to \infty$ határesetben a standard Wigner-eloszlás, azaz (2.1.5) alapján

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{\sqrt{n}}\right)^k\right) = \begin{cases} 0, \text{ ha } k \text{ páratlan,} \\ \frac{1}{l+1}\binom{2l}{l}, \text{ ha } k = 2l \end{cases} \qquad (\forall k \in \mathbf{N}).$$

Korábban szó volt róla, hogy egy a nemkommutatív valószínûségi változó eloszlásán azt a $\mu_a : \mathbf{C}\langle X\rangle \to \mathbf{C}$ lineáris funkcionált értjük, melyre $\mu_a\left(X^k\right) = \varphi\left(a^k\right)$ minden $k = 0, 1, 2, \ldots$ esetén. Ennek általánosítása a következõ

2.1.5. Definíció. *(Voiculescu, [**V1**]) Legyen $(\mathcal{A},\varphi)$ nemkommutatív valószínûségi mezõ. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ **nemkommutatív valószínûségi változók együttes eloszlásán** a*

$$\begin{aligned} \mu_{a_1,\ldots,a_n} : \mathbf{C}\langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle &\to \mathbf{C} \\ 1 &\longmapsto 1 \\ X_{i_1}\ldots X_{i_k} &\longmapsto \varphi(a_{i_1}\ldots a_{i_k}) \qquad (k \geq 1; 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n) \end{aligned}$$

formulával definiált lineáris funkcionált értjük, ahol $\mathbf{C}\langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle$ az n darab nem kommutáló $X_1, X_2, \ldots, X_n$ határozatlanok polinomjainak algebrája.

Hasonló módon általánosíthatjuk az R-transzformált fogalmát is több nemkommutatív valószínûségi változó együttesére [**N**], bár formailag a kifejezések bonyolultabbak lesznek.

Legyen $\mathcal{E}_k$ a

$$T = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{i(1),i(2),\ldots,i(m);j(1),j(2),\ldots,j(n)} l_{i(1)} l_{i(2)} \ldots l_{i(m)} l_{j(1)}^* l_{j(2)}^* \ldots l_{j(n)}^*$$

alakú formális végtelen sorok összessége, ahol $c_{i(1),i(2),\ldots,i(m);j(1),j(2),\ldots,j(n)} \in \mathbf{C}$, $i(1), i(2), \ldots, i(m); j(1), j(2), \ldots, j(n) \in \{1, 2, \ldots, k\}$, létezik $N \in \mathbf{N}$, hogy $n >$

N esetén $c_{i(1),i(2),\ldots,i(m);j(1),j(2),\ldots,j(n)} = 0$, és legyen $l_i^* l_j = \delta_{ij}$. (l_i-k lehetnek például egymásra páronként ortogonális, valamely (elegendõen magas dimenziójú) $\mathcal{H}$ Hilbert-tér h_i egységvektoraihoz tartozó $l(h_i)$ keltõ operátorok, míg az l_i^*-ok ezek adjungáltjai - ekkor $l_i^* l_j = \delta_{ij}$ automatikusan teljesül.) E formális sorok a szokásos összeadással és szorzással (figyelembevéve az $l_i^* l_j = \delta_{ij}$ feltétel által nyújtott egyszerûsítési lehetõségeket) algebrát alkotnak. (Az együtthatókra tett feltétel biztosítja, hogy két ilyen végtelen összeg szorzásakor mindig véges sok szám összegzését kell csak elvégeznünk.) Ezen az algebrán tekintsük azt az ω_k lineáris funkcionált, mely minden $\mathcal{E}_k$-beli sorhoz az $n = m = 0$-hoz tartozó c konstans tagját rendeli. Ezzel $(\mathcal{E}_k, \omega_k)$ egy nemkommutatív valószínûségi mezõ.

Tekintsük valamely $(\mathcal{A}, \varphi)$ nemkommutatív valószínûségi mezõ $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathcal{A}$ elemeit. A

$$T = \mathbf{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha\left(i(1), i(2), \ldots, i(m)\right) l_{i(m)} l_{i(m-1)} \ldots l_{i(1)} \in \mathcal{E}_k \tag{2.1.15}$$

formális sort az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nemkommutatív valószínûségi változók együttesének *kanonikus reprezentációjának* hívjuk [**N**], ha minden $n \in \mathbf{N}$ és $i(1), i(2), \ldots, i(m) \in \{1, 2, \ldots, k\}$ esetén

$$\varphi\left(a_{i(1)} a_{i(2)} \ldots a_{i(n)}\right) = \omega_k\left(l_{i(1)}^* T l_{i(2)}^* T \ldots l_{i(n)}^* T\right).$$

Példaképpen tekintsük egy $(\mathcal{A}, \varphi)$ nemkommutatív valószínûségi mezõ a és b elemét, melyek szabadok, és mindketten standard félköreloszlásúak. Ekkor az (a, b) pár kanonikus reprezentációja $T = \mathbf{1} + l_1^2 + l_2^2$, hisz $l_1^* T = l_1^* + l_1$ és $l_2^* T = l_2^* + l_2$ a korábban leírtak szerint szabad kapcsolatban van, és szintén mindkettõ standard félköreloszlással rendelkezik.

A továbbiakban szükségünk lesz a következõ jelölésrendszerre. Jelölje $\mathbf{C}_\infty \langle X_1, X_2, \ldots, X_k \rangle$ az $X_1, X_2, \ldots, X_k$ nem kommutáló határozatlanok végtelen formális hatványsorainak halmazát. $F \in \mathbf{C}_\infty \langle X_1, X_2, \ldots, X_k \rangle$ esetén jelölje

$$\left[coef\left(i(1), i(2), \ldots, i(n)\right)\right](F)$$

$X_{i(1)}, X_{i(2)}, \ldots, X_{i(n)}$ együtthatóját F-ben $(1 \leq i(1), i(2), \ldots, i(n) \leq k)$. $V = \{h_1, h_2, \ldots, h_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ $(h_1 < h_2 < \ldots < h_r)$ esetén legyen

$$\left(i(1), i(2), \ldots, i(n) \middle| V\right) = \left(i(h_1), i(h_2), \ldots, i(h_r)\right).$$

2.1.6. Definíció. *(Nica,* [**N**]*) Az* $M_{(a_1,\ldots,a_k)} \in \mathbf{C}_\infty \langle X_1, X_2, \ldots, X_k \rangle$ *sort az* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *nemkommutatív valószínûségi változók együtteséhez tartozó* ***momentum generáló sornak*** *hívjuk, ha minden* $n \in \mathbf{N}$ *és* $1 \leq i(1), i(2), \ldots, i(n) \leq k$ *esetén*

$$[coef\,(i(1), i(2), \ldots, i(n))]\left(M_{(a_1,\ldots,a_k)}\right) = \varphi\left(a_{i(1)} a_{i(2)} \ldots a_{i(n)}\right).$$

Az $R_{(a_1,\ldots,a_k)} \in \mathbf{C}_\infty \langle X_1, X_2, \ldots, X_k \rangle$ *sort az* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *nemkommutatív valószínûségi változók együtteséhez tartozó* R***-sornak*** *hívjuk, ha minden* $n \in \mathbf{N}$ *és* $1 \leq i(1), i(2), \ldots, i(n) \leq k$ *esetén*

$$[coef\,(i(1), i(2), \ldots, i(n))]\left(R_{(a_1,\ldots,a_k)}\right) = \alpha\,(i(1), i(2), \ldots, i(n)),$$

ahol α *jelentése ugyanaz, mint* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ (2.1.15) *szerinti kanonikus reprezentációjában.*

A nemkommutatív valószínûségi változók adott $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ együtteséhez tartozó momentum generáló sor és R-sor között felírható alábbi összefüggés a szabad momentum-kumuláns formula általánosításának felel meg. Amint azt Nica [**N**] megmutatta, minden $n \in \mathbf{N}$ és $1 \leq i(1), i(2), \ldots, i(n) \leq k$ esetén

$$\begin{aligned} & [coef\,(i(1), \ldots, i(n))]\left(M_{(a_1,\ldots,a_k)}\right) \\ = & \sum_{\nu \in NC(n)} \prod_{V \in \nu} [coef\,(\,i(1), \ldots, i(n)|\,V)]\left(R_{(a_1,\ldots,a_k)}\right), \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

formailag is teljes analógiát mutatva az egydimenziós esettel. Az ott kapott eredményhez hasonlóan most is igazolható, hogy (2.1.16) invertálható [**Sp2**], azaz a momentum generáló sor ismeretében az R-sor együtthatói egyértelmûen meghatározhatók. Ez egyben a (2.1.15) kanonikus alak egzisztenciáját és unicitását is biztosítja, mely a korábbi feltevéseinkbõl (közvetlenül) még nem következett.

Példaként tekintsünk egy $(\mathcal{A}, \varphi)$ C^*-valószínûségi mezõt és benne a és b önadjungált nemkommutatív valószínûségi változókat, melyek szabad kapcsolatban vannak, és melyek mindketten standard félköreloszlásúak. Ekkor

$$R_{(a,b)}\,(X_1, X_2) = X_1^2 + X_2^2,$$

amint az az (a, b) pár elõzõ példában meghatározott kanonikus reprezentációja alapján magától értetõdõ.

Egy c nemkommutatív valószínûségi változót *cirkuláris elemnek* hívunk [**V4**], ha az felírható

$$c = \frac{a+ib}{\sqrt{2}}$$

alakban, ahol a és b szabad kapcsolatban lévõ, standard félköreloszlású elemek, i pedig az imaginárius egység. Ilyenkor a (c, c^*) pár R-sora

$$R_{(c,c^*)}(X_1, X_2) = X_1X_2 + X_2X_1 \tag{2.1.17}$$

alakú. Mivel a félköreloszlású, a teljes Fock-térben reprezentálhatjuk egy $l(g)^* + l(g)$ operátorral, ahol $\|g\|^2 = 1$. Hasonlóan reprezentálható b egy $l(h)^* + l(h)$ operátorral, ahol $\|h\|^2 = 1$, és a és b szabad volta miatt legyen $\langle g, h\rangle = 0$. Ezek alapján c reprezentációja

$$\frac{l(g)^* + l(g)}{\sqrt{2}} + i\frac{l(h)^* + l(h)}{\sqrt{2}} = l\left(\frac{g-ih}{\sqrt{2}}\right)^* + l\left(\frac{g+ih}{\sqrt{2}}\right).$$

Mivel $\frac{g-ih}{\sqrt{2}}$ és $\frac{g+ih}{\sqrt{2}}$ ortogonális egységvektorok, így c eloszlása ugyanaz, mint az $l_1^* + l_2 \in \mathcal{E}_k$ elemé. Ezek alapján a (c, c^*) pár eloszlása $(l_1^* + l_2, l_2^* + l_1)$ eloszlásával egyezik meg. Ebbõl már következik, hogy (c, c^*) kanonikus reprezentációja $T = \mathbf{1} + l_1l_2 + l_2l_1$, amibõl (2.1.17) adódik.

A nemkommutatív valószínûségi változókból álló párok közül fontos szerepet töltenek be az úgynevezett *R-diagonális párok*. Nica és Speicher definíciója [**NS2**] alapján egy (a, b) párt (a és b ugyanazon nemkommutatív valószínûségi mezõ elemei) R-diagonális párnak hívunk, ha a pár R-sora

$$R_{(a,b)}(X_1, X_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot (X_1X_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot (X_2X_1) \tag{2.1.18}$$

alakú valamilyen $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ komplex értékû együttható sorzattal. (2.1.17) szerint az R-diagonális párok egyik legegyszerûbb példája a (c, c^*) pár, ahol c cirkuláris elem. A cirkuláris elem és az R-diagonális párok további jellemzése a 2.2. alfejezetben található meg, míg a 6. fejezet teljes egészében velük kapcsolatos.

2.2. Véletlen mátrixok

Véletlen mátrixokkal elõször az 1920-as években kezdtek foglalkozni a többváltozós statisztikák területén. Az 1950-es években Wigner véletlen mátrixok sajátértékei segítségével adott magyarázatot az atommag energiaszintjeinek kisérleti úton meghatározott statisztikájára [**Wi1**]. A véletlen mátrixok elméletének ez volt az elsõ fizikai alkalmazása, ma már azonban az itt nyert eredmények a matematikai fizika számos területén fontos szerephez jutnak. Az elért legfontosabb eredmények Porter, Rosenweig, Metha és Dyson nevéhez fûzõdnek.

Wigner klasszikus tétele kimondja, hogy szimmtrikus véletlen mátrixok átlagos sajátértéksûrûsége az úgynevezett félköreloszláshoz tart, ha a mátrix méretével a végtelenhez tartunk. Amint azt korábban láttuk, ugyanez az eloszlás adódik a Gauss-eloszlás szabad analogonjaként a szabad valószínûségelméletbe átültetett központi határeloszlás tételben. Ez már sejteni engedi, hogy a véletlen mátrixok mélyebb összefüggésben lehetnek a szabad valószínûségelmélettel, mint azt elsõ ránézésre gondolnánk. Voiculescu megmutatta [**V5**], hogy nemkommutatív valószínûségi változók szabad kapcsolata természetes módon modellezhetõ véletlen mátrixok segítségével, ha a tekintett mátrixok méretét minden határon túl növeljük. E példán kívül a szabad valószínûségelmélet számos fogalmának megadható véletlen mátrix modellje, s ezek némelyike nemcsak a mélyebb megértés és szemléltetés szempontjából fontos, de építõleg alkalmazható a szabad valószínõségelmélet más területein is.

A nemkommutatív valószínûségi mezõkre példaképpen a 2.1. alfejezetben már találkoztunk véletlen mátrixkal. Láttuk, hogy a véletlen mátrixok olyan mátrixok, melyek elemei (klasszikus) valószínûségi változók. Az alábbiakban a véletlen mátrixok elméletének azon elemeit foglaljuk össze, melyekre a továbbiakban szükségünk lesz. Megjegyezzük azonban, hogy a területnek kiterjedt irodalma van. Az átfogó munkákon (l. például [**Me**]) kívül számos mû foglalkozik a véletlen mátrixok fizikában való alkalmazásával ([**Wi3**] , [**TW**] , [**F**]). A véletlen mátrixok és a szabad valószínûségelmélet kapcsolatáról l. [**VDN**] , [**HP**] . [**R**] olyan véletlen mátrixokkal is foglalkozik, melyek elemei nemkommutatív valószínûségi változók.

Legyen Ω egy nemüres halmaz (eseménytér), $\mathcal{B}$ legyen Ω részhalmazainak egy σ-algebrája, és legyen $P : \mathcal{B} \to [0;1]$ egy valószínûségi mérték $\mathcal{B}$-n. Ekkor $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ egy klasszikus valószínûségi mezõ. Tekintsük azokat az X véletlen mátrixokat, melyek minden X_{ij} eleme olyan (klasszikus) valószínûségi változó, melynek minden momentuma létezik, azaz $X_{ij:} : \Omega \to \mathbf{R}$ (esetleg $X_{ij} : \Omega \to \mathbf{C}$), $X_{ij} \in \bigcap_{1\leq p<\infty} L^p(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Az ilyen $n \times n$-es véletlen mátrixok a szokásos mátrixmûveletekkel *-algebrát alkotnak. Jelölje ezt az algebrát $\mathcal{G}_n$. Ezen az algebrán τ_n legyen a

$$\tau_n(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_{ii}) \tag{2.2.1}$$

formulával definiált lineáris funkcionál. (A fentiek alapján az $E(X_{ii})$ várható értékek minden $X \in \mathcal{G}_n$ esetén léteznek.) Ekkor $(\mathcal{G}_n, \tau_n)$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén egy nemkommutatív valószínûségi mezõ.

Egy X $n \times n$-es véletlen mátrix (véletlen) sajátértékei legyenek $\lambda_1(X), \lambda_2(X), \ldots, \lambda_n(X)$. Az

$$\frac{1}{n}\left(\delta(\lambda_1(X)) + \delta(\lambda_2(X)) + \ldots \delta(\lambda_n(X))\right)$$

véletlen atomos mértéket az X véletlen mátrix *empírikus sajátérték-sûrûségének* nevezzük, míg ennek várható értéke,

$$\mu_X = \frac{1}{n}E\left(\delta(\lambda_1(X)) + \delta(\lambda_2(X)) + \ldots \delta(\lambda_n(X))\right),$$

X átlagos sajátérték-sûrûsége. Az empírikus sajátérték-sûrûség egy véletlen valószínûségi mérték a komplex számsíkon, konkrét megtestesülése attól függ, hogy az X véletlen mátrix elemeiként választott valószínûségi változók éppen milyen értéket vesznek fel. A valószínûségelméletben az ilyen mértékekre gyakran a valószínûségi mértékek terén való eloszlásként tekintenek.

Amennyiben az X véletlen mátrix valós szimmetrikus (vagy komplex önadjungált) $n \times n$-es mátrix, akkor sajátértékei mind valósak, így átlagos sajátérték-sûrûsége tekinthetõ a valós számok fölötti mértéknek. Ilyenkor az átlagos sajátérték-sûrûség momentumai megegyeznek X τ_n szerinti momentumaival:

$$\int t^m d\mu_X(t) = \tau_n(X^m).$$

A véletlen mátrixok fontos példája az úgynevezett *standard szimmetrikus Gauss-mátrix* [**HP**]. Ez alatt olyan $T(n)$ szimmetrikus véletlen mátrixot értünk, melynek $T_{ij}(n)$ $(1 \le i \le j \le n)$ elemei független, Gauss-eloszlással rendelkezõ valós valószínûségi változók, melyekre

$$E(T_{ij}(n)) = 0 \quad \text{és} \quad E\left(T_{ij}(n)^2\right) = \frac{1+\delta_{ij}}{n+1}.$$

A $T_{ij}(n)$ mátrixelemek szórásnégyzetének megválasztása olyan, hogy $\tau_n\left(T(n)^2\right) = 1$ legyen. Megjegyezzük, hogy a standard szimmetrikus Gauss-mátrixok egyben az úgynevezett *Gauss-féle ortogonális sokaság* (angol neve (Gaussian orthogonal ensemble) alapján röviden GOE) fontos képviselõi. A GOE a véletlen mátrix összeségének azon részhalmaza, mely invariáns minden $H \longmapsto OHO^t$ ortogonális transzformációra (O valós ortogonális mátrixot jelöl), és melyek H_{ij} $(i \leq j)$ elemei (mint klasszikus valószínûségi változók) függetlenek [**Me**] .

A Wigner-tétel egyik megfogalmazásában azt mondja ki, hogy a standard Gauss-mátrixok átlagos sajátérték-sûrûsége aszimptotikusan a standard Wigner-eloszlás.

Megjegyezzük, hogy Wigner eredeti, 1955-ben publikált eredménye [**Wi1**] olyan valós szimmetrikus véletlen mátrixokra vonatkozott, mely elemei 1/2 valószínûséggel veszik fel a $+1$ illetve a -1 értéket. Ha egy ilyen mátrix méretét minden határon túl növeljük, akkor átlagos sajátérték-sûrûsége a (2.1.3) formulával megadott félköreloszláshoz tart. (Wigner motivációja az atommag energiaszintjeinek sûrûségeloszlására kapott kísérleti eredmények értelmezése volt, mely eloszlás igen jól illeszkedett az általa felírt félköreloszláshoz.) A tételt késõbb már maga Wigner is kiterjesztette véletlen mátrixok egy bõvebb rendszerére [**Wi2**], s azóta is több általánosítás született. Az alábbiakban a tétel egy olyan - viszonylag általános - formáját adjuk meg, mely könnyen és elemi úton bizonyítható a momentumok módszerével.

2.2.1. Tétel. *(Arnold,* [**Ar**]*) Minden n természetes szám esetén legyenek a valós értékû $\xi_{ij}(n)$ $(1 \leq i \leq j \leq n)$ valószínûségi változók függetlenek, és legyen minden momentumuk korlátos. Legyen továbbá $E(\xi_{ij}(n)) = 0$ és $E\left(\xi_{ij}(n)^2\right) = 1$ minden $1 \leq i < j \leq n$ esetén. Ha*

$$C_k(n) = \sup_{1 \leq i \leq j \leq n} E\left(|\xi_{ij}(n)|^k\right) = O(1) \qquad (k \in \mathbf{N}, \quad n \to \infty),$$

akkor a $T_{ij}(n) = \xi_{ij}(n) / \sqrt{n}$ elemekkel rendelkezõ szimmetrikus $T(n)$ véletlen mátrix átlagos sajátértéksûrûsége $n \to \infty$ esetén a w_2 standard Wigner-eloszláshoz tart.

A bizonyítás - mely megtalálható például [**HP**]-ben - tisztán kombinatorikai jellegû, és azon alapul, hogy a standard Wigner-eloszlás momentumai nem mások, mint a (megfelelõ elemszámú rendezett halmazokon megadható) nemkeresztezõ párpartíciók száma (ennek igazolását l. a következõ alfejezetben). A $\tau_n\left(T(n)^k\right)$ momentumok kiszámításakor fellépõ $E(\xi_{m_1m_2}\xi_{m_2m_3}\ldots\xi_{m_km_1})$ várhatóértékekrõl megmutatható, hogy $n \to \infty$ határesetben közülük csak azok adnak járulékot, melyekben (szimmetria erejéig) minden ξ_{ij} pont kétszer szerepel. Kiderül, hogy ilyenkor a párosításnak megfelelõ párpartíció mindig nemkeresztezõ. Ezek után a mátrix elemeinek függetlensége és $E\left(\xi_{ij}(n)^2\right) = 1$ alapján - némi további számolással - a tétel állítása már könnyen igazolható.

A fenti $T(n) \in \mathcal{G}_n$ mátrixot a $(\mathcal{G}_n, \tau_n)$ nemkommutatív valószínûségi mezõ nemkommutatív valószínûségi változójának tekintve, $T(n)$ eloszlása (a 2.1. alfejezet értelmében) egy $\mu_n : \mathbf{C}\langle X \rangle \to \mathbf{C}$ lineáris funkcionál. A 2.2.1. tétel szerint $n \to \infty$ esetén $\mu_n \to w_2$. Ez alapján mondhatjuk azt, hogy a fenti T mátrix (vagy például a standard Gauss-mátrix) a félköreloszlás egy *véletlen mátrix modellje.* A véletlen mátrix modellek a nemkommutatív valószínûségi eloszlások fontos példái, szerepük a szabad valószínûségelméletben annak fejlõdésével egyre nagyobb. Megjegyezzük, hogy a fent említett μ_n eloszlás véges n esetén érvényes konkrét alakja (melyre egyébként a tétel bizonyításához nincs szükség) [**Br**]-ben megtalálható.

Egy $X \in G_n$ véletlen mátrix esetén legyen

$$tr_n(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_{ii}.$$

Ekkor tr_n egy nyomszerû lineáris funkcionál $\mathcal{G}_n$-en, melyet normált nyomnak nevezünk. Így $(\mathcal{G}_n, tr_n)$ szintén tekinthetõ egy nemkommutatív valószínûségi mezõnek. Az elõzõ tételben szereplõ $T(n)$ véletlen mátrixok tr_n szerinti eloszlására vonatkozik a következõ

2.2.2. Tétel. *(Arnold,* [**Ar**]*) Legyen $T(n)$ jelentése ugyanaz, mint az elõzõ tételben, és teljesüljenek rá az ottani feltevések. Ekkor $T(n)$ tr_n-re vonatkozó eloszlása $n \to \infty$ esetben 1 valószínûséggel konvergál a w_2 standard Wigner-eloszláshoz, azaz*

$$\lim_{n\to\infty} tr_n\left(T(n)^k\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} x^k \sqrt{4-x^2}\,dx \qquad \forall k \in \mathbf{N}$$

majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén.

Mivel (2.2.1) alapján

$$\tau_n = E \circ tr_n,$$

a 2.2.2. tétel állítása erõsebb, mint a 2.2.1. tételé, a bizonyítása (mely például [**HP**]-ben található meg) azonban lényegesen nem különbözik az ottanitól.

Az $n \times n$-es W véletlen mátrixot p szabadsági fokú Wishart mátrixnak hívjuk, ha az

$$W = Z^t Z \tag{2.2.2}$$

alakba írható, ahol Z olyan $p \times n$-es valós véletlen mátrix, melynek elemei független, standard Gauss-eloszlású (klasszikus) valószínûségi változók [**MSz**]. A Wishart mátrix fontos képviselõje lesz a 3. fejezetben vizsgált mátrixoknak, melyekre - amint azt ott igazoljuk - a 2.2.1. és a 2.2.2. tételekhez hasonló állítások érvényesek. Mint ilyen, a Wishart mátrixok a Poisson-eloszlás szabad analogonjának egy véletlen mátrix modelljét adják.

Egy $n \times n$-es $H(n)$ önadjungált komplex véletlen mátrixot *standard önadjungált Gauss-mátrixnak* hívunk [**HP**], ha $\{\operatorname{Re} H_{ij}(n) : 1 \le i < j \le n\} \cup \{\operatorname{Im} H_{ij}(n) : 1 \le i < j \le n\}$ Gauss-eloszlású (klasszikus) valószínûségi változók független családja,

$$\begin{aligned} E(H_{ij}(n)) &= 0 \qquad (1 \le i \le j \le n), \\ E\left(H_{ii}(n)^2\right) &= \frac{1}{n} \qquad (1 \le i \le n) \qquad \text{és} \\ E\left((\operatorname{Re} H_{ij}(n))^2\right) &= E\left((\operatorname{Im} H_{ij}(n))^2\right) = \frac{1}{2n} \qquad (1 \le i < j \le n). \end{aligned}$$

(Ilyenkor $\tau_n(H(n)) = 0$ és $\tau_n\left(H(n)^2\right) = 1$). A mátrixelemek varianciájának fenti megválasztása biztosítja, hogy $H(n)$ $M_n(\mathbf{C})^{sa}$ téren (az önadjungált komplex mátrixok terén) való eloszlása invariáns minden $H \longmapsto UHU^*$ unitér transzformációra.

A standard önadjungált Gauss-mátrix a félköreloszlás újabb véletlen mátrix modelljét adja, azaz $H(n)$ átlagos sajátérték-sûrûsége $n \to \infty$ határesetben a w_2 Wigner-eloszlás. Ennek az állításnak egy (a Fourier-transzformáción alapuló) analitikus bizonyítása megtalálható [**Br**]-ben. Ennél azonban több is állítható, nevezetesen a 2.2.1. és 2.2.2. tételek komplex esetben is változatlanul érvényben maradnak ($E\left(\xi_{ij}^2(n)\right) = 1$ helyett $E\left(|\xi_{ij}(n)|^2\right) = 1$ és $\xi_{ij} = \xi_{ji}$ helyett $\xi_{ij} = \bar{\xi}_{ji}$ feltevéssel), amint az a valós esetben érvényes bizonyításhoz teljesen hasonlóan igazolható [**HP**].

Egy $n \times n$-es $X(n)$ komplex véletlen mátrixot standard *nemönadjungált Gauss-mátrixnak* hívunk [**HP**], ha $\{\operatorname{Re} X_{ij}(n) : 1 \le i, j \le n\} \cup \{\operatorname{Im} X_{ij}(n) : 1 \le i, j \le n\}$ Gauss-eloszlású (klasszikus) valószínûségi változók független családja,

$$\begin{aligned} E(X_{ij}(n)) &= 0 \qquad (1 \le i, j \le n), \\ E\left(X_{ii}(n)^2\right) &= \frac{1}{n} \qquad (1 \le i \le n) \qquad \text{és} \\ E\left((\operatorname{Re} X_{ij}(n))^2\right) &= E\left((\operatorname{Im} X_{ij}(n))^2\right) = \frac{1}{2n} \qquad (1 \le i, j \le n). \end{aligned}$$

Ezzel ekvivalens megfogalmazásban $X(n)$ pontosan akkor standard nemönadjungált Gauss-mátrix, ha fölírható

$$X(n) = \frac{H^{(1)}(n) + iH^{(2)}(n)}{\sqrt{2}}$$

alakban, ahol $H^{(1)}(n)$ és $H^{(2)}(n)$ független, standard önadjungált Gauss-mátrixok.

Megmutatható, hogy a standard nemönadjungált Gauss-mátrixok a (2.1. alfejezetben definiált) cirkuláris elemek egy véletlen mátrix modelljét adják, azaz $(X(n), X(n)^*)$ eloszlása $n \to \infty$ esetén megegyezik (c, c^*) eloszlásával [**V5**], [**HP**]. A 6. fejezet elején egy ennél valamivel erõsebb tétel bizonyításának vázlatát is megadjuk.

Az alábbiakban szükségünk lesz az aszimptotikus szabadság fogalmára. Legyen $(\mathcal{A}, \varphi)$ és $(\mathcal{A}_n, \varphi_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ nemkommutatív valószínûségi mezõ. Legyen továbbá $a(s,n) \in \mathcal{A}_n$ $(s = 1, 2, \ldots, k; n \in \mathbf{N})$, és $a(s) \in \mathcal{A}$. Ha a nemkommutatív valószínûségi változók $(a(s,n))_{1 \le s \le k}$ együttese $n \to \infty$ esetén eloszlásban a nemkommutatív valószínûségi változók $(a(s))_{1 \le s \le k}$ együtteséhez tart (a 2.1. alfejezet definíciói értelmében), akkor az $(a(s,n))_{1 \le s \le k}$ együttest *aszimptotikusan szabadnak* mondjuk. (Voiculescu, [**V5**]).

Az aszimptotikus szabadság illusztrálására az egyik legegyszerûbb példa egy $(\mathcal{A}, \varphi)$ C^*-valószínûségi mezõbõl kiindulva konstruálható meg. Az $a, b \in \mathcal{A}$ nemkommutatív valószínûségi változók legyenek szabad kapcsolatban, és $d_n \in \mathcal{A}$ legyen nemkommutatív valószínûségi változók egy normában nullához tartó sorozata. Ekkor $(a + d_n, b)$ aszimptotikusan szabad.

Szinte magától értetõdõ, hogy az aszimptotikus szabadság fogalmát véletlen mátrixok esetén próbáljuk alkalmazni. (Valójában maga a fogalom is az ott nyert eredmények hatására alakult ki.) Az irodalom ma már sok olyan tételt ismer, mely véletlen mátrixok valamilyen $(X(s,n))_{s \in S}$ együttesének aszimptotikus szabadságával kapcsolatos. Itt az elsõként ismerté vált ilyen jellegû tétel egy leegyszerûsített változatát adjuk meg. A bizonyítás és a tétel általánosabb alakja megtalálható [**V5**]-ben. [**VDN**] és [**HP**] több más idevágó eredményt is megad.

2.2.3. Tétel. *(Voiculescu, [**V5**]) Legyen $X(n) \in \mathcal{G}_n$ standard nemönadjungált Gauss-mátrix, melyre*

$$X(n) = \frac{H^{(1)}(n) + iH^{(2)}(n)}{\sqrt{2}}$$

teljesül, ahol $H^{(1)}(n)$ és $H^{(2)}(n)$ független, standard önadjungált Gauss-mátrixok. Ekkor a $\left(H^{(1)}(n), H^{(2)}(n)\right)$ rendszer ($(\mathcal{G}_n, tr_n)$-re nézve majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén; míg $(\mathcal{G}_n, \tau_n)$-re nézve megkötés nélkül) aszimptotikusan szabad.

A 2.1. alfejezetben bevezettük az R-diagonális pár fogalmát. Az a és b $(a, b \in \mathcal{A})$ nemkommutatív valószínûségi változókból alkotott (a, b) párt R-diagonális párnak neveztük, ha az (a, b) pár R-sora (2.1.18) alakú. Ez alapján egy $(\mathcal{A}, \varphi)$ *-valószínûségi mezõ $a \in \mathcal{A}$ nemkommutatív valószínûségi változóját R-diagonális elemnek fogjuk nevezni, ha az (a, a^*) pár R-diagonális. E szakasz befejezéseként az R-diagonális elemek egy lehetséges jellemzését adjuk meg. Ehhez szükségünk lesz a következõ fogalmakra.

Egy $(\mathcal{M}, \tau)$ nemkommutatív valószínûségi mezõt *W^*-valószínûségi mezõnek* hívunk, ha $\mathcal{M}$ egy von Neumann algebra és τ hû normális nyomszerû állapot $\mathcal{M}$-en.

Legyen x egy nemkommutatív valószínûségi változó, és legyen $T(n)$ egy $n \times n$-es véletlen mátrix minden $n \in \mathbf{N}$-re. Azt mondjuk, hogy $T(n)$ *x véletlen mátrix modellje majdnem mindenütt*, ha $(T(n), T(n)^*)$ tr_n szerinti eloszlása majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén tart (x, x^*) eloszlásához, ha $n \to \infty$.

Egy $n \times n$-es T véletlen mátrixot *bi-invariánsnak* nevezünk, ha T és $U_1 T U_2$ eloszlása $M_n(\mathbf{C})$ fölött minden $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_n$ unitér mátrix esetén azonos.

2.2.4. Tétel. *(Hiai, Petz, [**HP**]) Legyen $(\mathcal{M}, \tau)$ egy W^*-valószínûségi mezõ, és legyen $x \in \mathcal{M}$ olyan, hogy $\ker x = \{0\}$. Ekkor x akkor és csak akkor R-diagonális elem, ha x-hez létezik olyan $T(n)$ véletlen mátrix modell majdnem mindenütt, mely bi-invariáns és majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén nemszinguláris.*

A tétel bizonyítása [**HP**]-ben található meg.

2.3. Partíciók, párpartíciók

Tekintsünk egy tetszõleges véges elemszámú halmazt, és bontsuk föl diszjunkt részhalmazokra oly módon, hogy a felbontásban szereplõ egyik részhalmaz se legyen üres. Ekkor az eredeti halmaz minden egyes eleme pontosan egy részhalmaznak lesz eleme, a részhalmazok egyesítése pedig kiadja az eredeti halmazt. Az ilyen felbontásokat a halmaz *partícióinak* nevezzük, a felbontásban szereplõ részhalmazokat pedig az adott partíció *blokkjainak* hívjuk. Így például egy kilenc elemû halmaz egy lehetséges partíciójának úgynevezett lineáris ábrázolása látható a 2.3.1. ábrán. Itt a kis karikák a halmaz elemeit jelképezik, és pontosan azok az elemek tartoznak azonos blokkba, melyek egymással össze vannak kötve.

2.3.1. *Ábra*

Ha $\pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ egy partíció, a π partíciót alkotó blokkok számát $|\pi|$, míg az i-edik blokk elemeinek a számát a $|V_i|$ szimbólummal fogjuk jelölni.

Ismeretes [**An**], hogy egy n elemû halmaz összes partícióinak a számát B_n, az n-edik Bell-szám adja meg, ahol a Bell-számok sorozatára a

$$B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$$

rekurzív összefüggés érvényes ($B_0 = 1$ kezdõelemmel) [**L**].

A páros elemszámú halmazok partíciói között vannak olyanok, amelyek minden blokkja pontosan két elemet tartalmaz. Az ilyen speciális partíciókat *párpartícióknak* hívjuk. Amint az könnyen ellenõrízhetõ, egy $2n$ elemû halmaz összes párpartícióinak a száma

$$P_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}. \tag{2.3.1}$$

A továbbiakban rendezett halmazok partícióit vizsgáljuk. Természetesen bármely véges rendezett halmaz helyett gondolhatunk az elsõ n természetes számot tartalmazó halmazra, ahol n a kiválasztott halmaz elemeinek a száma. A rendezett halmazok partíciói esetén lehetõség van egy új fogalom bevezetésére. Tekintsük példaképpen az $\{1,2,3,4\}$ halmaz következõ két partícióját: $\pi_1 = \{\{1,4\},\{2,3\}\}$ és $\pi_2 = \{\{1,3\},\{2,4\}\}$. Grafikusan ábrázolva e két partíciót (2.3.2. ábra) nyomban szembeötlik köztük egy alapvetõ különbség. Nevezetesen az, hogy míg π_1 ábrázolása esetén a blokkokat kijelölõ vonalak nem keresztezik egymást, π_2 ábrázolásakor azonban igen. Nevezzük a π_2-höz hasonló partíciókat (amelyek grafikus ábrázolásában tehát a blokkokat kijelölõ vonalak (az elemeknek a rendezésnek megfelelõ sorrendje esetén) mindenképpen keresztezik egymást) *keresztezõ*, míg a többi (π_1-hez hasonló) partíciót *nemkeresztezõ partíciónak.* A fent elmondottakkal ekvivalens a következõ

2.3.1. Definíció. *Egy n elemû, "$<$" relációval ellátott rendezett S halmaz π partíciója*

a) ***keresztezõ****, ha létezik $V_1, V_2 \in \pi$ $(V_1 \neq V_2)$, és létezik $v_1, v_2 \in V_1$, $w_1, w_2 \in V_2$ úgy, hogy $v_1 < w_1 < v_2 < w_2$,*

b) ***nemkeresztezõ****, ha nem keresztezõ.*

π_1 π_2

2.3.2. *Ábra.*

Amint az könnyen ellenõrízhetõ, egy, kettõ és három elemû halmazok esetén minden szóbajövõ partíció nemkeresztezõ. Sõt, a négy elemû halmazok partíciói közül is csak az az egy lesz keresztezõ, mely a 2.3.2. ábrán látható π_2 partíciónak felel meg. Hétnél több elem esetén azonban a keresztezõ partíciók száma már meghaladja a nemkeresztezõ partíciók számát.

Az n elemû rendezett halmazok nemkeresztezõ partícióinak a halmazát $NC(n)$ jelöli; ennek számossága legyen Q_n. Egyszerû gondolatmenettel adódik [**O1**], hogy

$$Q_n = Q_{n-1}Q_0 + Q_{n-2}Q_1 + \ldots + Q_1 Q_{n-1} + Q_{n-1}Q_0, \quad (Q_0 = 1),$$

ami megegyezik az n-edik Catalan-számra vonatkozó ismert rekurzióval (l. például [**HiPe**]-ban). Ezek szerint n elem nemkeresztezõ partícióinak a száma nem más, mint az n-edik Catalan-szám:

$$Q_n = c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \tag{2.3.2}$$

Természetesen a párpartíciók között is lesznek keresztezõk és nemkeresztezõk. $2n$ elem nemkeresztezõ párpartícióinak a számát jelöljük S_{2n}-nel, halmazukat pedig $NCP\,(2n)$-nel. A partíciók elméletének egy meglepõ eredménye [**Kr**], hogy az $NCP\,(2n)$ halmaz számosságát is a Catalan-számok adják meg, nevezetesen:

$$S_{2n} = c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \tag{2.3.3}$$

Vezessük be a nemkeresztezõ párpartíciók egy újabb ábrázolását. Minden pár elsõ tagjának feleltessünk meg egy ferdén felfelé mutató nyilat $(\nearrow)$, a párok második tagjainak pedig egy ferdén lefelé mutató nyilat $(\searrow)$. A nyilakat egymáshoz csatlakoztatva egy síkbeli pályát kapunk. Erre láthatunk példát a 2.3.3. ábrán.

$$\circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\circ \qquad \longleftrightarrow$$

2.3.3. *Ábra*

Mivel minden párpartíció ábrázolásakor nyilván ugyanannyi lefelé irányuló nyilat kapunk, mint amennyi a felfelé mutató nyilak száma, így ha a pálya az origóból indul, "nulla" magasságban, a vízszintes tengelyen fog végzõdni is. Sõt, mivel a felfelé irányuló nyíl minden pár esetén megelõzi a lefelé mutatót, belátható, hogy a pálya sohasem megy a vízszintes tengely alá. Az ilyen pályákat szokás Catalan-pályának nevezni. Könnyen ellenõrízhetõ, hogy különbözõ nemkeresztezõ párpartíciókhoz különbözõ pálya tartozik, és minden Catalan-pálya megkapható valamilyen nemkeresztezõ párpartíció képeként. Ebbõl az következik, hogy $2n$ elem nemkeresztezõ párpartícióinak a száma megegyezik a $2n$ hosszúságú Catalan-pályák számával. Ez (2.1.4) alapján egyben egy újabb bizonyítását adja a fentebb már megadott eredménynek, miszerint

$$\#NCP\,(2n) = c_n,$$

másrészt a 2.1. alfejezetben a standard Wigner-eloszlás momentumaira kapott (2.1.5) formula alapján megállapíthatjuk, hogy a standard Wigner-eloszlás n-edik momentumát n elem nemkeresztezõ párpartícióinak száma adja meg minden $n = 0, 1, 2, \ldots$ esetén.

Meglepõen hasonló eredményt kapunk a standard normális eloszlás esetén: az

$$f\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

formula alapján a momentumokat közvetlen integrálással kiszámolva (2.3.1) alapján az adódik, hogy a standard Gauss-eloszlás n-edik momentuma megegyezik n elem összes párpartícióinak a számával minden $n = 0, 1, 2, \ldots$ esetén.

Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy a klasszikus Poisson-eloszlás momentumai is kifejezhetõk bizonyos partíciók számosságával. Nevezetesen a λ paraméterû Poisson-eloszlás n-edik momentuma λ azon polinomja, ahol λ^i együtthatója n elem azon partícióinak a száma, melyekben a blokkok száma éppen i [**Ro**] . A 3. fejezetben megmutatjuk (3.1. tétel), hogy a Poisson-eloszlás szabad analogonjára ugyanez érvényes, ha csak a nemkeresztezõ partíciókat vesszük figyelembe.

A 2.1. alfejezetben a momentum-kumuláns formulák klasszikus és szabad változatai (a (2.1.9), illetve (2.1.14) és (2.1.16) egyenlõségek), valamint a fenti eredmények alapján kimondhatjuk, hogy míg a klasszikus valószínûségszámítás az összes partíciók kombinatorikájával, addig a szabad valószínûségelmélet a nemkeresztezõ partíciók kombinatorikájával áll szoros kapcsolatban.

Legyen ν_1 és ν_2 az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz két partíciója. Azt mondjuk, hogy $\nu_1 \leq \nu_2$, ha ν_1 minden V blokkjához található olyan U blokk ν_2-ben, hogy $V \subset U$. Az így definiált $\leq$ reláció egy részben rendezés a partíciók halmazán. Könnyen ellenõrízhetõ, hogy ezzel a relációval az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz partíciói hálót alkotnak minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. E háló jele L_n [**An**] . A háló legkisebb eleme az

$$\mathbf{0}_n = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\},$$

míg legnagyobb eleme

$$\mathbf{1}_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Hasonlóan, a nemkeresztezõ partíciók is hálót alkotnak a fenti $\leq$ relációval, ugyanezen legnagyobb és legkisebb elemekkel. A nemkeresztezõ partíciók hálójával kapcsolatban l. például [**Si**] , [**Sp1**] , [**Sp2**].

A 4. fejezetben a partíciók egy újabb részhalmazáról, az úgynevezett szimmetrikus partíciókról is az derül ki, hogy a fenti $\leq$ relációval hálót alkotnak. E példákkal ellentétben például a keresztezõ partíciók nem alkotnak hálót, amint az könnyen ellenõrízhetõ.

Csak megemlítjük, hogy a partíciók hálóján bevezetett $L_n \times L_n \to \mathbf{R}$ függvények segítségével a valószínûségszámítás (illetve L_n helyébe a nemkeresztezõ partíciók $NC(n)$ hálóját téve a szabad valószínûségelmélet) számos eredménye kapható meg egyszerû és szemléletes úton. A szabad valószínûségelmélettel kapcsolatban l. például [**Sp2**] , [**NS1**] .

2.4. A Hamburger-féle momentum probléma

A Hamburger-féle momentum probléma azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy egy $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ valós számsorozat lehet-e valamely μ mérték momentum-sorozata, azaz található-e az $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ szekvenciához μ mérték a valós számegyenesen úgy, hogy

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n d\mu(t)$$

teljesüljön minden n természetes szám esetén. A válasz már a század elsõ felében ismert volt ([**Fi**], [**AK1**], [**AK2**]), és az alábbi tételben foglalható össze (a bizonyítást l. például [**ST**]-ben):

2.4.1. Tétel. *A*

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n d\mu(t) \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.4.1}$$

Hamburger-féle momentum problémának akkor és csak akkor van megoldása, ha a

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_n \\ m_1 & m_2 & \dots & m_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_n & m_{n+1} & \dots & m_{2n} \end{vmatrix} \geq 0 \tag{2.4.2}$$

minden n természetes szám esetén.

Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzen olyan megoldás, melynek spektruma nem redukálható egy véges ponthalmazra az, hogy

$$\Delta_n > 0 \tag{2.4.3}$$

teljesüljön minden n-re.

Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzen olyan megoldás, melynek tartója pontosan $k+1$ különálló pontból áll az, hogy

$$\begin{aligned} \Delta_0 &> 0,\ \Delta_1 > 0,\ \dots, \Delta_k > 0, \\ \Delta_{k+1} &= \Delta_{k+2} = \dots = 0. \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Ez utóbbi esetben a momentum probléma megoldása egyértelmûen meghatározott.

Megjegyezzük, hogy a momentum probléma megoldhatóságának általánosabb esetben is ismertek a feltételei (több dimenziós eset), mint ahogy több más speciális esetre is vannak hasonló, az adott problémához igazodó tételek (például amikor a mérték tartója a pozitív félegyenes) [**ST**], [**Ak**].

Tekintsünk egy μ valószínûségi eloszlást a valós számegyenesen. μ *Cauchy-transzformáltja* ekkor

$$G_\mu(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{z-t}$$

$z \in \mathbf{C}^+ = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ (vagy $z \in \mathbf{C}^- = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im} z < 0\}$) esetén. $G_\mu(z)$ analitikus $\mathbf{C}^+$-on, és rendelkezik a következõ tulajdonságokkal:

$$\begin{aligned} G_\mu\left(\mathbf{C}^+\right) &\subset \mathbf{C}^-, \\ |G_\mu(z)| &\leq \frac{1}{\mathrm{Im}\, z}. \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Ha μ kompakt tartójú, $G_\mu(z)$ analitikus a ∞ egy környezetében. Ilyenkor $G_\mu(z)$-t itt sorfejtve

$$G_\mu(z) = z^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} m_k z^{-k-1}, \tag{2.4.6}$$

ahol

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k d\mu(t) \qquad \left(\forall k \in \mathbf{Z}^+\right)$$

μ momentumait jelöli.

$t_0 \in \mathbf{R}$ μ tartójának akkor és csak akkor izolált pontja, ha $z = t_0$ $G_\mu(z)$ egyszerû pólusa. Ilyenkor $\mu(\{t_0\})$ $G_\mu(z)$ t_0–ban való reziduuma.

Ha μ–nek létezik $f = d\mu/dx$ folytonos deriváltja, akkor a Stieltjes-féle inverziós formula [**HP**] alapján

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{y \downarrow 0} \mathrm{Im}\, G_\mu(z + iy). \tag{2.4.7}$$

Ha μ a (2.4.1) Hamburger-féle momentum probléma megoldása, akkor μ Cauchy-transzformáltja fölírható az alábbi lánctört alakban:

$$G_\mu(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{z-t} = \cfrac{\beta_0}{z - \alpha_1 - \cfrac{\beta_1}{z - \alpha_2 - \cfrac{\beta_2}{z - \alpha_3 - \ddots}}}, \tag{2.4.8}$$

ahol [**ST**]

$$\beta_0 = \Delta_0, \quad \beta_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0^2}, \quad \beta_n = \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2} \quad (n \geq 2), \tag{2.4.9}$$

és az α_i valós számok szintén meghatározhatók a momentumok ismeretében [**Per**]. Ezek alapján (2.4.4) teljesülése esetén

$$\beta_0 > 0,\ \beta_1 > 0,\ \ldots, \beta_k > 0,\ \beta_{k+1} = 0$$

(azaz a lánctört véges), míg (2.4.3) teljesülése esetén

$$\beta_n > 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

áll fönn (vagyis a lánctört végtelen). (Ha μ valószínûségi mérték, akkor még $\beta_0 = 1$).

Ha μ az origóra szimmetrikus mérték, akkor a (2.4.8) formulában szereplõ α_i konstansok értéke minden $i = 1, 2, \ldots$ esetén nulla, vagyis ekkor

$$G_\mu(z) = \cfrac{\beta_0}{z - \cfrac{\beta_1}{z - \cfrac{\beta_2}{z - \ddots}}}.$$

(2.4.9) alapján

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = \beta_0\beta_1 \ldots \beta_n.$$

Legyen $\sum$ azon $\mu : \mathbf{C}\langle X\rangle \to \mathbf{C}$ lineáris funkcionálok halmaza, melyekre $\mu(\mathbf{1}) = 1$. (2.1.1) alapján nemkommutatív valószínûségi változók eloszlásait pont ilyen μ lineáris funkcionálokkal azonosítottuk. Minden $\mu \in \sum$ lineáris funkcionált egyértelmûen meghatároznak $\left(\mu\left(X^k\right)\right)_{k=0}^{\infty}$ értékei. Ha μ egy olyan valószínûségeloszlás a valós számegyenesen, hogy minden momentuma létezik, akkor $\mu\left(X^k\right) = \int t^k d\mu(t)$ alapján μ-t tekinthetjük $\sum$ elemének is. Formális sorként minden $\mu \in \sum$ esetén beszélhetünk annak

$$G_\mu(z) = z^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(X^k\right) z^{-k-1}$$

Cauchy-transzformáltjáról. Az így definiált $G_\mu(z)$ és $z^{-1} + R_\mu(z)$ (mint formális sorok) egymás inverzei:

$$R_\mu(z) + z^{-1} = G_\mu^{-1}(z), \tag{2.4.10}$$

ahol $R_\mu(z)$ μ R-transzformáltja [**V2**], [**Sp2**].

Végül a (2.1.6) formula egy általánosításaként legyen $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ pozitív valós számok egy sorozata, és legyen S az a súlyozott jobbra tolás operátor, melyre

$$S\delta_n = b_{n+1}\delta_{n+1} \qquad \left(\forall n \in \mathbf{Z}^+\right).$$

Ha $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ korlátos, akkor S is az. Megmutatható (l. például [**Ch**]), hogy ilyenkor $S + S^*$ eloszlása δ_0-ban az a μ mérték, melynek Cauchy-transzformáltja az alábbi

$$G_\mu(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{z-t} = \cfrac{1}{z - \cfrac{b_1^2}{z - \cfrac{b_2^2}{z - \ddots}}}$$

lánctört alakba írható. Ezt az eredményt az 5. fejezetben fogjuk fölhasználni.

3. A SZABAD POISSON-ELOSZLÁS

A klasszikus valószínûségelméletben a Poisson-eloszlás a binomiális eloszlás határeseteként kapható meg. A Poisson-határeloszlástétel [**Fe**] szerint $n \to \infty$ esetén

$$\mu_n = \left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\delta_0 + \frac{\lambda}{n}\delta_1\right)^{*n} \to \mu_{Poiss} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \delta_k, \tag{3.1}$$

ahol $(\ldots)^{*n}$ a zárójelben álló kifejezés n-szeres, önmagával vett konvolúcióját jelenti, és λ pozitív valós szám. Más megfogalmazásban a tétel azt állítja, hogy n darab független, azonos $\mu_0 = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\delta_0 + \frac{\lambda}{n}\delta_1$ eloszlással jellemezhetõ valószínûségi változó összegének az eloszlása $n \to \infty$ esetén a Poisson-eloszlás lesz.

Fölmerül a kérdés, hogy a tétel átültethetõ-e a nemkommutatív valószínûségelméletbe. Ehhez vizsgáljuk meg n darab egymással szabad kapcsolatban lévõ, azonos $\mu_0 = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\delta_0 + \frac{\lambda}{n}\delta_1$ eloszlással jellemezhetõ nemkommutatív valószínûségi változó összegének az eloszlását $n \to \infty$ esetén. Az additív szabad konvolúció definíciója szerint (l. a 2.1. alfejezet (2.1.12) fölötti bekezdését) $n = 2$ esetén az összeg eloszlása $\mu_2 = \left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\delta_0 + \frac{\lambda}{n}\delta_1\right) \boxplus \left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\delta_0 + \frac{\lambda}{n}\delta_1\right)$, illetve a (3.1) formulával analóg módon irható

$$\mu_n = \left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\delta_0 + \frac{\lambda}{n}\delta_1\right)^{\boxplus n},$$

ahol $(\ldots)^{\boxplus n}$ a zárójelben álló kifejezés n-szeres, önmagával vett additív szabad konvolúcióját jelenti. A μ_n eloszlást kerülõ úton, az R-transzformált (l. a 2.1.3. definíciót) segítségével határozhatjuk meg. μ_0 Cauchy-transzformáltjára

$$G_{\mu_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_0(x)}{z-x} = \frac{nz - n + \lambda}{nz(z-1)}$$

adódik, ahonnan μ_0 R-transzformáltja (2.4.10) alapján

$$R_{\mu_0}(z) = G_{\mu_0}^{-1}(z) - \frac{1}{z} = -\frac{1}{z} + \frac{z + 1 - \sqrt{(z+1)^2 - 4z\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}}{2z},$$

amit $\frac{1}{n}$ szerint sorbafejtve

$$R_{\mu_0}(z) = -\frac{\lambda}{z-1}\frac{1}{n} - O\left(n^{-2}\right)$$

adódik. Mivel az R-transzformált linearizálja az additív szabad konvolúciót (l. a (2.1.13) fölötti bekezdést),

$$R_{\mu_n}(z) = nR_{\mu_0}(z) = -\frac{\lambda}{z-1} - O\left(\frac{1}{n}\right)$$

és

$$\lim_{n\to\infty} R_{\mu_n}(z) = \frac{\lambda}{1-z}.$$

Jelölje a keresett eloszlást $\mu_\lambda = \lim_{n\to\infty} \mu_n$, ekkor tehát μ_λ R-sora

$$R_{\mu_\lambda}(z) = \frac{\lambda}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda z^k,$$

amibõl μ_λ momentumaira (2.1.11) alapján

$$m_n = \left\langle \left(l^* + \sum_{k=0}^{n} \lambda l^k \right)^n \Phi, \Phi \right\rangle, \tag{3.2}$$

míg μ_λ Cauchy-transzformáltja az $R_\mu(z) = G_\mu^{-1}(z) - \frac{1}{z}$ összefüggés alapján

$$G_{\mu_\lambda}(z) = \frac{z + 1 - \lambda - \sqrt{(\lambda + 1 - z)^2 - 4\lambda}}{2z} \tag{3.3}$$

adódik. (A számolás során a gyökök elõjelét úgy kell megválasztani, hogy $G_{\mu_\lambda}(\mathbf{C}^+) \subset \mathbf{C}^-$ teljesüljön, l. (2.4.5) .)

μ_λ folytonos része a Cauchy-transzformáltból a (2.4.7) Steiltjes-inverziós formula segítségével kapható meg:

$$\mu_{folyt} = \lim_{y\downarrow 0} \left\{ -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} G_\mu(x + iy)\, dx \right\}.$$

$G_{\mu_\lambda}(z)$ $z = 0$ helyen való szingularitása és μ_{folyt} normálatlansága miatt végül

$$\mu_\lambda = (1-\lambda)\,\delta_0 + \frac{\sqrt{4\lambda - (x - 1 - \lambda)^2}}{2\pi x} \chi(x)\, dx,$$

ahol χ az $\left[\left(1-\sqrt{\lambda}\right)^2, \left(1+\sqrt{\lambda}\right)^2\right]$ intervallum karakterisztikus függvénye. Ha λ értéke eléri vagy meghaladja az egyet, akkor az atomos rész eltûnik, vagyis

$$\mu_\lambda = \begin{cases} (1-\lambda)\,\delta_0 + \frac{\sqrt{4\lambda-(x-1-\lambda)^2}}{2\pi x}\chi(x)\, dx, & \text{ha } 0 < \lambda < 1 \\ \frac{\sqrt{4\lambda-(x-1-\lambda)^2}}{2\pi x}\chi(x)\, dx, & \text{ha } \lambda \geq 1, \end{cases} \tag{3.4}$$

ahol χ jelentése a fenti. Ez tehát a Poisson-eloszlás analogonja a szabad valószínûségelméletben, és ezért a (3.4) képlettel adott eloszlást szokás szabad Poisson-eloszlásnak nevezni. Az elnevezés és a fent vázolt levezetés egyaránt Voiculescutól származik [**BV**], [**VDN**]. Fontos azonban megemlíteni, hogy a (3.4) képlettel adott μ_λ eloszlás már jóval korábban, mintegy három évtizede ismert volt. Marchenko és Pastur 1967-ben p darab, n dimenziós térbeni, független, egy rangú véletlen projekció összegének sajátérték-eloszlását tanulmányozta $n \to \infty$ esetben, $\frac{p}{n} \to \lambda$ $(\lambda > 0)$ feltétel mellett. Azt találták, hogy az általuk keresett - és késõbb róluk elnevezett - eloszlás épp a (3.4) képlettel adott μ_λ eloszlással egyezik meg [**MP**].

A következõ tétel μ_λ momentumait adja meg.

3.1. Tétel. [**OP**] *A (3.4) képlettel megadott Marchenko-Pastur eloszlás momentumaira*

$$m_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \binom{n}{i} \binom{n}{i-1} \lambda^i. \tag{3.5}$$

Bizonyítás. μ_λ momentumaira

$$m_n = \int x^n d\mu_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_A^B x^{n-1} \sqrt{4\lambda - (x-1-\lambda)^2}\, dx,$$

ahol $A = \left(1-\sqrt{\lambda}\right)^2$ és $B = \left(1+\sqrt{\lambda}\right)^2$. Többszöri parciális integrálással a következõ rekurzió adódik:

$$m_n = \frac{2n-1}{n+1}(1+\lambda)\, m_{n-1} - \frac{n-2}{n+1}(1-\lambda)^2\, m_{n-2}, \tag{3.6}$$

$n \geq 2$ esetén. Az integrált közvetlenül kiszámolva (csak μ_λ folytonos részét tekintve) az $n = 0$ esetben $0 < \lambda < 1$ esetén $m_0 = \lambda$, $\lambda \geq 1$ esetén $m_0 = 1$ adódik; míg $m_1 = \lambda$.

μ_λ R-sorának ismeretében azonban a momentumok a (3.2) formula alapján is számolhatók. Ezt alkalmazva, az n-edik momentum kiszámításánál $\langle L_n L_{n-1} \ldots L_1 \phi, \phi \rangle$ típusú kifejezéseket kell kiértékelnünk, ahol L_i $(1 \leq i \leq n)$ jelentése vagy l^*, vagy λl^k $(k \geq 0$, egész). Amennyiben egy ilyen kifejezésben az l^*-ok száma nem azonos l eredõ hatványával, akkor a kifejezés értéke nulla. A kifejezés értéke abban az esetben is nulla, ha van olyan i_0 index, hogy az $L_{i_0} L_{i_0-1} \ldots L_2 L_1$ részszorzatban az l^*-ok száma nagyobb, mint l ottani eredõ hatványa. Minden más esetben a kifejezés értéke nullától különbözõ, és λ egy hatványát adja. A tagokat λ hatványai szerint csoportosítva

$$m_n = \sum_{i=1}^{n} Q_n^{(i)} \lambda^i \tag{3.7}$$

adódik, ahol $Q_n^{(i)}$ azon nem nulla tagok száma, melyekben a tényezõk száma n, λ eredõ hatványa pedig i. i értéke nyilván nem lehet egynél kisebb, mivel az esetben az adott kifejezésben csak eltüntetõ operátor szerepelne. Másrészt i értéke n-nél nagyobb sem lehet n tényezõ esetén (hisz ekkor l eredõ hatványa is nagyobb lenne mint a szorzatban elõforduló l^*-ok száma). Emellett könnyen ellenõrízhetõ, hogy $Q_n^{(1)} = Q_n^{(n)} = 1$ minden $n \geq 1$ esetén.

A (3.7) összefüggést (3.6)-ba írva és λ azonos hatványainak együtthatóit összehasonlítva egy újabb rekurziót kapunk $Q_n^{(i)}$-re . Amint az könnyen ellenõrízhetõ, ez utóbbit a

$$Q_n^{(i)} = \frac{1}{n}\binom{n}{i}\binom{n}{i-1}$$

számsorozat kielégíti, ami - figyelembe véve még m_0 és m_1 értéket - állításunkat igazolja. ■

3.2. Megjegyzés. A fenti tétel szerint a Marchenko-Pastur eloszlás n-edik momentuma λ egy polinomja. A polinom $Q_n^{(i)}$ együtthatóinak kombinatorikai jelentés tulajdonítható [**Kr**]: $Q_n^{(i)}$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz azon nemkeresztezõ partícióinak a száma, melyekben a blokkok száma éppen i. A momentumok kapcsolata a nemkeresztezõ partíciókkal újabb érv amellett, hogy a Marchenko-Pastur eloszlás a Poissoneloszlás szabad analogonja, hisz a Poisszon eloszlás momentumai hasonló kapcsolatban állnak az összes partíciók hálójával: a λ paraméterû Poisson-eloszlás n-edik momentuma szintén λ egy polinomja, ahol λ^i együtthatója az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz azon partícióinak a száma, melyekben a blokkok száma éppen i. (Megjegyzendõ, hogy a Gauss- és a Wigner-eloszlás között hasonló analógia áll fenn: n-edik momentuk az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz összes, illetve nemkeresztezõ párpartícióinak számával egyezik meg. (Bõvebben l. a 2.3. alfejezetben.))

Az alábbiakban a Marchenko-Pastur eloszlás egy variánsa játszik fontos szerepet. Legyen

$$\bar{\mu}_\lambda = \begin{cases} \left(1 - \lambda^{-1}\right)\delta_0 + \frac{\sqrt{4\lambda - (x-1-\lambda)^2}}{2\pi\lambda x}\chi(x)\, dx, & \text{ha } 1 < \lambda, \\ \frac{\sqrt{4\lambda - (x-1-\lambda)^2}}{2\pi\lambda x}\chi(x)\, dx, & \text{ha } 0 < \lambda \leq 1, \end{cases} \tag{3.8}$$

ahol χ most is az $\left[\left(1-\sqrt{\lambda}\right)^2, \left(1+\sqrt{\lambda}\right)^2\right]$ intervallum karakterisztikus függvénye. A $\bar{\mu}_\lambda$ eloszlás momentumai μ_λ momentumaiból könnyen meghatározhatók. Ha $\bar{m}_n$ jelöli $\bar{\mu}_\lambda$ momentumait, akkor

$$m_n = \lambda \bar{m}_n \qquad (n = 2, 3, \ldots), \tag{3.9}$$

míg $\bar{m}_1 = 1$.

A következõ két tétel véletlen mátrixok sajátérték-sûrûségére vonatkozik. Fontos speciális esetként megemlíthetjük a Wishart-mátrixot [**MSz**], l. még (2.2.2)-t. Az alább bizonyításra kerülõ tételek egy erõsebb formája megtalálható Wachter 1978-as dolgozatában [**Wa**]. Fõ célunk itt egy egyszerûbb, az elõzõ tétel eredményén és a momentumok módszerén alapuló elemi kombinatorikai bizonyítás megadása. A felhasznált módszer régóta ismert, véletlen mátrixokra elõször Wigner alkalmazta az 1950-es években [**Wi2**] (l. még [**FK**]). A bizonyítás különösen a második, 3.4. tétel esetében egyszerûsíthetõ jelentõsen, elsõsorban annak köszönhetõen, hogy esetünkben a konvergencia gyorsabb, n^{-2} rendû, az általánosabb esetben érvényes n^{-1} helyett.

3.3. Tétel. [**OP**] *Legyen* $T^{(n)} = \left(\xi_{ij}^{(n)}\right)$ *olyan* $p(n) \times n$*-es véletlen mátrix, melynek elemei független, azonos eloszlású valószínûségi változók nulla várható értékkel és egy szórással, valamint korlátos momentumsorozattal. Legyen ezen kívül* $\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = \lambda$*. Ekkor a* $p(n) \times p(n)$*-es* $\Lambda^{(n)} = T^{(n)}T^{(n)t}/n$ *véletlen mátrix átlagos sajátérték-sûrûsége* $n \to \infty$ *esetén a* (3.8) *képlettel megadott* $\bar{\mu}_\lambda$ *eloszláshoz tart. (Itt* $T^{(n)t}$ $T^{(n)}$ *transzponáltja.)*

Bizonyítás. A konvergenciát a momentumokon keresztül fogjuk igazolni. A 2.2. alfejezetben leírtak alapján egy $m \times m$-es X véletlen mátrix esetén

$$\tau_m = \frac{1}{m}\sum_i E\left(X_{ii}\right),$$

ahol E a várható értéket jelöli. Így állításunk nem más, mint hogy

$$\lim_{n\to\infty} \tau_{p(n)}\left(\left(\Lambda^{(n)}\right)^k\right) = \int x^k d\bar{\mu}_\lambda(x).$$

Az egyszerûbb írásmód érdekében az alábbiakban $\xi_{ij}^{(n)}$ helyett átalában csak ξ_{ij}-t és $\Lambda^{(n)}$ helyett Λ-t írunk, ha csak n szerepét nem akarjuk hangsúlyozni. $\Lambda^{(n)}$ k-adik momentumát kifejtve a diagonális elemekre

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\Lambda^{(n)}\right)^k\right)_{ii} \\
= &\sum_{r_1,r_2,\dots,r_{k-1}=1}^{p(n)} \Lambda_{ir_1}\Lambda_{r_1r_2}\Lambda_{r_2r_3}\dots\Lambda_{r_{k-1}i} \\
= &\sum_{r_1,r_2,\dots,r_{k-1}=1}^{p(n)} \left(\frac{1}{n}\sum_{s_1=1}^{n}\xi_{is_1}\xi_{r_1s_1}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{s_2=1}^{n}\xi_{r_1s_2}\xi_{r_2s_2}\right)\dots\left(\frac{1}{n}\sum_{s_k=1}^{n}\xi_{r_{k-1}s_k}\xi_{r_{k-1}s_k}\right) \\
= &\frac{1}{n^k}\sum_{r_1,r_2,\dots,r_{k-1}=1}^{p(n)}\sum_{s_1,s_2,\dots,s_k=1}^{n}\xi_{is_1}\xi_{r_1s_1}\xi_{r_1s_2}\xi_{r_2s_2}\dots\xi_{r_{k-1}s_k}\xi_{r_{k-1}s_k}
\end{aligned}$$

adódik, míg az átlagos sajátérték-sûrûség momentumaira

$$\begin{aligned}\tau\left(\Lambda^k\right) &= \frac{1}{p(n)}\sum_{i=1}^{p(n)} E\left(\left(\Lambda^k\right)_{ii}\right)\\ &= \frac{1}{p(n)\,n^k}\sum_{m_1,m_2,\dots,m_k=1}^{p(n)}\ \sum_{n_1,n_2,\dots,n_k=1}^{n} E\left(\xi_{m_1n_1}\xi_{m_2n_1}\xi_{m_2n_2}\xi_{m_3n_2}\dots\xi_{m_kn_k}\xi_{m_1n_k}\right).\end{aligned}$$

Értelmezzük az l_1 és l_2 számokat a következõképpen:

$$l_1 = \#\left\{m_1, m_2, \dots, m_k\right\} \qquad \text{és} \qquad l_2 = \#\left\{n_1, n_2, \dots, n_k\right\}.$$

Ha az $E\left(\xi_{m_1n_1}\xi_{m_2n_1}\xi_{m_2n_2}\xi_{m_3n_2}\dots\xi_{m_kn_k}\xi_{m_1n_k}\right)$ tagokat az $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ és $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ halmazok számossága szerint csoportosítjuk, akkor

$$\tau\left(\Lambda^k\right) = \frac{1}{p(n)\,n^k}\sum_{l_1=1}^{k}\sum_{l_2=1}^{k}\sum_{(l_1,l_2)} E\left(\xi_{m_1n_1}\xi_{m_2n_1}\xi_{m_2n_2}\xi_{m_3n_2}\dots\xi_{m_kn_k}\xi_{m_1n_k}\right), \tag{3.10}$$

ahol az utolsó összegzés azokra a tagokra vonatkozik, melyekben l_1 és l_2 bizonyos rögzített érték.

Ezek után megmutatjuk, hogy a (3.10) képletben azoknak a tagoknak, melyekben $l = l_1 + l_2 \neq k + 1$ és azoknak, amelyekben nem minden ξ_{ij} szerepel legalább kétszer, nincs járulékuk a végsõ eredményre.

Ezt elõször az $l = l_1 + l_2 < k$ esetére igazoljuk.

A Hölder egyenlõtlenség alapján

$$\begin{aligned}&\left|E\left(\xi^{(n)}_{m_1n_1}\xi^{(n)}_{m_2n_1}\xi^{(n)}_{m_2n_2}\xi^{(n)}_{m_3n_2}\dots\xi^{(n)}_{m_kn_k}\xi^{(n)}_{m_1n_k}\right)\right|\\ \le\ & E\left(\left|\xi^{(n)}_{m_1n_1}\right|^k\right)^{1/k}\dots E\left(\left|\xi^{(n)}_{m_1n_k}\right|^k\right)^{1/k} \le C_k(n).\end{aligned}$$

(Ilyen $C_k(n)$ korlátok nyilván léteznek, hiszen a ξ_{ij} mátrixelemek azonos eloszlásúak, és feltevésünk szerint minden momentumuk korlátos.) E becslés szerint

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p(n)\,n^k}\left|\sum_{(l_1,l_2)} E\left(\xi_{m_1n_1}\xi_{m_2n_1}\xi_{m_2n_2}\xi_{m_3n_2}\dots\xi_{m_kn_k}\xi_{m_1n_k}\right)\right|\\ \le\ & \frac{1}{p(n)\,n^k}\sum_{(l_1,l_2)}\left|E\left(\xi_{m_1n_1}\xi_{m_2n_1}\xi_{m_2n_2}\xi_{m_3n_2}\dots\xi_{m_kn_k}\xi_{m_1n_k}\right)\right|\\ \le\ & \frac{1}{p(n)\,n^k}\sum_{(l_1,l_2)} C_k(n) \le \frac{1}{p(n)\,n^k}\binom{p(n)}{l_1} l_1^k \binom{n}{l_2} l_2^k C_k(n)\\ =\ & \frac{p(p-1)\dots(p-l_1+1)\,n(n-1)\dots(n-l_2+1)}{pn^k}\,\frac{l_1^k l_2^k}{l_1!\,l_2!}C_k(n),\end{aligned}$$

az utolsó sorban szereplõ kifejezés viszont $n \to \infty$ esetén nullához tart, valahányszor $l = l_1 + l_2 < k$. (Az egyenlõtlenség-lánc harmadik sorában azt a becslést alkalmaztuk, miszerint azon tagok száma, melyekben az $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ és $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ halmazok számossága éppen l_1 illetve l_2, nem lehet nagyobb mint

$$\binom{p(n)}{l_1} l_1^k \binom{n}{l_2} l_2^k,$$

hisz minden m_i $p(n)$ különbözõ értéket vehet föl, míg minden egyes n_i esetében a lehetséges értékek száma n.)

Ezután megmutatjuk, hogy ha $l = l_1 + l_2 > k + 1$, akkor

$$E\left(\xi_{m_1 n_1} \xi_{m_2 n_1} \xi_{m_2 n_2} \xi_{m_3 n_2} \ldots \xi_{m_k n_k} \xi_{m_1 n_k}\right) = 0. \tag{3.11}$$

Ezt teljes indukcióval igazoljuk. $k = 1$ esetén az egyenlõség nyilvánvalóan fenn áll, hisz ilyenkor l értéke nem lehet nagyobb kettõnél. Amikor $k = 2$, egyedül a $\xi_{m_1 n_1} \xi_{m_2 n_1} \xi_{m_2 n_2} \xi_{m_1 n_2}$ szekvenciára teljesül az $l > k + 1$ egyenlõtlenség, ha $m_1 \neq m_2$ és $n_1 \neq n_2$. Ebben a szorzatban ilyenkor minden ξ_{ij} pontosan egyszer szerepel, így a függetlenség és a mátrixelemek nulla várható értéke miatt a szorzat várható értéke is nulla. Ez az elsõ eset, ahol láthatóvá válik az ok, hogy az ilyen tagoknak miért nincs járulékuk (3.10)-ben.

Tegyük most fel, hogy adott k és $l = k + 2$ esetén minden megfelelõ $\xi_{m_1 n_1} \xi_{m_2 n_1} \xi_{m_2 n_2} \xi_{m_3 n_2} \ldots \xi_{m_k n_k} \xi_{m_1 n_k}$ szorzatban van legalább egy olyan ξ_{ij}, amelyik csak egyszer szerepel. Ebbõl a függetlenség miatt már következne (3.11). Ebben az esetben azonban az állítás igaz ugyanezen k mellett minden $l > k + 1$ esetén is. Ha ugyanis $l = k + 2 + j$ $(j = 0, 1, \ldots, 2k)$ esetén egy szorzatban minden ξ_{ij} legalább kétszer szerepelne, akkor a j "új" indexet "régire" cserélve ugyanez állna $l = k + 2$-re is, feltevésünknek ellentmondva.

Ezt figyelembe véve a indukciós lépést elég a $k + 1$, $l = k + 3$ esetre elvégezni. Tegyük fel, hogy van olyan $2k$ tényezõbõl álló, $l = k + 3$-hoz tartozó szekvencia, melyben minden ξ_{ij} legalább kétszer szerepel. Ez egyben azt is jelentené, hogy van legalább egy m_p vagy n_p index(érték), amelyik csak két szomszédos ξ_{ij}-ben szerepel, hisz különben minden index legalább négy ξ_{ij}-ben szerepelne a szorzat szerkezete miatt, de $4(k+3)$ index nem férhet be $4k + 4$ helyre. (Itt az elsõ és az utolsó elemet szintén szomszédoknak tekintjük.)

Mivel ez az m_p vagy n_p index csak két ξ_{ij}-ben jelenik meg, és mivel - feltevésünk szerint - minden ξ_{ij} legalább kétszer szerepel, ez a két ξ_{ij} azonos kell legyen. Így ha a

$$\ldots \xi_{m_{p-1} n_{p-1}} \xi_{m_p n_{p-1}} \xi_{m_p n_p} \xi_{m_{p+1} n_p} \xi_{m_{p+1} n_{p+1}} \ldots$$

szekvenciarészletben m_p az az index, amelyik csak két ξ_{ij}-ben szerepel, akkor szükségképpen $n_{p-1} = n_p$, míg ha ez az index n_p, abból $m_p = m_{p+1}$ következik. (A ciklikus sorrendnek megfelelõen $n_0 = n_k$ és $m_{k+1} = m_1$ értékadással.) Bármelyik esettel van is dolgunk, a megfelelõ párt eliminálva a szekvenciából, egy olyan k-hoz és

$l = k + 2$-höz tartozó rövidebb szekvenciát kapunk, mely struktúrájában megfelel a követelményeknek. Amennyiben az elhagyott pár a $\xi_{m_1 n_1} \xi_{m_1 n_k}$ volt (azaz x_p jelentése m_1 volt), akkor $\xi_{m_2 n_1}$-et $\xi_{m_k n_k}$ után írva (ezt megtehetjük, hisz a ξ_{ij} valószínûségi változók kommutálnak), ismét a kívánt struktúrájú szekvenciához jutunk. Továbbá itt is minden ξ_{ij} legalább kétszer szerepel, hisz az eliminált pár nem lehetett egy triplet része, mivel m_p (vagy n_p) csak az elhagyott párban szerepelt. Ez azonban ellentmond indukciós feltevésünknek. Végül tehát azt a következtetést vonhatjuk le, hogy minden $2k$ hosszúságú szekvenciában, melyben $l > k + 1$, legalább egy ξ_{ij} csak egyszer szerepel, és így az ilyen szorzatok várható értéke nulla.

Ezután tekintsünk olyan $2k$ hosszúságú szekvenciákat, amelyekben $l = k + 1$. Megmutatjuk, hogy ilyenkor, ha a szorzatban minden ξ_{ij} legalább kétszer szerepel, akkor mindegyik pontosan kétszer szerepel. Ezt ismét teljes indukcióval, a fentiekhez hasonlóan igazoljuk.

A $k = 1$ eset nyilvánvaló: itt az egyetlen szóba jövõ szekvencia a $\xi_{m_1 n_1} \xi_{m_1 n_1}$. Tegyük most fel, hogy az állítás igaz k-ra. Ekkor bármely $2k + 2$ hosszúságú, $l = k + 2$-höz tartozó olyan szekvenciában, melyben minden minden ξ_{ij} legalább kétszer szerepel, most is van legalább egy m_p vagy n_p index, amelyik csak két szomszédos ξ_{ij}-ben szerepel (hisz még $4\,(k + 2)$ index sem férhet be $4k+4$ helyre). A két ξ_{ij} ismét azonos kell legyen feltevésünk szerint (hisz a párjuk más nem lehet), amibõl most is $n_{p-1} = n_p$ (vagy $m_p = m_{p+1}$) következik. A megfelelõ párt eliminálva ismét egy $2k$ hosszúságú, $l = k+1$-hez tartozó szekvenciát kapunk, ahol viszont feltevésünk szerint minden ξ_{ij} pontosan kétszer szerepel, hisz az így kapott rövidebb szorzatban most sem lehet "magányos" ξ_{ij}. Mivel azonban az elhagyott két ξ_{ij} nem lehet azonos a rövidebb szekvencia egyetlen ξ_{ij} tényezõjével sem, hisz m_p (vagy n_p) csak bennük szerepelt, az eredeti $2k + 2$ hosszúságú szekvenciában is minden ξ_{ij} pont kétszer szerepelt.

Ezek alapján

$$\lim_{n\to\infty} \tau\left(\left(\Lambda^{(n)}\right)^k\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p\,(n)\,n^k} \sum_{(a),(b)} E\left(\xi_{m_1 n_1} \xi_{m_2 n_1} \xi_{m_2 n_2} \xi_{m_3 n_2} \dots \xi_{m_k n_k} \xi_{m_1 n_k}\right),$$

ahol az összegzés az összes olyan

$$1 \le m_1, m_2, \dots, m_k \le p\,(n) \qquad \text{és} \qquad 1 \le n_1, n_2, \dots, n_k \le n$$

indexértékre történik, melyek együttesére fennáll az alábbi két feltétel:

(a) $l = l_1 + l_2 = k + 1$ $(1 \le l_1, l_2 \le k)$,

(b) az $\{m_1, n_1\}, \{m_2, n_1\}, \dots \{m_1, n_k\}$ indexpárok mindegyike legalább kétszer szerepel az adott szekvenciában.

Mivel az ilyen szekvenciákban minden ξ_{ij} pontosan kétszer szerepel, figyelembe véve, hogy minden (független) $\xi_{ij}^{(n)}$ szórása 1, azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \tau\left(\left(\Lambda^{(n)}\right)^k\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p(n)\,n^k} \sum_{(a),(b)} 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p(n)\,n^k} \sum_{i=1}^{k} S_k^{(i)} p(p-1)\dots(p-i+1)\,n(n-1)\dots(n-k+i)\,,$$

ahol $S_k^{(i)}$ azon $2k$ hosszúságú szekvenciák számát jelenti, melyekben $l_1 = i$ és $l_2 = k+1-i$, és amelyekben minden ξ_{ij} pontosan kétszer szerepel. Mivel $n \to \infty$ esetén $\frac{p(n)}{n} \to \lambda$, végül

$$\lim_{n\to\infty} \tau\left(\left(\Lambda^{(n)}\right)^k\right) = \sum_{i=1}^{k} S_k^{(i)} \lambda^{i-1}$$

adódik a határeloszlás momentumaira.

A (3.7) és (3.9) képleteket figyelembe véve a tétel igazolásához már csak azt kell megmutatnunk, hogy $S_k^{(i)} = Q_k^{(i)}$ minden k természetes szám és k-nál kisebb pozitív egész szám esetén. Ehhez, utalva $Q_k^{(i)}$ kombinatorikai jelentésére, megadunk egy egy-egy értelmû leképezest a "jó" (azaz az (a) és (b) feltételeknek eleget tevõ) szekvenciák és az $\{1, 2, \dots, k\}$ halmaz nemkeresztezõ partíciói között.

Egy adott "jó" szekvencia esetén az $\{1, 2, \dots, k\}$ halmaz i és j elemei pontosan akkor legyenek közös blokkban, ha a szekvenciában $m_i = m_j$. Ez nyilván valóban egy partícióját defininiálja $\{1, 2, \dots, k\}$ halmaznak, sõt, az ily módon kapott partíció blokkjainak száma éppen az választott szekvenciára jellemzõ l_1 lesz.

Elõször teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden így definiált partíció nemkeresztezõ. A $k = 1$ eset nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy az állítás igaz k-ra. Ekkor bármely $2k+2$ hosszúságú, $l = k+2$-höz tartozó "jó" szekvenciában most is van legalább egy m_p vagy n_p index, amelyik csak két szomszédos ξ_{ij}-ben szerepel. A két ξ_{ij} ismét azonos kell legyen, amibõl most is $n_{p-1} = n_p$ (vagy $m_p = m_{p+1}$) következik. A megfelelõ párt eliminálva ismét egy $2k$ hosszúságú, $l = k+1$-hez tartozó "jó" szekvenciát kapunk. Feltevésünk szerint az ehhez tartozó partíció nemkeresztezõ. Ha az elhagyott pár m_p indexe szerepelt csak a két ξ_{ij}-ben, akkor az eredeti $2k+2$ hosszúságú szekvenciához tartozó partícióban p önmaga alkot egy blokkot, ami nyilván nem keresztezheti a partíció más részeit (mely a fentiek szerint megintcsak nemkeresztezõ). Ha pedig az elhagyott párban $m_p = m_{p+1}$ állt fenn, akkor az eredeti $2k+2$ hosszúságú szekvenciához tartozó partícióban p és $p+1$ azonos blokkba tartozik, amibõl ismét következik a partíció nemkeresztezõ volta. (Könnyen belátható, hogy amennyiben a pár elhagyása után a szekvencia struktúrájának megõrzése érdekében végre kell hajtani a fentebb leírt ciklikus cserét, az az adott partíció keresztezõ vagy nemkeresztezõ voltára nincs befolyással.)

Ezután azt mutatjuk meg, hogy a fenti hozzárendelés különbözõ "jó" szekvenciákhoz különbözõ partíciókat rendel. Ismét teljes indukcióval bizonyítunk. A $k = 1$ eset nyilvánvaló, hisz ilyenkor csak egy lehetséges "jó" szekvencia van. Tegyük most fel, hogy k-ra igaz az állítás, azaz ha ugyanaz a π partíció tartozik két "jó" szekvenciához is, akkor e két szekvencia szükségképpen azonos. Ezután tegyük fel, hogy $k+1$ esetén két "jó" szekvenciához ugyanaz a partíció tartozik. Ekkor az m-típusú indexek sorozata a két szekvenciában nyilván azonos, hisz az (és csak az) definiálja a megfelelõ partíciót. Ily módon a két szekvencia csak az n-típusú indexeik sorozatában térhet el egymástól.

Amint azt fentebb már láttuk, minden $2k+2$ hosszúságú, $l=k+2$-höz tartozó "jó" szekvenciában van legalább egy m_p vagy n_p index, amelyik csak két szomszédos ξ_{ij}-ben szerepel. A két ξ_{ij} ismét azonos kell legyen, amibõl most is $n_{p-1}=n_p$ (vagy $m_p=m_{p+1}$) következik. Amennyiben m_p ilyen "kitüntetett" index az egyik szekvenciában, akkor szükségképpen ugyanez áll a másik szekvenciára is, az elõzõ bekezdés végén tett megjegyzésünk szerint. Eliminálva a megfelelõ párt mindkét szekvenciából, két $2k$ hosszúságú "jó" szekvenciát kapunk, melyek nyilván most is azonos partíciót határoznak meg (azonos partíciókat azonos módon megváltoztatva nyilván ismét azonos partíciókat kapunk). Feltevésünk szerint így ezek a rövidebb szekvenciák szükségképpen azonosak, és mivel ilyenkor az elhagyott párok mindegyikében $n_{p-1}=n_p$ állt fenn, így az eredeti két szekvencia is azonos.

Amennyiben nincs ilyen "kitüntetett" m_p index a szekvenciáinkban, akkor a "kitüntetett" index mindkét szekvenciában n-típusú. Az egyik szekvenciában legyen ez az index $n_p^{(1)}$. Ha most $n_p^{(2)}$ (ugyanarra a p értékre) a másik szekvenciában is "kitüntetett", akkor a megfelelõ párt ismét elhagyva mindkét szekvenciából, két $2k$ hosszúságú "jó" szekvenciát kapunk, melyek ismét ugyanazt a partíciót határozzák meg (ismét azonos módon változtattunk meg azonos partíciókat). Feltevésünk szerint így e két rövidebb szekvencia azonos, és mivel ilyenkor az eliminált párokban $m_p=m_{p+1}$ állt fönn, az eredeti szekvenciák szintén megegyeztek.

Megmutatjuk, hogy ezen kívül más eset nem lehetséges. Tegyük fel, hogy az egyik szekvenciában $n_p^{(1)}$ a "kitüntetett" index, de a másik szekvenciában ugyanerre a p-re $n_p^{(2)}$ nem ilyen. Ekkor $m_p^{(1)}=m_{p+1}^{(1)}$ nyilván fennáll, de mivel $m_i^{(1)}=m_i^{(2)}$ minden $i=1,2,\ldots,k+1$ esetén (mivel korábbi feltevésünk szerint mindkét szekvencia ugyanazt a partíciót határozza meg), $m_p^{(2)}=m_{p+1}^{(2)}$ is teljesül, ami viszont azt jelenti, hogy $\xi_{m_p^{(2)}n_p^{(2)}}$ és $\xi_{m_{p+1}^{(2)}n_p^{(2)}}$ szintén azonosak. A párt mindkét szekvenciából eliminálva, az elsõbõl egy rövidebb "jó" szekvenciát kapunk, a másikból azonban (melyben n_p nem csak a két elhagyott ξ_{ij}-ben szerepelt) olyan $2k$ hosszúságú szekvenciát kapunk, melyben $l=k+2$. Mivel a második eredeti szekvencia is "jó" volt (csak olyanokkal foglalkoztunk), benne minden ξ_{ij} pontosan kétszer szeepelt. Így abból egy párt elvéve, a visszamaradó szekvenciában is minden ξ_{ij} szükségképpen pont kétszer szerepel. Ez azonban ellentmond annak a korábbi eredményünknek, miszerint $l>k+1$ esetén minden szekvenciában van legalább egy ξ_{ij}, ami csak egyszer szerepel. Ez bizonyítja, hogy ilyen eset nem fordulhat elõ.

Megjegyezzük, hogy a fentiek egyben azt is jelentik, hogy minden "jó" szekvencia eleve egyértelmûen meghatározott az m-típusú indexeinek sorozata által (és amint az hasonló gondolatmenettel igazolható, ugyanez igaz az n-típusú indexek sorozatára is).

Végezetül megmutatjuk, hogy a fentebb definiált hozzárendelés ráképezés. Ehhez elõször minden nemkeresztezõ partícióhoz rendeljük hozzá az m-típusú indexek egy sorozatát a következõképpen: Az elsõ index legyen m_1, és legyen minden olyan m_i értéke ugyanaz mint m_1 értéke, valahányszor i az adott partíció esetében ugyanabba a blokkba tartozik, mint az 1 szám. Ezután az elsõ olyan m_j index, melynek értéke ez alapján még nem rögzített, legyen m_1-tõl különbözõ. Kapja ugyanezt az értéket a többi, j-vel azonos blokkban lévõ elemekkel meghatározott index is; és így tovább. Ily módon nyilván egyértelmûen definiáljuk m-típusú indexek egy sorozatát. Az elõzõ bekezdésben elmondottak szerint, ha van olyan "jó" szekvencia, melyben az m-típusú indexek sorozata épp az így kapott, akkor az egyértelmûen meghatározott. Ezenkívül az is nyilvánvaló, hogy az ehhez a szekvenciához leképezésünk szerint hozzátartozó partíció épp az elõbbi kiindulási partíciónk lesz. Ezek után elég azt megmutatni, hogy minden nemkeresztezõ partícióhoz tartozik olyan "jó" szekvencia, melyben az m-típusú indexek sorozata épp az elõbb leírt eljárás alapján meghatározott.

A $k = 1$ eset nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden $k \leq k_0$ esetén. Vegyük most az $\{1, 2, \ldots, k_0 + 1\}$ halmaz egy tetszõleges nemkeresztezõ partícióját, az általa meghatározott m-típusú indexek sorozatával együtt. Válasszuk ki a partíció legrövidebb olyan blokkját (vagy ezek egyikét), mely csupa szomszédos elemet tartalmaz (azaz amelyik minden olyan elemet tartalmaz, mely a legnagyobb és legkisebb eleme közé esik). Mivel a partíció nemkeresztezõ, ilyen blokk létezik. Ekkor két eset lehetséges.

(1) Ha a kiválasztott blokk csak egy elemet tartalmaz, azt elhagyva (és halmazunkat átszámozva) az $\{1, 2, \ldots, k_0\}$ halmaz egy nemkeresztezõ partíciójához jutunk. Feltevésünk szerint létezik olyan "jó" szekvencia, melyben az m-típusú indexek sorozata épp az e partícióból megkapható. E szekvenciába most "szúrjunk be" még egy párt az elhagyott blokknak megfelelõ helyre (azaz fenti szekvenciánk $\xi_{m_{p-1}n_{p-1}}$ és $\xi_{m_p n_{p-1}}$ tagjai közé) oly módon, hogy a pár m_p indexe különbözzön a szekvenciában szereplõ összes többi m_i indextõl, az n-típusú indexeket pedig "illesszük" a szekvencia többi részéhez (azaz mindkét beszúrt ξ_{ij} n indexe egyezzen meg a kiindulási (rövidebb) szekvencia n_{p-1} indexével). Ez úton, mivel mind a különbözõ indexek számát, mind a párok számát egyel növeltük (a beszúrt pár elemei nem egyezhetnek meg a szekvencia más elemeivel, hisz m_p csak bennük szerepel), ismét egy ($2k_0 + 2$ hosszúságú) "jó" szekvenciához jutunk, és e szekvenciához nyilván épp a kiinduláskor választott partíció tartozik. Ez esetben az indukciós lépés tehát megtehetõ.

(2) Amennyiben a kiválasztott blokk $k_1 + 1$ elemet tartalmaz ($k_1 \geq 1$), a blokk

k_1 elemét elhagyva (és értelemszerûen átszámozva a kivett és a visszamaradó halmazokat) az $\{1,2,\ldots,k_1\}$ és az $\{1,2,\ldots,k_0+1-k_1\}$ halmazok egy-egy nemkeresztezõ partíciójához jutunk, melyekhez feltevésünk szerint most is léteznek olyan "jó" szekvenciák, melyekben az m-típusú indexek sorozata épp az e partíciókból megkapható. Most az egy-blokkú partíciónak megfelelõ szekvenciát illesszük be a másik szekvenciába az "eredeti" helyére (a kiválasztott blokk egyetlen meghagyott elemének megfelelõ (egy elemû) blokkjának megfelelõ két ξ_{ij} elem közé) oly módon, hogy az m-típusú indexeket a szekvencia szabályosságainak megfelelõen illesztjük, a beszúrt rész-szekvencia n-típusú indexeit (melyek egymástól mind különböznek, hisz máskülönben e részre $l=k_1+1$ nem állhatna fenn az m-típusú indexek azonos volta miatt (figyelembe véve, hogy ez a szekvencia egy-blokkú partícióhoz tartozik)) pedig úgy választjuk meg, hogy azok a szekvencia többi részében található n-típusú indexektõl mind különbözzenek. Ilyenkor az egyes rész-szekvenciákban található párok a kapott $2k_0+2$ hosszúságú szekvenciában is párok maradnak, anélkül, hogy újabb párok (vagy tripletek vagy még nagyobb azonos ξ_{ij}-kbõl álló csoportok) keletkeznének (hisz az n-típusú indexeket annyira különbözõnek választottuk, amennyire csak lehetett). Figyelembe véve még, hogy az így kapott $2k_0+2$ hosszúságú szekvenciában $l=k_0+2$ (a "külsõ" rész-szekvenciánál $l=k_0+1-k_1+1=k_0-k_1+2$, míg a beillesztett rész k_1 új n-típusú indexet hoz a rendszerbe anélkül, hogy a különbözõ m-típusú indexek száma megváltozna), azt találjuk, hogy ez a szekvencia is "jó", és olyan, hogy hozzá nyilván épp a kiinduláskor választott partíció tartozik. Az indukciós lépés tehát ilyenkor is megtehetõ, igazolván ezzel azt, hogy a megadott leképezés valóban ráképezés, és ebbõl következõen egyben bijekció is. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $S_k^{(i)}=Q_k^{(i)}$ minden k természetes szám és k-nál kisebb i pozitív egész szám esetén, amivel a tétel bizonyítása teljes. ■

A következõ tétel az elõzõ egy élesítése.

3.4. Tétel. [**O2**] *Legyen $T^{(n)}=\left(\xi_{ij}^{(n)}\right)$ olyan $p(n)\times n$-es véletlen mátrix, melynek elemei független, azonos eloszlású valószínûségi változók nulla várható értékkel és egy szórással, valamint korlátos momentumsorozattal. Legyen ezen kívül $\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{n}=\lambda$. Ekkor a $p(n)\times p(n)$-es $\Lambda^{(n)}=T^{(n)}T^{(n)t}/n$ véletlen mátrix empírikus sajátérték-sûrûsége $n\to\infty$ esetén 1 valószínûséggel konvergál a (3.8) képlettel megadott $\bar{\mu}_\lambda$ eloszláshoz, azaz*

$$\lim_{n\to\infty} tr_{p(n)}\left(\left(\Lambda^{(n)}\right)^k\right)=\bar{m}_k$$

majdnem mindenütt, minden k természetes szám esetén.

Bizonyítás. A bizonyítás sok részletét tekintve nagyon hasonló a 3.3. tétel bizonyításához.

Az egyszerûbb írásmód érdekében az alábbiakban most is $\xi_{ij}^{(n)}$ helyett általában csak ξ_{ij}-t és $\Lambda^{(n)}$ helyett Λ-t írunk, ha csak n szerepét nem akarjuk hangsúlyozni.

A 3.3. tételbõl tudjuk, hogy $n \to \infty$ esetén $\tau_{p(n)}\left(\Lambda^k\right) = \frac{1}{p(n)} \sum_i E\left(\left(\Lambda^k\right)_{ii}\right) \to \bar{m}_k$ minden k természetes számra, így elég megmutatnunk, hogy

$$E\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(tr_{p(n)}\left(\left(\Lambda^{(n)}\right)^k\right) - \tau_{p(n)}\left(\left(\Lambda^{(n)}\right)^k\right)\right)^2\right) < +\infty$$

minden k esetén, hiszen e feltételbõl már következik, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}\left(tr_{p(n)}\left(\left(\Lambda^{(n)}\right)^k\right) - \tau_{p(n)}\left(\left(\Lambda^{(n)}\right)^k\right)\right)^2$ majdnem mindenütt véges, és így $\left(tr_{p(n)}\left(\left(\Lambda^{(n)}\right)^k\right) - \tau_{p(n)}\left(\left(\Lambda^{(n)}\right)^k\right)\right)^2$ 1 valószínûséggel nullához tart.

A szumma alatti kifejezés várható értékét fölírva:

$$E\left(\left(tr_p\left(\Lambda^k\right) - \tau_p\left(\Lambda^k\right)\right)^2\right) = E\left(\left(tr_p\left(\Lambda^k\right)\right)^2\right) - \left(\tau_p\left(\Lambda^k\right)\right)^2.$$

Mivel

$$\begin{aligned} & E\left(\left(tr_p\left(\Lambda^k\right)\right)^2\right) \\ = & \frac{1}{p^2 n^{2k}} \sum_{m_1,m_2,\ldots,m_k=1}^{p} \sum_{r_1,r_2,\ldots,r_k=1}^{p} \sum_{n_1,n_2,\ldots,n_k=1}^{n} \sum_{s_1,s_2,\ldots,s_k=1}^{n} \\ & E\left(\xi_{m_1 n_1}\xi_{m_2 n_1}\xi_{m_2 n_2}\xi_{m_3 n_2}\cdots\xi_{m_k n_k}\xi_{m_1 n_k}\cdot\xi_{r_1 s_1}\xi_{r_2 s_1}\xi_{r_2 s_2}\xi_{r_3 s_2}\cdots\xi_{r_k s_k}\xi_{r_1 s_k}\right) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} & \left(\tau_p\left(\Lambda^k\right)\right)^2 \\ = & \frac{1}{p^2 n^{2k}} \sum_{m_1,m_2,\ldots,m_k=1}^{p} \sum_{r_1,r_2,\ldots,r_k=1}^{p} \sum_{n_1,n_2,\ldots,n_k=1}^{n} \sum_{s_1,s_2,\ldots,s_k=1}^{n} \\ & E\left(\xi_{m_1 n_1}\xi_{m_2 n_1}\xi_{m_2 n_2}\xi_{m_3 n_2}\cdots\xi_{m_k n_k}\xi_{m_1 n_k}\right)\cdot E\left(\xi_{r_1 s_1}\xi_{r_2 s_1}\xi_{r_2 s_2}\xi_{r_3 s_2}\cdots\xi_{r_k s_k}\xi_{r_1 s_k}\right), \end{aligned}$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & E\left(\left(tr_p\left(\Lambda^k\right) - \tau_p\left(\Lambda^k\right)\right)^2\right) \qquad (3.12) \\ = & \frac{1}{p^2 n^{2k}} \sum_{m_1,m_2,\ldots,m_k=1}^{p} \sum_{r_1,r_2,\ldots,r_k=1}^{p} \sum_{n_1,n_2,\ldots,n_k=1}^{n} \sum_{s_1,s_2,\ldots,s_k=1}^{n} \\ & \left(E\left(\xi_{m_1 n_1}\cdots\xi_{m_1 n_k}\cdot\xi_{r_1 s_1}\cdots\xi_{r_1 s_k}\right) - E\left(\xi_{m_1 n_1}\cdots\xi_{m_1 n_k}\right)\cdot E\left(\xi_{r_1 s_1}\cdots\xi_{r_1 s_k}\right)\right). \end{aligned}$$

Értelmezzük az L_1 és L_2 számokat a következõképpen:

$$L_1 = \#\left\{m_1, m_2, \ldots, m_k, r_1, r_2, \ldots r_k\right\} \text{ és } L_2 = \#\left\{n_1, n_2, \ldots, n_k, s_1, s_2, \ldots, s_k\right\}.$$

Ha a (3.12)-ben lévõ tagokat L_1 és L_2 értékei szerint csoportosítjuk, akkor

$$\begin{aligned} & E\left(\left(tr_p\left(\Lambda^k\right) - \tau_p\left(\Lambda^k\right)\right)^2\right) \qquad (3.13) \\ = \;& \frac{1}{p^2 n^{2k}} \sum_{L_1=1}^{2k} \sum_{L_2=1}^{2k} \sum_{(L_1,L_2)} \\ & \left(E\left(\xi_{m_1n_1}\ldots\xi_{m_1n_k}\cdot\xi_{r_1s_1}\ldots\xi_{r_1s_k}\right) - E\left(\xi_{m_1n_1}\ldots\xi_{m_1n_k}\right)\cdot E\left(\xi_{r_1s_1}\ldots\xi_{r_1s_k}\right)\right) \end{aligned}$$

adódik, ahol az utolsó összegzés azokra a tagokra vonatkozik, melyekben L_1 és L_2 bizonyos rögzített érték.

Ezek után megmutatjuk, hogy a (3.13) képletben azok a tagok, melyekben $L_1 + L_2 \leq 2k$, legfeljebb n^{-2} nagyságrendû járulékot adnak.

A Hölder egyenlõtlenség alapján

$$\begin{aligned} & \left|E\left(\xi^{(n)}_{m_1n_1}\xi^{(n)}_{m_2n_1}\xi^{(n)}_{m_2n_2}\xi^{(n)}_{m_3n_2}\ldots\xi^{(n)}_{m_kn_k}\xi^{(n)}_{m_1n_k}\right)\right| \\ \leq \;& E\left(\left|\xi^{(n)}_{m_1n_1}\right|^k\right)^{1/k}\ldots E\left(\left|\xi^{(n)}_{m_1n_k}\right|^k\right)^{1/k} \leq C_k(n). \end{aligned}$$

(Ilyen $C_k(n)$ korlátok nyilván léteznek, hiszen a ξ_{ij} mátrixelemek azonos eloszlásúak, és feltevésünk szerint minden momentumuk korlátos.) E becslés szerint

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p^2n^{2k}}\left|\sum_{(L_1,L_2)}\left(E\left(\xi_{m_1n_1}\ldots\xi_{r_1s_k}\right) - E\left(\xi_{m_1n_1}\ldots\xi_{m_1n_k}\right)\cdot E\left(\xi_{r_1s_1}\ldots\xi_{r_1s_k}\right)\right)\right| \\ \leq \;& \frac{1}{p^2n^{2k}}\sum_{(L_1,L_2)}\left|E\left(\xi_{m_1n_1}\ldots\xi_{r_1s_k}\right) - E\left(\xi_{m_1n_1}\ldots\xi_{m_1n_k}\right)\cdot E\left(\xi_{r_1s_1}\ldots\xi_{r_1s_k}\right)\right| \\ \leq \;& \frac{1}{p^2n^{2k}}\sum_{(L_1,L_2)}\left(C_{2k}(n) + C_k(n)^2\right) \\ \leq \;& \frac{1}{p^2n^{2k}}\binom{p}{L_1}L_1^{2k}\binom{n}{L_2}L_2^{2k}\left(C_{2k}(n) + C_k(n)^2\right) \\ = \;& \frac{p(p-1)\ldots(p-L_1+1)\,n(n-1)\ldots(n-L_2+1)}{p^2n^{2k}}\frac{L_1^kL_2^k}{L_1!L_2!}\left(C_{2k}(n) + C_k(n)^2\right), \end{aligned}$$

és az utolsó sorban szereplõ kifejezés n^{-2} rendû, valahányszor $L_1 + L_2 \leq 2k$. (Az egyenlõtlenség-lánc negyedik sorában azt a becslést alkalmaztuk, miszerint azon tagok száma, melyekben az $\{m_1, m_2, \ldots, m_k, r_1, r_2, \ldots r_k\}$ és $\{n_1, n_2, \ldots, n_k, s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ halmazok számossága éppen L_1 illetve L_2, nem lehet nagyobb mint

$$\binom{p}{L_1} L_1^{2k} \binom{n}{L_2} L_2^{2k},$$

hisz minden m_i és r_i p különbözõ értéket vehet föl, míg minden egyes n_i és s_i esetében a lehetséges értékek száma n.)

Ezután megmutatjuk, hogy ha $L_1 + L_2 > 2k + 2$, akkor

$$E\left(\xi_{m_1 n_1} \ldots \xi_{m_1 n_k} \cdot \xi_{r_1 s_1} \ldots \xi_{r_1 s_k}\right) - E\left(\xi_{m_1 n_1} \ldots \xi_{m_1 n_k}\right) \cdot E\left(\xi_{r_1 s_1} \ldots \xi_{r_1 s_k}\right) = 0. \quad (3.14)$$

Elõször megjegyezzük, hogy ha $l = \#\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} + \#\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} > k + 1$, akkor

$$E\left(\xi_{m_1 n_1} \xi_{m_2 n_1} \xi_{m_2 n_2} \xi_{m_3 n_2} \ldots \xi_{m_k n_k} \xi_{m_1 n_k}\right) = 0, \quad (3.15)$$

amint azt a 3.3. tétel bizonyítása során megmutattuk.

Amennyiben $L_1 + L_2 > 2k+2$, akkor vagy $\#\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} + \#\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} > k + 1$ vagy $\#\{r_1, r_2, \ldots, r_k\} + \#\{s_1, s_2, \ldots, s_k\} > k + 1$ (a két egyenlõtlenségbõl legalább az egyik fennáll), így a fentiek szerint $E\left(\xi_{m_1 n_1} \xi_{m_2 n_1} \ldots \xi_{m_1 n_k}\right)$ és $E\left(\xi_{r_1 s_1} \xi_{r_2 s_1} \ldots \xi_{r_1 s_k}\right)$ közül legalább az egyik nulla, amibõl

$$E\left(\xi_{m_1 n_1} \xi_{m_2 n_1} \ldots \xi_{m_1 n_k}\right) \cdot E\left(\xi_{r_1 s_1} \xi_{r_2 s_1} \ldots \xi_{r_1 s_k}\right) = 0$$

következik.

Megmutatjuk, hogy ilyenkor

$$E\left(\xi_{m_1 n_1} \xi_{m_2 n_1} \ldots \xi_{m_1 n_k} \cdot \xi_{r_1 s_1} \xi_{r_2 s_1} \ldots \xi_{r_1 s_k}\right) = 0 \quad (3.16)$$

szintén fennáll. Ha a $\xi_{m_1 n_1} \xi_{m_2 n_1} \ldots \xi_{m_1 n_k} \cdot \xi_{r_1 s_1} \xi_{r_2 s_1} \ldots \xi_{r_1 s_k}$ szekvenciában $r_1 = m_1$, akkor a szekvencia szerkezete ugyanaz, mint a (3.15) formulában szereplõé, $2k$ hosszúsággal és $l = L > 2k + 2 > 2k + 1$ indexparaméterrel, amibõl (3.16) már következik. Ha $r_1 \neq m_1$, akkor a szokásos gondolatmenet közvetlenül nem alkalmazható. Ilyenkor minden olyan m- és r-típusú indexet, mely értéke r_1 értékével egyezik meg, m_1 értékére változtatva ismét olyan szekvenciához jutunk, melyre a fenti gondolatmenet már alkalmazható, hisz a leírt eljárás során L értékét pontosan eggyel csökkentettük, és így az új $2k$ hosszúságú szekvenciára $l = L - 1 > 2k + 1$ még mindig fenn áll. (Valójában ebbõl még csak a kapott új szekvenciára következik (3.16) fönnállása, de mivel a várható érték eltûnésének oka az, hogy az adott szekvenciában van csak egyszer elõforduló ξ_{ij}, nem nehéz belátni, hogy ugyanez igaz az eredeti szekvencia esetében is, hisz néhány index értékét a szekvenciában eleve meglévõ értékekre cserélve nyilván nem lehet ilyen egyedüli ξ_{ij}-ket létrehozni.)

Korábban láttuk, hogy azon szekvenciák járuléka, melyekre $L_1 + L_2 \leq 2k$ maximum n^{-2} rendû. Másrészt azon szekvenciák, melyekre $L_1 + L_2 > 2k + 2$, egyáltalán nem adnak járulékot. Most megmutatjuk, hogy azon szekvenciák, melyekre $L_1+L_2 = 2k + 1$ vagy $L_1 + L_2 = 2k + 2$, szintén nem adnak járulékot. Ez azt fogja jelenteni, hogy (3.13)-ban az összes tag járuléka legfeljebb n^{-2} nagyságrendû, ami már igazolja tételünket, hisz $\sum n^{-2} < +\infty$.

Megmutatjuk, hogy ha egy szekvenciára $L_1 + L_2 = 2k + 1$ vagy $L_1 + L_2 = 2k + 2$, akkor ismét fennáll (3.14).

Ha az adott szekvenciában van legalább egy olyan ξ_{ij}, amelyik csak egyszer fordul elõ, akkor a függetlenség és $E(\xi_{ij}) = 0$ miatt mind $E(\xi_{m_1n_1} \dots \xi_{m_1n_k} \cdot \xi_{r_1s_1} \dots \xi_{r_1s_k})$, mind $E(\xi_{m_1n_1} \dots \xi_{m_1n_k}) \cdot E(\xi_{r_1s_1} \dots \xi_{r_1s_k})$ nulla, igazolván (3.14)-et.

Ha nincs ilyen egyedüli ξ_{ij} a szekvenciában, de minden egymással azonos ξ_{ij} a szekvencia azonos felében van (tehát nem írható fel egyetlen $\xi_{m_in_j} = \xi_{r_ps_q}$ típusú egyenlõség sem), akkor a ξ_{ij} mátrixelemek függetlensége miatt $E(\xi_{m_1n_1} \dots \xi_{m_1n_k} \cdot \xi_{r_1s_1} \dots \xi_{r_1s_k}) = E(\xi_{m_1n_1} \dots \xi_{m_1n_k}) \cdot E(\xi_{r_1s_1} \dots \xi_{r_1s_k})$, és így (3.14) ismét teljesül.

Az egyedüli probléma azokkal a szekvenciákkal lehet, melyekben egyrészt nincs egyedüli ξ_{ij} elem, másrészt pedig van legalább egy olyan m_i, n_j, r_p, s_q index-négyes, melyre $\xi_{m_in_j} = \xi_{r_ps_q}$. Megmutatjuk, hogy $L_1 + L_2 \geq 2k + 1$ esetén ilyen szekvencia nem létezik.

Vegyünk most egy tetszõleges olyan $\xi_{m_1n_1}\xi_{m_2n_1} \dots \xi_{m_1n_k} \cdot \xi_{r_1s_1}\xi_{r_2s_1} \dots \xi_{r_1s_k}$ szekvenciát, melyre $L \geq 2k+1$, és amelyikben nincs egyedüli ξ_{ij} (amennyiben ilyen szekvencia nem létezik, már kész is vagyunk a bizonyítással). Jelöljük a szekvencia hosszát (azaz a benne szereplõ ξ_{ij} tényezõk számát) H-val. (Kiválasztott szekvenciánkra tehát $H = 4k$.) Mivel $L \geq 2k + 1$, a szekvenciában van legalább egy x_p (m_p, n_p, r_p vagy s_p) index, amelyik csak két ξ_{ij}-ben szerepel, hisz különben minden index legalább négy ξ_{ij}-ben szerepelne a szorzat szerkezete miatt, de $4L > 8k + 4$ index nem férhet be $2H = 8k$ helyre. Mivel ez az x_p index csak két ξ_{ij}-ben jelenik meg, és mivel - feltevésünk szerint - minden ξ_{ij} legalább kétszer szerepel, ez a két ξ_{ij} azonos kell legyen. A szekvencia szerkezetébõl az is világos, hogy ez a két ξ_{ij} szükségképpen szomszédos egymással, és hogy a szekvencia azonos felében foglalnak helyet (mindkét félben természetesen ciklikus sorrendet tekintve, azaz $\xi_{m_1n_1}$ és $\xi_{m_1n_k}$ valamint $\xi_{r_1s_1}$ és $\xi_{r_1s_k}$ szintén szomszédoknak tekintendõk).

Vegyük most ki az így definiált párt a szekvenciából. Ekkor H értéke kettõvel, L értéke eggyel csökken (x_p eltûnik, de az elhagyott pár másik indexe megtalálható a szomszédos ξ_{ij}-kben is a szekvencia szerkezete miatt). Így tehát egy olyan rövidebb, $H_1 = H - 2 = 4k - 2$ és $L_1 = L - 1 \geq 2k$ értékekhez tartozó szekvenciát kapunk, melynek a szerkezete továbbra is az eredetiéhez hasonlít, bár itt az egyik "fél" hosszabb lesz, mint a másik. Valóban, ha például az m_p index volt az, amelyik csak két ξ_{ij}-ben szerepelt, akkor a

$$\ldots \xi_{m_{p-1}n_{p-1}} \xi_{m_p n_{p-1}} \xi_{m_p n_p} \xi_{m_{p+1}n_p} \xi_{m_{p+1}n_{p+1}} \ldots$$

rész-szekvenciában a második és a harmadik ξ_{ij} alkot párt, amibõl $n_{p-1} = n_p$ következik, ami szerint az indexek sorozatának struktúrája a pár elhagyása után változatlan marad. Amennyiben az elhagyott pár a $\xi_{m_1 n_1} \xi_{m_1 n_k}$ volt (azaz x_p jelentése m_1 volt), akkor $\xi_{m_2 n_1}$-et $\xi_{m_k n_k}$ után írva (ezt megtehetjük, hisz a ξ_{ij} valószínûségi változók kommutálnak), ismét a kívánt struktúrájú szekvenciához jutunk. Természetesen ugyanez az érvelés alkalmazható akkor is, ha x_p jelentése valamely n_p, r_p vagy s_p index. A fentiekbõl az is nyilvánvaló, hogy a kapott új szekvenciában szintén nincs egyedüli ξ_{ij} elem, mivel az elhagyott pár nem lehetett triplet része, hisz x_p csak ott szerepelt.

A kijelölt pár elhagyásával kapott szekvenciában még mindig van legalább egy x_p (m_p, n_p, r_p vagy s_p) index, amelyik csak két ξ_{ij}-ben szerepel, hisz különben minden index legalább négy ξ_{ij}-ben szerepelne a szorzat szerkezete miatt, de $4L_1 > 8k$ index nem férhet be $2H_1 = 8k-4$ helyre. Mivel ez az x_p index csak két ξ_{ij}-ben jelenik meg, és mivel minden ξ_{ij} legalább kétszer szerepel, ez a két ξ_{ij} ismét azonos kell legyen. Ismét elhagyva ezeket, egy még rövidebb, hasonló szerkezetû szekvenciát kapunk, melyre $L_2 = L-2$ és $H_2 = H-4$. Az eljárás egészen addig folytatható, amíg a két "fél" egyike két ξ_{ij} szorzatára nem redukálódik. Még ebben a szekvenciában is van azonban legalább egy x_p (m_p, n_p, r_p vagy s_p) index, amelyik csak két ξ_{ij}-ben szerepel. Ha viszont e két ξ_{ij} az adott "fél" két utolsó eleme, elhagyva azokat L értéke már esetleg kettõvel is csökkenhet (tekintsük például a $\xi_{11}\xi_{11} \cdot \xi_{r_1 s_1} \xi_{r_2 s_1} \ldots \xi_{r_1 s_k}$ szekvenciát, ahol $r_i \neq 1$ és $s_i \neq 1$ tetszõleges $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén), ami megállítaná az eljárásunkat, hisz ekkor már nem állna fenn a továbblépés kulcsát jelentõ $4L_i > 2H_i$ reláció. Azonban ha x_p csak ebben a két ξ_{ij}-ben szerepelt, akkor ezen ξ_{ij}-k természetesen nem lehetnek azonosak a másik "fél" egyik ξ_{ij} elemével sem. Ez persze igaz e "fél" korábban elhagyott párjaira is (hisz minden elhagyott párban volt egy olyan index, amelyik csak bennük szerepelt), ami azt jelenti, hogy az eredeti szekvenciában sem állhatott fenn $\xi_{m_i n_j} = \xi_{r_p s_q}$ típusú egyenlõség, igazolva ezzel állításunkat. Amennyiben x_p a másik, még hosszabb "félben" van, eljárásunkat nyugodtan tovább folytathatjuk egészen addig, amíg az egyik következõ lépésben x_p abban a "félben" lesz, amelyik már csak két ξ_{ij}-t tartalmaz - amikor is megint alkalmazhatjuk a fenti érvelést - vagy amíg a másik fél is két ξ_{ij} szorzatára redukálódik - amikor is az elõbbi okfejtés most bármelyik félre alkalmazható. Ezzel állításunk, és egyben a tétel bizonyítását befejeztük. ∎

3.5. Megjegyzés. Ha a ξ_{ij} valószínûségi változók komplex értékûek, pontosabban: $\xi_{ij}^{(n)} = a\eta_{ij}^{(n,re)} + bi\eta_{ij}^{(n,im)}$, ahol $\eta_{ij}^{(n,re)}$ és $\eta_{ij}^{(n,im)}$ független, azonos eloszlású, standard valós eloszláscsalád, az a és b valós számokra pedig $a^2 + b^2 = 1$ áll fenn, akkor a $\Lambda^{(n)} = T^{(n)} T^{(n)t}/n$ komplex véletlen mátrixra a 3.3. és 3.4. tételek állítása továbbra is érvényben marad. Ennek oka az, hogy a (3.10) és a (3.14) formulákban a várható érték alatt csak $|\xi_{ij}|^2 = \xi_{ij}\bar{\xi}_{ij}$ jelenik meg a járulékot adó tagok esetében, így a bizonyítás mindkét tétel esetében lényegében változatlan formában végigvihető.

4. SZIMMETRIKUS PARTÍCIÓK

Amint azt a 2.3. alfejezetben már említettük, a Gauss-eloszlás n-edik momentuma nem más, mint az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz párpartícióinak a száma. Láttuk, hogy ugyanez igaz a normális eloszlás szabad megfelelõje, a Wigner-eloszlás esetén is, ha az összes párpartíciók helyett csak a nemkeresztezõ párpartíciókat tekintjük. Említettük azt is, hogy a λ paraméterû Poisson-eloszlás n-edik momentuma λ azon polinomja, ahol λ^i együtthatója az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz azon partícióinak a száma, melyekben a blokkok száma épp i. A 3.1. tételben bebizonyítottuk, hogy a Marchenko-Pastur eloszlásra (mely a Poisson-eloszlás szabad analogonja) ugyanez áll fenn, ha ismét csak a nemkeresztezõ partíciókat vesszük számításba. A 2.3. alfejezetben leírtuk azt is, hogy mind az összes partíciók halmaza, mind pedig a nemkeresztezõ partíciók halmaza hálót alkot az ott megadott $\leq$ rendezéssel. Ebben a fejezetben az összes partíciók hálójának két újabb részhálóját fogjuk közelebbrõl megvizsgálni. Az alapvetõ leszámlálási problémákon túl arra próbálunk fényt deríteni, hogy vajon ezek a partíciók is meghatároznak-e bizonyos eloszlásokat azok momentumainak rögzítése révén, a fent leírtakhoz hasonlóan. Látni fogjuk, hogy a válasz bizonyos esetekben igenlõ, máskor tagadó, míg lesz olyan eset is, melyekre nem sikerült se pozitív, se negatív eredményt kapni. Az, hogy a kapott eloszlásoknak tulajdonítható-e mélyebb tartalom, kapcsolható-e hozzájuk valamilyen valószínûségi vagy esetleg fizikai értelmezés, szintén nyitott kérdés.

4.1. Definíció. [**O3**] *Az $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ lineárisan rendezett halmaz π partícióját **szimmetrikus partíció**nak nevezzük, ha abból, hogy s_i és s_j ugyanabba a blokkba tartozik, következik, hogy π-nek van olyan blokkja, amelyik mind az s_{n+1-i} mind az s_{n+1-j} elemeket tartalmazza.*

Az elnevezést indokolja, hogy ezen partíciók lineáris reprezentációja szimmetrikus a "középpontjára", vagy (ami ugyanezt jelenti), S-ben a sorrendet pont megfordítva a partíció lineáris reprezentációja nem változik meg. A 4.1. ábrán az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz $\pi_1 = \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3, 5, 6\}\}$ és $\pi_2 = \{\{1, 6\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ partícióinak lineáris reprezentációja látható. Rögtön szembeötlõ, hogy míg π_2 szimmetrikus, addig π_1 nem az.

○○○○○○ ○○○○○○

π_1 π_2

4.1. *Ábra*

Az alábbiakban elõször a szimmetrikus partíciók bizonyos részhalmazait fogjuk vizsgálni. A következõkben egy n elemû halmaz szimmetrikus partícióinak a számát C_n, nemkeresztezõ szimmetrikus partícióinak a számát A_n, egy $2n$ elemû halmaz szimmetrikus párpartícióinak a számát D_n, nemkeresztezõ szimmetrikus párpartícióinak a számát pedig B_n fogja jelölni.

4.2. Tétel. [**O3**] *Egy n elemû halmaz szimmetrikus partícióinak a száma*

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_n^{(k)},$$

ahol $C_n^{(k)}$ - n elem azon szimmetrikus partícióinak a száma, melyekben a blokkok száma k - az alábbi rekurziónak tesz eleget:

$$\begin{aligned}
C_n^{(k)} &= kC_{n-2}^{(k)} + C_{n-2}^{(k-1)} + C_{n-2}^{(k-2)} \qquad \textit{minden } n \geq 2 \textit{ és } n \geq k \geq 1 \text{ esetén},\\
C_1^{(1)} &= 1,\\
C_n^{(k)} &= 0, \qquad \textit{ha } n \leq 0 \textit{ vagy } k \leq n, \textit{ kivéve ha } n = k = 0, \textit{ mely esetre a}\\
C_0^{(0)} &= 1 \qquad \textit{definíciót fogadjuk el.}
\end{aligned}$$

Bizonyítás. Tekintsük a $\{2, 3, \ldots, n-1\}$ halmaz egy olyan tetszõleges π szimmetrikus partícióját, melyben a blokkok száma $k-2$. Világos, hogy a $\tilde{\pi} = \{1\} \cup \pi \cup \{n\}$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy olyan szimmetrikus partíciója, melyben a blokkok száma k. Hasonlóan, a $\{2, 3, \ldots, n-1\}$ halmaz bármely olyan ν szimmetrikus partíciójából kiindulva, melyben a blokkok száma $k-1$, $\tilde{\nu} = \{1, n\} \cup \pi$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak ismét olyan szimmetrikus partíciója lesz, melyben a blokkok száma k. Végül pedig a $\{2, 3, \ldots, n-1\}$ halmaz bármely olyan szimmetrikus partíciójából kiindulva, melyben a blokkok száma k, ismét az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy ilyen szimmetrikus partícióját kapjuk, ha az 1 számot - mint újabb halmazelemet - eredeti partíciónk tetszõleges blokkjába, míg az n számot a szimmetria követelménye által meghatározott blokkjába helyezzük. Könnyen ellenõrízhetõ, hogy ezen eljárások valamelyikével az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz bármely k blokkú szimmetrikus partíciója egyértelmûen megkapható a $\{2, 3, \ldots, n-1\}$ halmaz megfelelõ partíciójából. Ezzel a tétel állításában szereplõ rekurziót igazoltuk, míg az állítás többi része nyilvánvaló. Megjegyezzük, hogy a $C_0^{(0)} = 1$ definíció nélkül a $C_2^{(2)}$ esetet külön kellene kezelni. ■

Bizonyos speciális esetekben - amikor k értéke elég nagy vagy elég kicsi - $C_n^{(k)}$ értékei explicit alakban is megadhatók. Így például - amint az a 4.2. tétel rekurziójából könnyen kiszámolható - fenn állnak az alábbi egyenlõségek:

$$\begin{aligned}
C_n^{(1)} &= C_n^{(n)} = 1 \qquad \text{minden } n = 1, 2, 3, \dots \text{ esetén,} \\
C_n^{(2)} &= 2^{[n/2]} - 1 \qquad \text{minden } n = 2, 3, 4, \dots \text{ esetén,} \\
C_n^{(3)} &= \sum_{i=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} 3^i 2^{[n/2]-1-i} = \begin{cases} 2\left(3^{l-1} - 2^{l-1}\right) \text{ ha } n = 2l;\ l = 2, 3, 4, \dots \\ 3^l - 2^l \text{ ha } n = 2l+1;\ l = 1, 2, 3, \dots \end{cases}, \text{ és} \\
C_n^{(n-1)} &= \left[\frac{n}{2}\right] \qquad \text{minden } n = 2, 3, 4, \dots \text{ esetén,}
\end{aligned}$$

ahol [ ] az egész részt jelöli.

Sajnos úgy tûnik azonban, hogy $C_n^{(k)}$ értékei egyre komplikáltabbá válnak, ahogy k értéke távolodik ezektõl a speciális értékektõl.

4.3. Tétel. [**O3**] *Egy $2n$ elemû halmaz szimmetrikus párpartícióinak a száma az alábbi rekurziónak tesz eleget:*

$$\begin{aligned}
D_n &= (2n-2)\,D_{n-2} + D_{n-1} \qquad n \geq 2 \textit{ esetén,} \\
D_1 &= 1, \qquad \textit{és definíció szerint} \\
D_0 &= 1.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Bizonyítás. A két elemû halmaz esete (azaz amikor n értéke 1) nyilvánvaló. Vegyünk most egy tetszõleges $2n$ elemû rendezett halmazt. Az elsõ elem párja bármelyik másik elem lehet, de a szimmetria követelménye miatt ez egyben meghatározza az utolsó elem párját is. Az elsõ elem párjának tetszõleges, de nem az utolsó elemet választva (erre $2n-2$ lehetõségünk van) és az utolsó elemhez párba állítva a szimmetria alapján meghatározott elemet, a maradék $2n-4$ elemen nyilván D_{n-2} különbözõ szimmetrikus párpartíció adható meg. Ily módon a $2n$ elemû halmaz minden szimmetrikus párpartícióját megkapjuk, kivéve azokat amelyekben az elsõ elem párja éppen az utolsó elem. Ezek száma azonban pont D_{n-1}, ami igazolja állításunkat. ■

4.4. Tétel. [**O3**] *Egy n elemû halmaz nemkeresztezõ szimmetrikus partícióinak a száma $\binom{n}{[n/2]}$.*

Bizonyítás. Elõször megmutatjuk, hogy az $\{A_n\}$ sorozat (ahol A_n n elem nemkeresztezõ szimmetrikus partícióinak a száma) eleget tesz a következõ rekurziónak.

$$\begin{aligned} A_{2l+1} &= 2A_{2l} - c_l \qquad \text{minden } l = 0, 1, 2, \ldots \text{ esetén és} \\ A_{2l+2} &= 2A_{2l+1} \qquad \text{minden } l = 0, 1, 2, \ldots \text{ esetén,} \end{aligned} \tag{4.2}$$

ahol c_l az l-edik Catalan-szám (mely megegyezik l elem összes nemkeresztezõ partícióinak a számával), és definíció szerint $A_0 = c_0 = 1$.

Az $S_0 = \{1, 2, \ldots, l, l+2, \ldots, 2l+1\}$ halmaz tetszõleges π nemkeresztezõ szimmetrikus partíciójából kiindulva $\tilde{\pi} = \pi \cup \{l+1\}$ egy nemkeresztezõ szimmetrikus partíciója az $S = \{1, 2, \ldots, 2l+1\}$ halmaznak. Az is magától értetõdik, hogy S_0 különbözõ partícióiból kiindulva ily módon S különbözõ partícióihoz jutunk. Így ezzel a módszerrel S-nek A_{2l} darab nemkeresztezõ szimmetrikus partícióját kaphatjuk meg. Azonban S más nemkeresztezõ szimmetrikus partícióit is megkonstruálhatjuk kiindulási π partícióinkból, ha a középre "beszúrt" elemet (mely most is az $l+1$ szám) annak a blokknak az elemévé választjuk, mely "szimmetrikus párjával" együtt tartalmazza a legnagyobb $i_0 \leq l$ elemet. (i_0 szimmetrikus párja a $2l+1-i_0$ elem.) Az egyetlen eset, amikor ilyen blokk nem létezik az, amikor minden blokk minden eleme az alaphalmaz azonos felébõl kerül ki. Ilyenkor azonban az elsõ l elem partíciója persze rögtön definiálja az utolsó l elem partícióját is (a szimmetria követelménye miatt), így ezen esetek száma éppen c_l, l elem összes nemkeresztezõ partícióinak a száma. Így ez a második eljárás további $A_{2l} - c_l$ partíciót ad, hisz S_0 különbözõ partícióiból kiindulva most is nyilván S különbözõ partícióihoz jutunk. Az is könnyen látható, hogy az ily módon nyert partíciók egyike sem egyezhet meg az elõbbi úton megkonstruált partíciók egyikével sem. Ennek ellenõrzéséhez elég a középsõ elem blokkját tekinteni. Így ezek után elég azt megmutatni, hogy S bármely nemkeresztezõ szimmetrikus partíciója megkapható a két fenti módszer valamelyikével. Ennek belátásához vegyük az S halmaz egy tetszõleges ν nemkeresztezõ szimmetrikus partícióját. Az $l+1 \in S$ (tehát a középsõ) elem a partíció szimmetrikus volta miatt vagy egymagában alkot egy blokkot, vagy a középsõ eleme egy olyan blokknak, mely nála nagyobb és kisebb elemeket is tartalmaz, szimmetrikus elrendezésben. Az elsõ esetben ν az elsõ eljárás segítségével nyilván megkapható S_0 $\nu_0 = \nu \setminus \{l+1\}$ partíciójából. A második esetben, mivel a partíció nemkeresztezõ, az a blokk, mely "szimmetrikus párjával" együtt tartalmazza a legnagyobb $i_0 \leq l$ elemet, szükségképpen tartalmazza a középsõ elemet is. Így ilyenkor ν a második módszerrel kapható meg S_0 azon partíciójából, melyet úgy kapunk meg ν-bõl, hogy a középsõ elemet elhagyjuk az õt tartalmazó blokkból (és magából az alaphalmazból is).

Ha most $2l+1$ elem valamely nemkeresztezõ szimmetrikus partíciójából indulunk ki, ismét kétféle módon juthatunk az $2l+2$ elemû halmaz egy nemkeresztezõ szimmetrikus partícijához. A középsõ elemet (s_l-et) megduplázva, az így keletkezõ két új elemet vagy közös, vagy különbözõ blokkba definiálhatjuk. (Az elsõ esetben a blokkok száma nem változik meg, míg a második esetbet eggyel nõ.) Különbözõ partíciókból kiindulva most is mindkét eljárás különbözõ partíciókat eredményez, és az is könnyen ellenõrízhetõ, hogy az egyik módszer alapján megkapott egyetlen partíció sem kapható meg egyúttal a másik eljárással is (ehhez elég a középsõ két elem blokkját (blokkjait) szemügyre venni). Megmutatjuk, hogy a fenti két módszer valamelyikével a $2l+2$ elemû halmaz bármely nemkeresztezõ szimmetrikus partíciója megkapható. Legyen η tetszõleges ilyen partíció. A két középsõ elem vagy közös blokkban van, vagy két különbözõ blokk eleme. Az elsõ esetben η nyilván az elsõ módszerrel kapható meg $2l+1$ elem azon partíciójából, melyet a két középsõ elem összeolvasztása révén nyerünk η-ból. A második esetben η ugyanebbõl a partícióból kapható meg a második eljárás segítségével.

Az, hogy az $\binom{n}{[n/2]}$ számsorozat kielégíti az imént igazolt rekurziót ugyanazzal a kezdõ elemmel, közvetlen számolással ellenõrízhetõ, ami tételünket igazolja. ■

4.5. Megjegyzés. Az $\binom{n}{[n/2]}$ számok megegyeznek a Pascal-háromszög "tengelyében" található értékekkel.

4.6. Tétel. [**O3**] *Egy $2n$ elemû halmaz nemkeresztezõ szimmetrikus párpartícióinak a száma megegyezik egy n elemû halmaz nemkeresztezõ szimmetrikus partícióinak a számával, azaz értéke szintén $\binom{n}{[n/2]}$.*

Bizonyítás. Vegyük egy $2n$ elemû halmaz nemkeresztezõ szimmetrikus párpartícióit. Ezek között lesznek olyanok, amelyeben az elsõ elem párja éppen az utolsó elem. Az ilyen nemkeresztezõ párpartíciók száma nyilván B_{n-1}. Amennyiben az elsõ elem párja nem az utolsó elem, akkor az - a párpartíció nemkeresztezõ volta miatt - szükségképpen egy, az elsõ n elem közé esõ, páros sorszámú helyen álló elem. A határozottság kedvéért legyen ez az elem a $2k$-adik $\left(k=1,2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]\right)$. Ebbõl a szimmetria követelménye miatt következik, hogy az utolsó elem párja a $(2n+1-2k)$-adik elem. Az ilyen párpartíciók száma $c_{k-1}B_{n-2k}$ ($B_0=c_0=1$ értékadással), mivel az elsõ elem párja és az elsõ elem közé esõ elemeken bármely nemkeresztezõ párpartíció megadható (ezek száma épp c_{k-1}), ennek megválasztása azonban egyértelmûen rögzíti az utolsó elem párja és az utolsó elem közötti elemeken azt a párpartíciót, mely eleget tesz a szimmetria követelményének; az elsõ elem párja és az utolsó elem párja közötti elemeken pedig tetszõleges nemkeresztezõ szimmetrikus párpartíció megadható, melyek száma B_{n-2k}. Ezek alapján

$$B_n = \sum_{k=1}^{[n/2]} c_{k-1}B_{n-2k} + B_{n-1} \qquad n=2,3,4,\ldots \quad \text{esetén, a} \tag{4.3}$$

$$B_0 = B_1 = 1 \quad \text{értékadással.}$$

Megmutatjuk, hogy a nemkeresztezõ szimmetrikus partíciók számának sorozata - ugyanezekkel a kezdõelemekkel - szintén eleget tesz a fenti (4.3) rekurziónak.

Az elõzõ, 4.4. tételbõl közvetlenül adódik, hogy $A_1 = 1$, A_0 értéke pedig korábbi definíciónk szerint szintén egy.

n elem nemkeresztezõ szimmetrikus partíciói között vannak olyanok, melyben az elsõ elem egyedül alkot egy blokkot. Ezen partíciókban természetesen az utolsó elem is egyelemû blokkot képez. Az ilyen nemkeresztezõ szimmetrikus partíciók száma ebbõl következõen A_{n-2}. Azon nemkeresztezõ szimmetrikus partíciók száma, melyekben az elsõ és az utolsó elem kételemû blokkot alkot, ugyanennyi. Minden más nemkeresztezõ szimmetrikus partíció esetében az elsõ elemet tartalmazó blokk tartalmaz legalább egy olyan elemet is, mely az elsõ és utolsó elemek között fekszik. Ekkor tekintsük ezen elemek közül azt, mely az elsõ elemhez a legközelebb van. A határozottság kedvéért legyen ez a k-adik elem. A vizsgált partíciók nemkeresztezõ volta miatt k lehetséges értékeire $k = 2, 3, \dots, [n/2]$ adódik. Az ilyen nemkeresztezõ szimmetrikus partíciók száma $c_{k-2}A_{n-2k-2}$, hiszen az elsõ és a k-adik elem közötti $k-2$ elemen tetszõleges nemkeresztezõ partíció megadható (ezek száma c_{k-2}), ennek megválasztása azonban egyértelmûen rögzíti az utolsó és az $(n+1-k)$-adik elem közötti elemeken azt a partíciót, mely eleget tesza a szimmetria követelményének; míg a középsõ $n-2k+2$ elemen (azaz a k-adik és az $(n+1-k)$-adik elem közé esõ elemeken) tetszõleges nemkeresztezõ szimmetrikus partíció megadható, melyek száma A_{n-2k+2}. Ezek alapján

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} c_{k-2}A_{n-2k+2} + 2A_{n-2} \\
&= \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} c_{k-1}A_{n-2k} + 2A_{n-2} \;\; (n = 3, 4, 5, \dots)\,, \\
A_0 &= A_1 = 1 \quad \text{és} \quad A_2 = 2.
\end{aligned}$$

A (4.2) formulákat figyelembe véve ez alapján

$$\begin{aligned}
A_{2l+2} &= \sum_{k=1}^{l} c_{k-1}A_{2l+2-2k} + c_l + A_{2l+1} \\
&= \sum_{k=1}^{l} c_{k-1}A_{2l+2-2k} + c_l A_0 + A_{2l+1} \\
&= \sum_{k=1}^{l+1} c_{k-1}A_{2l+2-2k} + A_{2l+1}
\end{aligned}$$

és

$$A_{2l+1} = \sum_{k=1}^{l} c_{k-1} A_{2l+1-2k} + A_{2l},$$

melyeket egybefoglalva

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^{[n/2]} c_{k-1} A_{n-2k} + A_{n-1} \qquad n = 2, 3, 4, \ldots, \\ A_1 &= A_0 = 1 \end{aligned}$$

adódik, igazolván állításunkat. ■

4.7. Tétel. [**O3**] *n elem szimmetrikus partícióinak, valamint nemkeresztező szimmetrikus partícióinak a halmaza a partíciók szokásos $\leq$ részben rendezésével hálót alkot minden n természetes szám esetén.*

Bizonyítás. A bizonyítás ugyanúgy végezhető el, mint a nemkeresztező partíciók, vagy az összes partíció esetében. ■

A fejezet hátralévő részében azt a kérdést fogjuk vizsgálni, hogy vajon bizonyos szimmetrikus partíciók számosságának sorozata tekinthető-e valamely valószínűségi mérték momentumsorozatának.

4.8. Tétel. [**O3**] *Legyen*

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \chi(x)\, dx, \tag{4.4}$$

ahol χ a $[-2; 2]$ intervallum karakterisztikus függvénye. Ekkor μ n-edik momentuma megegyezik n elem nemkeresztező szimmetrikus partícióinak a számával minden n természetes szám esetén.

Bizonyítás. Jelölje μ n-edik momentumát m_n. Parciális integrálással

$$\begin{aligned} m_{2l} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} x^{2l} \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\pi 4^l - 4l \int_{-2}^{2} x^{2l-1} \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) dx \right], \text{ és} \qquad (4.5) \\ m_{2l+1} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} x^{2l+1} \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx = \frac{1}{2\pi} (2l+1) \int_{-2}^{2} x^{2l} \sqrt{4-x^2} dx \end{aligned}$$

adódik a páros, illetve a páratlan momentumokra. Újabb parciális integrálással (4.5) felsõ sora az $m_{2l} = 2m_{2l} - 1$, míg (4.5) alsó sora az $m_{2l+1} = \frac{2l+1}{l+1} m_{2l}$ összefüggést adja. m_0 és m_1 a (4.4) formulából közvetlenül kiszámítható, értékükre $m_0 = m_1 = 1$ adódik. Az, hogy az $\binom{n}{[n/2]}$ számsorozat kielégíti az imént igazolt rekurziót ugyanazokkal a kezdõ elemekkel, közvetlen számolással ellenõrízhetõ, ami tételünket igazolja. ■

4.9. Megjegyzés. A 4.8. tételben megadott μ mérték felírásának konstruktív útja μ momentum generáló során keresztül vezet. Az A_n számsorozat által meghatározott momentum generáló sor

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} x^{2k+1}.$$

Az $A_{2k} = 2A_{2k-1}$ és az $A_{2k+1} = 2A_{2k} - c_k$ rekurziós összefüggéseket felhasználva némi számolás után

$$M(x) = \frac{1 - xW(x)}{1 - 2x} \tag{4.6}$$

adódik, ahol $W(x)$ a standard Wigner-eloszlás $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n}$ momentum generáló sorát jelöli:

$$W(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x^2}$$

(l. például [**HP**]). Ezt (4.6)-ba helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$M(x) = \frac{2x + \sqrt{1 - x^2} - 1}{2x - 4x^2},$$

ami alapján a keresett mérték Cauchy-transzformáltja (2.4.6) alapján

$$G(z) = \frac{1}{z} M\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{z+2}{z-2}} - 1\right].$$

Alkalmazva erre a Stieltjes-féle inverziós formulát, végül

$$\frac{\mu}{dx} = \lim_{y \downarrow 0}\left[-\frac{1}{\pi}\operatorname{Im} G(x + iy)\right] = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\chi_{[-2;2]}(x)$$

adódik.

4.10. Tétel. [**O3**] *Nincs olyan valószínûségeloszlás, melynek a momentumsorozata megegyezne a nemkeresztezõ szimmetrikus párpartíciók számosságának sorozatával.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $g(x)$ egy ilyen valószínûségeloszlás sûrûségfüggvénye. Ebbõl az következik, hogy található olyan ξ (valós) valószínûségi változó, mely sûrûségfüggvénye épp $g(x)$, és melyre

$$E(\xi^n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 2k+1, \\ A_k, & \text{ha } n = 2k \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.7}$$

Ezekután tekintsük az $\eta = \xi^2$ valószínûségi változót. (4.7) alapján η momentumaira

$$E\left(\eta^k\right) = E\left(\xi^{2k}\right) = A_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

adódik. A kompakt tartójú, adott momentumsorozattal rendelkezõ sûrûségfüggvények egyértelmûségébõl az következik, hogy η sûrûségfüggvénye a 4.8. tételbõl megkapható

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\chi(x).$$

A $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$ integrál megadja annak a véletlen eseménynek a (pozitív) valószínûségét, hogy η értéke -2 és -1 közé esik. Mivel azonban $\eta = \xi^2$, ennek az eseménynek a valószínûsége szükségképpen nulla. Ez az ellentmondás igazolja állításunkat. ■

4.11. Tétel. [**O3**] *Nincs olyan valószínûségeloszlás, melynek a momentumsorozata megegyezne a szimmetrikus párpartíciók számosságának sorozatával.*

Bizonyítás. Annak, hogy egy $\{a_i\}_{i=0,1,2,\ldots}$ számsorozat valamely valószínûségi mérték momentumsorozata legyen, szükséges feltétele az, hogy a

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_k \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{k-1} \\ . & . & . & . \\ a_k & a_{k+1} & \ldots & a_{2k} \end{vmatrix}$$

determináns értéke minden $k = 0, 1, 2, \ldots$ értékre nemnegatív legyen (l. 2.4.1. tétel). Esetünkben a (4.1) rekurzió segítségével kiszámolva a

$$\begin{vmatrix} D_0 & 0 & D_1 & 0 \\ 0 & D_1 & 0 & D_2 \\ D_1 & 0 & D_2 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & D_3 \end{vmatrix}$$

determináns értékét, eredményül -4 adódik, ami a tétel állítását már igazolja. ■

4.12. Megjegyzés. A fenti bizonyítás mintájára a 4.10. tétel egy alternatív bizonyítása is megadható, figyelembe véve, hogy

$$\begin{vmatrix} A_0 & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & A_2 \\ A_1 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & A_3 \end{vmatrix} = -1.$$

4.13. Tétel. [**O3**] *Legyen* $\lambda > 0$ *esetén*

$$\mu_\lambda = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(1+\lambda)+x}{(1+\lambda)-x}\left(1-\frac{(1-\lambda)^2}{x^2}\right)}\chi(x)\,dx, & \text{ha } \lambda \geq 1, \\ (1-\lambda)\,\delta_0 + \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(1+\lambda)+x}{(1+\lambda)-x}\left(1-\frac{(1-\lambda)^2}{x^2}\right)}\tilde{\chi}(x)\,dx, & \text{ha } 0 < \lambda < 1, \end{cases} \tag{4.8}$$

ahol χ *a* $[-1-\lambda; 1-\lambda] \cup [-1+\lambda; 1+\lambda]$ *halmaz, míg* $\tilde{\chi}$ *a* $[-1-\lambda; -1+\lambda] \cup [1-\lambda; 1+\lambda]$ *halmaz karakterisztikus függvénye. Ekkor* μ_λ *n-edik momentuma*

$$m_n^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^{n} A_n^{(i)} \lambda^i \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.9}$$

ahol $A_n^{(i)}$ *n elem azon nemkeresztező szimmetrikus partícióinak a számát jelöli, melyekben a blokkok száma i.*

Bizonyítás. A 4.2. és a 4.4. tételek bizonyításához hasonlóan felírhatók az alábbi, $A_n^{(i)}$ számokra vonatkozó rekurzív összefüggések:

$$\begin{aligned} A_{2n+1}^{(2k)} &= A_{2n}^{(2k-1)} + A_{2n}^{(2k)} - Q_n^{(k)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots \text{ és } k = 1, 2, \ldots, n), & (4.10) \\ A_{2n+1}^{(2k+1)} &= A_{2n}^{(2k)} + A_{2n}^{(2k+1)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots \text{ és } k = 1, 2, \ldots, n-1), \\ A_{2n+1}^{(1)} &= A_{2n+1}^{(2k+1)} = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ A_{2n}^{(k)} &= A_{2n-1}^{(k)} + A_{2n-1}^{(k-1)} - Q_n^{(k)} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots \text{ és } k = 2, 3, \ldots, 2n-1) \text{ és} \\ A_{2n}^{(1)} &= A_{2n}^{(2n)} = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \end{aligned}$$

ahol $Q_n^{(i)}$ n elem azon nemkeresztező partícióinak a számát jelöli, melyekben a blokkok száma i. (4.9) és (4.10) az alábbi rekurziót adja μ_λ momentumaira:

$$\begin{aligned} m_{2n}^{(\lambda)} &= (1+\lambda)\, m_{2n-1}^{(\lambda)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \\ m_{2n+1}^{(\lambda)} &= (1+\lambda)\, m_{2n}^{(\lambda)} - \tilde{m}_n^{(\lambda)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ m_0^{(\lambda)} &= 1, \end{aligned}$$

ahol $\tilde{m}_n^{(\lambda)}$ a λ^2 paraméterû szabad Poisson-eloszlás n-edik momentumát jelöli, melyre (amint azt a 3. fejezetben láttuk)

$$\tilde{m}_n^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^{n} Q_n^{(i)} \lambda^{2i}. \tag{4.11}$$

Az $m_n^{(\lambda)}$ számsorozat által meghatározott momentum generáló sor

$$M_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n^{(\lambda)} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} m_{2k}^{(\lambda)} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} m_{2k+1}^{(\lambda)} x^{2k+1}. \tag{4.12}$$

(A λ paraméterû szabad Poisson-eloszlás és a klasszikus Poisson-eloszlás momentum generáló sorai nyilván majorálják a (4.12) sort. Mivel azok a sorok abszolút konvergensek x megfelelõen kicsi értékeire, ugyanez teljesül $M_\lambda(x)$-re is.)

Felhasználva (2.4.6)-ot, a (4.11) rekurziót, és figyelembe véve, hogy a λ^2 paraméterû szabad Poisson-eloszlás Cauchy-transzformáltja (3.3) szerint

$$\tilde{G}_{\lambda^2}(z) = \frac{z + 1 - \lambda^2 - \sqrt{(\lambda^2 + 1 - z)^2 - 4\lambda^2}}{2z},$$

μ_λ Cauchy-transzformáltjára

$$G_\lambda(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1-\lambda}{z} - 1 + \sqrt{\frac{z + (1+\lambda)}{z - (1+\lambda)}\left(1 - \frac{(1-\lambda)^2}{z^2}\right)}\right]$$

adódik. Innen a Stieltjes-féle inverziós formula alkalmazásával és némi számolással igazolható, hogy a keresett mérték éppen a (4.8) formulával megadott μ_λ. ■

4.14. Megjegyzés. A (4.8) formulával adott μ_λ mérték $\lambda = 1$ esetén megegyezik a 4.8. tételben megadott μ mértékkel.

A 4.13. tételben megadott μ_λ valószínûségi mérték tekinthetõ a szabad Poisson-eloszlás "szimmetrikus analogonjának" (bár ez az elnevezés nem túl szerencsés, mivel μ_λ/dx képe egyáltalán nem szimmetrikus). A 4.10. és 4.11. tételek azt mutatják, hogy a Wigner-eloszlás és a Gauss-eloszlás esetében ilyen "szimmetrikus analogonról" nem beszélhetünk. Végül meg kell említenünk, hogy a λ paraméterû klasszikus Poisson-eloszlás "szimmetrikus analogonját" (vagyis azt a valószínûségi mértéket, melynek n-edik momentuma λ azon polinomja, ahol λ^i együtthatója az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz azon szimmetrikus partícióinak a száma, melyekben a blokkok száma éppen i) egyenlõre nem sikerült meghatározni, mint ahogy az is nyitott kérdés még, hogy ilyen mérték létezik-e egyáltalán.

5. A MOMENTUM PROBLÉMA KITÜNTETETT MEGOLDÁSAI

A Hamburger-féle momentum probléma áttekintésénél (2.4. alfejezet) láttuk, hogy egy adott $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ számsorozat akkor lehet valamely μ mérték momentum sorozata, ha az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat elemeibõl alkotott (2.4.2) mátrix minden fõminorának determinánsa nemnegatív. Ahhoz, hogy μ valószínûségi mérték legyen szükséges az is, hogy $\Delta_0 = a_0 = 1$ legyen. Az alábbiakban azt a kérdést fogjuk megvizsgálni, hogy mely valószínûségeloszlások lesznek azok, melyekre nemcsak az elsõ, hanem az összes többi Δ_n értéke is 1. A válasz többek között rámutat a Catalan-számok sorozatának egy új, erõsen nemlineáris jellemzésére. A fejezet végén megadjuk a Δ_n determinánsok soorzatát a q-normális eloszlások családjára vonatkozólag (a q-normális eloszlással kapcsolatban l. a 2.1. alfejezetet).

5.1. Tétel. [O5] *Legyen az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ valós számsorozat olyan, hogy az elemeibõl képzett*

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & a_1 & 0 & a_2 & \dots \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & \dots \\ a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & \dots \\ 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 & \dots \\ a_2 & 0 & a_3 & 0 & a_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

végtelen mátrix minden fõminorának Δ_n determinánsa 1. *Ekkor $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ megegyezik a Catalan-számok $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatával.*

5.2. Megjegyzés. A 2.1. alfejezetben láttuk, hogy a standard Wigner-eloszlás páros momentumait épp a Catalan-számok sorozata adja meg, míg páratlan momentumaik mind nullák (2.1.5). Így állításunk nem mond mást, mint hogy az origóra szimmetrikus valószínûségi mértékek közül a standard Wigner-eloszlás (és csak az) teljesíti azt a kritériumot, hogy a momentumaiból képzett (2.4.2) mátrix minden fõminorának determinánsa egységnyi. Ebbõl a szempontból tekinthetjük tehát a standard Wigner-eloszlást a momentum probléma kitüntetett megoldásának, amire a fejezet címe utal.

Bizonyítás. Mivel a

$$\Delta_{n+1} = a_{n+1}\Delta_n + f(a_0, a_1, \dots, a_n)$$

összefüggés szerint (ahol f az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sorozatelemek egy függvénye) a keresett számsorozat újabb elemei az azt megelõzõ elemek segítségével egyértelmûen meghatározhatók, a probléma megoldása egyértelmû. Ezek után elég azt igazolni, hogy a Catalan-számok sorozata kielégíti a kívánt feltételeket.

(2.1.5) szerint a standard Wigner-eloszlás momentumaira

$$m_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páratlan és} \\ c_k, & \text{ha } n = 2k, \end{cases}$$

ahol c_k a k-adik Catalan-szám.

A 2.4. alfejezetben leírtuk azt is, hogy minden korlátos momentum sorozattal rendelkezõ, origóra szimmetrikus μ valószínûségi mérték Cauchy-transzformáltja felírható a

$$G_\mu(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(x)}{z-x} = \cfrac{1}{z - \cfrac{\beta_1}{z - \cfrac{\beta_2}{z - \ddots}}} \tag{5.1}$$

lánctört alakban, ahol $\beta_1, \beta_2, \ldots$ nemnegatív valós számok, melyek segítségével

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n. \tag{5.2}$$

A 2.4. alfejezetban láttuk azt is, hogy a $b_n = \sqrt{\beta_n}$ számokkal definiált, az $l^2(\mathbf{Z}^+)$ téren

$$S\delta_n = b_{n+1}\delta_{n+1} \qquad \left(n \in \mathbf{Z}^+\right)$$

szerint ható S súlyozott jobbra tolás operátornak és annak S^* adjungáltjának összege minden n természetes számra eleget tesz a

$$m_n(\mu) = \langle (S+S^*)^n \delta_0, \delta_0 \rangle$$

összefüggésnek (más szóval $(S+S^*)$ eloszlása δ_0-ban éppen a fenti μ mérték).

Ha $b_n = 1$ minden n-re, akkor

$$S\delta_n = \delta_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbf{N},$$

és $(S+S^*)$ eloszlása δ_0-ban a standard Wigner-eloszlás lesz. Mivel $b_n = 1$ alapján $\beta_n = 1$ minden n-re, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = 1$$

minden n természetes szám esetén. Mivel azonban ez esetben $\Delta_0 = c_0 = 1$, $\Delta_n = 1$ minden n-re fennáll. Mindezt összevetve a tétel állítása bizonyítást nyer. ■

5.3. Következmény. [**O5**] A determinánsok kifejtési szabályai alapján az elõzõ tétel szerint a

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

végtelen mátrixnak is minden fõminora egységnyi determinánsú (c_k itt is a k-adik Catalan-szám). Az azonban már nem igaz, hogy ilyen esetben is - tehát amikor a mátrixnak nem nulla minden második eleme - a Catalan-számok sorozata az egyetlen olyan számsorozat, amire ez teljesül. Ha viszont a fenti mátrix legelsõ sorának (vagy oszlopának) elhagyásával kapott mátrixra is megköveteljük, hogy az összes fõminor determinánsa 1 legyen, akkor a probléma már ekvivalens lesz az 5.1. tételben tekintettel, amit már csak a Catalan-számok sorozata elégít ki. A szabad Poisson-eloszlás momentumaira kapott (3.5) kifejezés és (2.3.2) figyelembevételével ebbõl azt kapjuk, hogy a $\lambda = 1$ paraméterû szabad Poisson-eloszlás is "kitüntetett megoldása" a momentum-problémának. Ezen túlmenõen a fentiekbõl az is következik, hogy a $\lambda = 1$ paraméterû szabad Poisson-eloszlás Cauchy-transzformáltját megadó

$$\cfrac{1}{z - \alpha_1 - \cfrac{\beta_1}{z - \alpha_2 - \cfrac{\beta_2}{z - \alpha_3 - \ddots}}}$$

lánctörtben szereplõ β_i számok megegyeznek a standard Wigner-eloszlás esetében fellépõ, az (5.1) képletben szereplõ β_i értékekkel (azaz ez esetben is $\beta_n = 1$ minden n-re), hisz azokat a tekintett determinánsok Δ_n sorozata egyértelmûen meghatározza.

5.4. Tétel. [**O5**] *Legyen $q \in (-1, 1)$. Legyen továbbá $\left\{m_n^{(q)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ a $(2.1.7-8)$ képlettel megadott q-normális eloszlás momentumsorozata. Ekkor az*

$$\begin{pmatrix} m_0^{(q)} & m_1^{(q)} & m_2^{(q)} & \dots \\ m_1^{(q)} & m_2^{(q)} & m_3^{(q)} & \dots \\ m_2^{(q)} & m_3^{(q)} & m_4^{(q)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

végtelen mátrix $n \times n$-es fõminorának Δ_n determinánsa minden n természetes szám *esetén a*

$$\Delta_n = \prod_{k=0}^{n} [k]_q! \tag{5.4}$$

képlettel megadott szám, ahol $[k]_q!$ *az elsõ* k *darab* q*-egész szorzatát jelöli. Megfordítva, ha az* (5.3) *mátrix fõminorainak determinánssorozatára* (5.4) *áll fenn, akkor az* (5.3) *mátrixban szereplõ számsorozat épp a* q*-normális eloszlás momentumsorozata.*

Bizonyítás. A bizonyítás menete ugyanaz, mint az 5.1. tétel esetében. Az egyetlen különbség, hogy a q-normális eloszlást mutató S súlyozott jobbra tolás operátor definiáló egyenleteiben szereplõ b_n súlyok értéke most éppen $\sqrt{[n]_q}$ lesz, s így (5.2) alapján a keresett determinánsok értékéül pont a kívánt kifejezést kapjuk. ■

5.5. Megjegyzés. $q = 0$ esetén visszakapjuk az 5.1. tétel állítását a standard Wigner-eloszlásra vonatkozólag. $q \to -1$ esetén az eredmény megegyezik a fermionokhoz tartozó mezõ operátor $\frac{1}{2}\delta_{-1}+\frac{1}{2}\delta_1$ (két atomból álló) eloszlásánál várttal, azaz $\Delta_0 = \Delta_1 = 1$, míg $n > 1$ esetén $\Delta_n = 0$, amint az a 2.4.1. tétel alapján elõre tudható is. Végül a $q \to 1$ eset a standard normális eloszláshoz tartozik, mikor is a determinánsok sorzatára

$$\Delta_n = \prod_{k=0}^{n} k!$$

adódik.

6. A CIRKULÁRIS ELEM HATVÁNYAI

Tekintsük a 3.3. tételben szereplõ $T^{(n)}$ véletlen mátrixot $p(n) = n$ $(\lambda = 1)$ esetén, azaz amikor $T^{(n)}$ négyzetes mátrix. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy $n \to \infty$ határesetben $\frac{1}{\sqrt{n}}T^{(n)}$ (mint a $(\mathcal{G}_n, \tau_n)$ nemkommutatív valószínûségi mezõ eleme) cirkuláris elem, az $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}T^{(n)}\right)^k, \left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}T^{(n)}\right)^t\right)^k\right)$ pár pedig R-diagonális minden $k = 1, 2, \ldots$ esetén. Pontosabban igaz az alábbi két tétel állítása:

6.1. Tétel. *Legyen* $G^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\xi_{ij}^{(n)}\right)$ *olyan* $n \times n$*-es véletlen mátrix, melynek elemei független, azonos eloszlású valószínûségi változók nulla várható értékkel és egy szórással, valamint korlátos momentumsorozattal. Ekkor* $\left(G^{(n)}, G^{(n)t}\right)$ *eloszlása* $n \to \infty$ *határesetben megegyezik a* (c, c^*) *pár eloszlásával, ahol* c *cirkuláris elem.*

6.2. Tétel. *Legyen* $G^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\xi_{ij}^{(n)}\right)$ *olyan* $n \times n$*-es véletlen mátrix, melynek elemei független, azonos eloszlású valószínûségi változók nulla várható értékkel és egy szórással, valamint korlátos momentumsorozattal. Ekkor* $\left(\left(G^{(n)}\right)^k, \left(G^{(n)t}\right)^k\right)$ $n \to \infty$ *esetén* R*-diagonális pár minden* $k = 1, 2, \ldots$ *esetén. (Itt* $G^{(n)t}$ $G^{(n)}$ *transz-ponáltja.)*

Megjegyezzük, hogy a 6.1. tétel módosított formában több helyen is megtalálható (l. pl. [**HP**], [**R**]), így itt csak egy vázlatos bizonyítást közlünk, ami sok szempontból hasonló a 3.3. és 3.4. tételek bizonyításához.

A 6.1. Tétel bizonytításának vázlata. (2.1.17) alapján tetszõleges c cirkuláris elem esetén $R_{(c,c^*)}(X_1, X_2) = X_1X_2 + X_2X_1$. Legyen $c_1 = c$, $c_2 = c^*$. A (2.1.16) momentum-kumuláns formula alapján ekkor minden $k = 1, 2, \ldots$ esetén és $i(1), i(2), \ldots, i(k) \in \{1, 2\}$ minden lehetséges értékeire

$$\varphi\left(c_{i(1)}c_{i(2)} \ldots c_{i(k)}\right) = \sum_{\nu \in H} \prod_{V \in \nu} 1 = \#H, \tag{6.1}$$

ahol H az $\{1, 2, \ldots, k\}$ halmaz azon ν nemkeresztezõ párpartícióin fut végig, melyekben $\{p, q\} \in \nu$ esetén $i(p) \neq i(q)$ (könnyen ellenõrízhetõ, hogy minden más partíció nulla járulékot ad, míg a H-beli párpartíciók járuléka minden esetben éppen 1). A momentum-kumuláns formula invertálhatósága alapján az is igaz azonban, hogy ha egy a elemre ($c_1 = a$, $c_2 = a^*$ szereposztással) (6.1) teljesül, akkor a cirkuláris elem.

Megmutatjuk, hogy $c_1 = G^{(n)}$, $c_2 = G^{(n)t}$ szereposztással $n \to \infty$ határesetben (6.1) teljesül, ami állításunkat a fentiek értelmében már igazolja. Ekkor

$$\begin{aligned}\varphi\left(c_{i(1)}c_{i(2)}\dots c_{i(k)}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\left(diag_j\left(c_{i(1)}c_{i(2)}\dots c_{i(k)}\right)\right) = \\ &\frac{1}{n^{k/2+1}}\sum_{r_1,r_2,\dots,r_k=1}^{n} E\left(\eta_{r_1r_2}\eta_{r_2r_3}\dots\eta_{r_{k-1}r_k}\eta_{r_kr_1}\right),\end{aligned}$$

ahol $\eta_{r_jr_{j+1}}$ jelentése $i(j) = 1$ esetén $\xi_{r_jr_{j+1}}$, $i(j) = 2$ esetén pedig $\xi_{r_{j+1}r_j}$.

Legyen $l = \#\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$, ezzel (a 3.3. tétel bizonyításához hasonlóan)

$$\varphi\left(c_{i(1)}c_{i(2)}\dots c_{i(k)}\right) = \frac{1}{n^{k/2+1}}\sum_{l=1}^{k}\sum_{(l)} E\left(\eta_{r_1r_2}\eta_{r_2r_3}\dots\eta_{r_{k-1}r_k}\eta_{r_kr_1}\right),$$

ahol a második összegzés azokra a szekvenciákra vonatkozik, melyekben l értéke éppen az elsõ összegzés alapján kijelölt érték. Az ilyen szekvenciák száma nyilván nem több, mint $\binom{n}{l}l^k$. A Hölder egyenlõtlenségbõl és a momentumok sorozatának korlátos volta miatt

$$\begin{aligned}&\left|E\left(\eta_{r_1r_2}\eta_{r_2r_3}\dots\eta_{r_{k-1}r_k}\eta_{r_kr_1}\right)\right| \\ \leq\ & E\left(\left|\eta_{r_1r_2}\right|^k\right)^{1/k} E\left(\left|\eta_{r_2r_3}\right|^k\right)^{1/k}\dots E\left(\left|\eta_{r_kr_1}\right|^k\right)^{1/k} \\ \leq\ & C_k(n),\end{aligned}$$

amibõl

$$\frac{1}{n^{k/2+1}}\left|\sum_{(l)} E\left(\eta_{r_1r_2}\eta_{r_2r_3}\dots\eta_{r_{k-1}r_k}\eta_{r_kr_1}\right)\right| \leq \binom{n}{l}\frac{l^kC_k(n)}{n^{k/2+1}}$$

következik, ez utóbbi pedig $l < k/2+1$ esetén nullához tart, ha $n \to \infty$.

k szerinti teljes indukcióval (a 3.3. tétel bizonyítása során alkalmazott gondolatmenet segítségével) az is belátható, hogy még $\xi_{ij} = \xi_{ji}$ esetén (vagyis amikor G szimmetrikus mátrix) is minden fellépõ szekvenciában lesz olyan mátrixelem, ami csak egyszer szerepel. Ilyenkor azonban a tekintett várható érték $E(\xi_{ij}) = 0$ és a mátrix elemeinek függetlensége miatt szükségképpen nulla. (Az általunk tekintett nem szimmetrikus esetben ez "még inkább teljesül".) Így $n \to \infty$ esetén csak azok a szekvenciák adhatnak járulékot, amelyekre $l = k/2+1$, és amelyekben minden elõforduló mátrixelem legalább kétszer szerepel. Megintcsak a 3.3. tétel bizonyítása során alkalmazott gondolatmentet felhasználva, k szerinti teljes indukcióval megmutatható, hogy az ilyen szekvenciákban minden elõforduló mátrixelem pontosan kétszer szerepel: egyszer mint G eleme, egyszer pedig mint G^t eleme; és a megfelelõ párosításhoz tartozó párpartíció nemkeresztezõ. $E\left(\xi_{ij}^2\right) = 1$ és a mátrix elemeinek függetlensége alapján ekkor

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \varphi\left(c_{i(1)}c_{i(2)}\dots c_{i(k)}\right) \\
= &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k/2+1}} \sum_{\left(l=\frac{k}{2}+1\right)} E\left(\eta_{r_1r_2}\eta_{r_2r_3}\dots\eta_{r_{k-1}r_k}\eta_{r_kr_1}\right) \\
= &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k/2+1}} \sum_{\left(l=\frac{k}{2}+1\right)} 1 \\
= &\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k/2)}{n^{k/2+1}} \# H = \# H,
\end{aligned}$$

hisz a fentebb leírt párpartíciók épp a H halmaz elemeit adják meg $i(1), i(2), \dots, i(k)$ rögzített értékei mellett. (Az utolsó sorban felhasználtuk, hogy $l = k/2+1$ index n lehetséges értékkel $n(n-1)\dots(n-k/2)$-féleképpen tölthetõ fel.) Ezzel állításunkat igazoltuk. ■

A 6.2. Tétel bizonyítása. Figyelembevéve, hogy minden $k \in \mathbf{N}$ esetén $\left(G^t\right)^k = \left(G^k\right)^t$, valamint azt a könnyen ellenõrízhetõ tényt, miszerint a (véges) hatványozás és a határérték-képzés esetünkben fölcserélhetõ, a tétel állítása közvetlen következménye a 6.1. tételnek és - az alább megadásra kerülõ - 6.4. tétel 6.8. következményének. ■

A cirkuláris elem fogalmának természtes kiterjesztését adja meg a következõ definíció.

6.3. Definíció. [**O4**] *Legyen* $(\mathcal{A}, \varphi)$ *nemkommutatív valószínûségi mezõ, és legyen* $b_1, b_2 \in \mathcal{A}$. *A* (b_1, b_2) *párt* ***cirkuláris pár****nak hívjuk, ha az R-sora*

$$R_{(b_1,b_2)}(X_1, X_2) = X_1X_2 + X_2X_2$$

alakú.

A cirkuláris párok hatványaira fennáll az alábbi tétel.

6.4. Tétel. [**O4**] *Legyen $(\mathcal{A}, \varphi)$ nemkommutatív valószínûségi mezõ, $b_1, b_2 \in \mathcal{A}$, és legyen (b_1, b_2) cirkuláris pár. Ekkor a (b_1^n, b_2^n) pár minden $n = 1, 2, 3, \ldots$ esetén R-diagonális, és (b_1^n, b_2^n) R-sora*

$$R_{\left(b_1^n, b_2^n\right)}(X_1, X_2) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_{(n-1)}c_k \, (X_1 X_2)^k + \sum_{k=1}^{\infty} {}_{(n-1)}c_k \, (X_2 X_1)^k$$

alakú, ahol ${}_{(n-1)}c_k = \frac{1}{(n-2)k+1}\binom{(n-1)k}{k}$ a k-adik, $(n-1)$ paraméterû általánosított Catalan-szám.

A tétel bizonyításához szükségünk lesz az alábbi két lemmára és a következõ definícióra.

6.5. Definíció. *Legyen $i : \mathbf{N} \to \{1, 2\}$ tetszõleges függvény, és legyen $k = 1, 2, 3, \ldots$, $n = 2, 3, 4, \ldots$. Ekkor tetszõleges rögzített i függvény esetén legyen*

$$H_{i(1), i(2), \ldots, i(k)} = \left\{ \begin{array}{c} \pi \in NC(k) \,|\forall \;\; V \in \pi : V = \{p_1, p_2, \ldots, p_{|V|}\} \\ \left(p_1 < p_2 < \ldots < p_{|V|}\right) \text{ esetén } |V| \text{ páros} \\ \text{és } i(p_j) \neq i(p_{j+1}) \;\forall\; j = 1, 2, 3, \ldots, |V| - 1. \end{array} \right\},$$

$${}_{(n)}\tilde{H}_{i(1), i(2), \ldots, i(k)} = \left\{ \begin{array}{c} \nu \in NCP(nk) \,|\forall\; V \in \nu : V = \{p, q\} \text{ esetén} \\ i\left(\left]\frac{p}{n}\right[\right) \neq i\left(\left]\frac{q}{n}\right[\right) \end{array} \right\},$$

ahol] [a felsõ egész részt jelenti. Ezen kívül az $\{1, 2, \ldots, k\}$ halmaz egy π partícióját **n-*partíciónak*** *nevezzük, ha π minden blokkja pontosan n elemet tartalmaz. Az $\{1, 2, \ldots, k\}$ halmaz összes n-partícióinak halmazát $NC_n(k)$ fogja jelölni.*

Természetesen a $H_{i(1), i(2), \ldots, i(k)}$ és a ${}_{(n)}\tilde{H}_{i(1), i(2), \ldots, i(k)}$ halmazok minden páratlan k és az i függvény sok megválasztása esetén üresek, mint ahogy $NC_n(k)$ is az üres halmaz minden olyan k esetén, mely nem n egész számú többszöröse. Másrészt viszont az $NC_n(l \cdot n)$ halmaz számosságát az l-edik, n paraméterû általánosított Catalan-szám adja meg(l. pl. [**Sp3**]), mely a ${}_n c_l = \frac{1}{(n-1)l+1}\binom{n \cdot l}{l}$ formulával adott. $n = 2$ esetén ez azt a jól ismert eredményt adja, miszerint az $\{1, 2, \ldots, 2k\}$ halmaz nemkeresztezõ párpartícióinak a száma megegyezik a k-adik Catalan-számmal (l. pl. (2.3.3)). $n = 1$ esetén pedig ${}_1 c_k = 1$ adódik minden $k = 0, 1, 2, \ldots$ esetén, összhangban a ténnyel, miszerint az $\{1, 2, \ldots k\}$ halmaznak minden k esetén csak egy olyan (nemkeresztezõ) paríciója van, melyben minden blokk pontosan egy elemû (ez a $\pi = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{k\}\}$ partíció.) Az általánosított Catalan-számokkal kapcsolatban l. még pl. [**HiPe**]-t.

6.6. Lemma. [**O4**] *Legyen* $i : \mathbf{N} \to \{1, 2\}$ *az alábbi két függvény valamelyike:*

$$i(j) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad j \text{ páratlan és} \\ 2, & \text{ha} \quad j \text{ páros,} \end{cases} \qquad \textit{vagy} \quad i(j) = \begin{cases} 2, & \text{ha} \quad j \text{ páratlan és} \\ 1, & \text{ha} \quad j \text{ páros.} \end{cases}$$

Ekkor a ${}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(2k)}$ *halmaz számossága megegyezik* $NC_{n+1}(k(n+1))$ *számosságával.*

Bizonyítás. A lemma állítását egy, a ${}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(2k)}$ és $NC_{n+1}(k(n+1))$ halmazok közötti bijekció megadásával igazoljuk.

Elõször is legyen b az alábbi függvény:

$$\begin{aligned} b \quad &: \quad \{1, 2, \ldots, 2k \cdot n\} \to \{1, 2, \ldots, k(n+1)\} \\ s \quad &\mapsto \quad b(s) = \begin{cases} \frac{j}{2}(n+1) + l, & \text{ha} \quad j \quad \text{páros és} \\ \frac{j+1}{2}(n+1), & \text{ha} \quad j \quad \text{páratlan,} \end{cases} \end{aligned}$$

ahol $j = \left[\frac{s-1}{n}\right]$ és $l = s - jn$ ([ ] az egész rész függvényt jelöli). A 6.1. ábra b hatását mutatja $n = 3$, $k = 2$ esetén.

$$\circ\circ\circ\ \underbrace{\circ\circ\circ}\circ\circ\circ\ \underbrace{\circ\circ\circ}$$

$$\Downarrow$$

$$\circ\circ\circ \quad \circ \quad \circ\circ\circ \quad \circ$$

6.1. *Ábra*

Valamely $\nu \in {}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(2k)}$ partícióra legyen $T(\nu)$ az $\{1, 2, \ldots, k(n+1)\}$ halmaz azon partíciója, melynek a blokkjait a következõképpen definiáljuk.

(1) Ha $\{s_1, s_2\} \in \nu$, akkor legyen $b(s_1)$ és $b(s_2)$ $T(\nu)$ ugyanazon blokkjában.

(2) Ha r_1 ugyanabban a blokkban van, mint r_2, és r_2 ugyanabban a blokkban van, mint r_3, akkor legyen r_1 és r_3 is ugyanabban a blokkban (a tranzitivitás követelménye).

A két fenti feltétel nyilvánvalóan egy ekvivalenciarelációt definiál, ami ily módon valóban egy partícióját adja meg az $\{1, 2, \ldots, k(n+1)\}$ halmaznak. Ez az eljárás szemléletesen azt jelenti, hogy a megfelelõ elem n-esek (6.1. ábrán látható) összeolvasztásakor a vizsgált ν párpartíció hídjait is értelemszerûen összeolvasztjuk, s az így kapott partíció lesz $T(\nu)$.

Megmutatjuk, hogy minden $\nu \in {}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(2k)}$ esetén $T(\nu) \in NC_{n+1}(k \cdot (n+1))$.

Az $i : \mathbf{N} \to \{1,2\}$ függvény speciális megválasztása miatt, a ${}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(2k)}$ halmaz definíciójából az következik, hogy ha $\{s_1, s_2\} \in \nu$, akkor $\left[\frac{s_1-1}{n}\right] + \left[\frac{s_2-1}{n}\right]$ páratlan, azaz $j_1 = \left[\frac{s_1-1}{n}\right]$ és $j_2 = \left[\frac{s_2-1}{n}\right]$ egyike páratlan, míg a másik páros. A határozottság kedvéért legyen például j_1 páratlan. Ekkor minden olyan $s_l \in \{1, 2, \ldots, 2kn\}$ esetén, mely $s_l = j_1 n + l \quad (l = 1, 2, \ldots, n)$ formába írható, $b(s_l) = \frac{j_1+1}{2}(n+1)$. Vegyük $T(\nu)$ azon V blokkját, amelyik tartalmazza a $\frac{j_1+1}{2}(n+1) \in \{1, 2, \ldots, k(n+1)\}$ elemet. Legyen s_l párja ν-ben r_l (azaz legyen $r_l \in \{1, 2, \ldots, 2kn\}$ olyan, hogy $\{r_l, s_l\} \in \nu$ - ilyen r_l létezik és egyértelmû minden $l = 1, 2, \ldots, n$ esetén, hisz ν párpartíció). Mivel $\left[\frac{s_l-1}{n}\right] = j_1$ páratlan, $j_l = \left[\frac{r_l-1}{n}\right]$ szükségképpen páros. Legyen r_l "dekompozíciója" $r_l = j_l n + h_l$. Ekkor (1) miatt $b(r_l) = \frac{j_l}{2}(n+1) + h_l$ szintén V eleme minden $l = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Mivel $u \neq v$ $(u, v = 1, 2, \ldots, n)$ $r_u \neq r_v$, következik, hogy $b(u) \neq b(v)$, ami azt jelenti, hogy V-nek legalább $n+1$ eleme van: $b(s_l)$ (ami minden l esetén ugyanaz az elem), és $b(r_l)$ (ami különbözõ l-ekre más és más). Tekintve az $\{1, 2, \ldots, 2kn\}$ halmaz olyan tetszõleges x elemét, melyre $b(x) = \frac{j_1+1}{2}(n+1)$ vagy $b(x) = \frac{j_l+1}{2}(n+1) + h_l$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$, az x párja által definiált $b(y)$ elem (1) miatt már V eleme, így (2) miatt már semmilyen más elem nem kerülhet V-be. Ezek szerint tehát V pontosan $n+1$ elemû. Mivel a fenti érvelés alkalmazható $T(\nu)$ minden egyes blokkjára, azt kapjuk, hogy $T(\nu)$ minden blokkja pontosan $n+1$ elemet tartalmaz. A fenti gondolatmenetbõl az is világos, hogy $T(\nu)$ minden V blokkjában pontosan egy olyan elem szerepel, mely $\frac{j}{2}(n+1)$ alakú (az ilyen típusú elemeket az alábbiakban b-páratlanoknak fogjuk nevezni); míg a többi elem $\frac{j}{2}(n+1) + l$ alakú valamely $l = 1, 2, \ldots, n$ esetén (az ilyen elemeket az alábbiakban b-párosoknak nevezzük).

Tételezzük fel, hogy van olyan $\nu \in {}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(2k)}$, hogy $T(\nu)$ keresztezõ. Ekkor található $V, U \in T(\nu)$ $(V \neq U)$, $v_1, v_2 \in V$, $u_1, u_2 \in U$, hogy $v_1 < u_1 < v_2 < u_2$. Amennyiben v_1 és v_2 egyike és u_1 és u_2 egyike b-páratlan, akkor ν-nek van olyan $\{s_V, r_V\}$ és $\{s_U, r_U\}$ blokkja, hogy $b(s_V) = v_1$; $b(r_V) = v_2$; $b(s_U) = u_1$ és $b(r_U) = u_2$, ahol $s_V < s_U < r_V < r_U$. Ez azonban azt jelenti, hogy ν is keresztezõ, ami ellentmond feltevésünknek, miszerint $\nu \in_{(n)} \tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(2k)}$. Ha a v_1, v_2, u_1, u_2 elemek közül csak egy b-páratlan van (mondjuk v_1 vagy v_2), akkor, ha az U blokk (egyértelmûen létezõ) u_0 b-páratlan eleme kisebb mint v_1 vagy nagyobb mint v_2, akkor u_2 helyett u_0-at tekintve v_1, v_2, u_1, u_0 ismét "keresztezõ elemek" lesznek (ha $u_0 < v_1$, akkor $u_0 < v_1 < u_1 < v_2$, míg ha $u_0 > v_2$ akkor $v_1 < u_1 < v_2 < u_0$ áll fenn); míg ha u_0 v_1 és v_2 között van, akkor v_1, v_2, u_0, u_2 lesz a négy keresztezõ elem, melyek közül már kettõ b-páratlan, megintcsak a fenti ellentmondásra vezetve. Amennyiben a v_1, v_2, u_1, u_2 elemek között nem volt egy b-páratlan sem, akkor, ha $u_0 < v_1$ vagy $u_0 > v_2$, akkor v_1, v_2, u_1, u_0, ha pedig $v_1 < u_0 < v_2$ akkor v_1, v_2, u_0, u_2 olyan keresztezõ elemek lesznek, melyek egyike már b-páratlan, ami a fentiek alapján szintén nem lehetséges. Így végül azt kapjuk, hogy minden $\nu \in {}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(2k)}$ esetén $T(\nu)$ nemkeresztezõ, ami már igazolja, hogy $T(\nu) \in NC_{n+1}(k(n+1))$ minden $\nu \in {}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(2k)}$ esetén.

Ezek után megmutatjuk, hogy T injektív, azaz $\nu_1 \neq \nu_2$ esetén $T(\nu_1) \neq T(\nu_2)$.

Legyen $\nu_1, \nu_2 \in {}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(2k)}$. Az $s \in \{1, 2, \ldots, 2kn\}$ elemet j-páratlannak illetve j-párosnak fogjuk nevezni, ha $s = jn + l$ dekompozíciójában j páratlan, illetve páros. Az ${}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(2k)}$ halmaz definíciója alapján világos, hogy minden $\nu \in {}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(2k)}$ esetén ν minden blokkja pontosan egy j-páratlan és egy j-páros elemet tartalmaz. Így ha $\nu_1 \neq \nu_2$, akkor van legalább egy olyan $s \in \{1, 2, \ldots, 2kn\}$ j-páros elem, melynek a párja ν_1-ben és ν_2-ben különbözõ. Legyen például $\{s, r_1\} \in \nu_1$; $\{s, r_2\} \in \nu_2$, és tegyük fel, hogy $r_1 = j_1 n + l_1$; $r_2 = j_2 n + l_2$, ahol $j_1 \neq j_2$. Ekkor $T(\nu_1)$-ben $b(s)$ ugyanabban a blokkban van, mint $b(r_1) = \frac{j_1+1}{2}(n+1)$, míg $T(\nu_2)$-ben $b(s)$ ugyanabban a blokkban van, mint $b(r_2) = \frac{j_2+1}{2}(n+1) \neq b(r_1)$. De mint azt fentebb láttuk, bármely $\pi = T(\nu)$ bármely blokkjában pontosan egy b-páratlan elem van, így, mivel mind $b(r_1)$, mind $b(r_2)$ b-páratlan, $T(\nu_1)$ és $T(\nu_2)$ szükségképpen különbözõ.

Ezután megmutatjuk, hogy amennyiben nincs olyan $s \in \{1, 2, \ldots, 2kn\}$ j-páros elem, hogy a ν_1 illetve ν_2 partíció szerinti párjának dekompozíciójában $j_1 = \left[\frac{r_1-1}{n}\right]$ és $j_2 = \left[\frac{r_2-1}{n}\right]$ különbözõ, akkor ν_1 és ν_2 szükségképpen megegyezik egymással. Ebben az esetben ugyanis bármely $s \in \{1, 2, \ldots, 2kn\}$ j-páros elem ν_1-beli illetve ν_2-beli párja valamely $r_1 = j_1 n + l_1$ illetve $r_2 = j_1 n + l_2$ $(l_1, l_2 = 1, 2, \ldots, n)$ elem, és megfordítva, az $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ halmaza az n darab $r_l = j_1 n + l$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ alakú j-páratlan elem párjainak ν_1-ben ugyanaz kell legyen, mint ν_2 esetében. De amint az könnyen ellenõrízhetõ, az $\{s_1, s_2, \ldots, s_n, r_1, r_2 \ldots, r_n\} \subset \{1, 2, \ldots, 2kn\}$ részhalmaznak csak egy olyan párpartíciója van, amelyik nemkeresztezõ, és amelyben minden pár egy s_l és egy r_j elembõl áll, vagyis amelyik "részpartíciója" lehet az $\nu \in {}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(2k)}$ partíciónak (l. az 6.2. ábrát). Ez azt jelenti, hogy ν_1 blokkjai megegyeznek ν_2 blokkjaival, ami bizonyítja T injektivitását.

$$\begin{array}{c} \cdots\circ\cdots\circ\cdots\circ\cdots\times\times\times\times\times\cdots\circ\cdots\circ\cdots \\ s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad r_1 r_2 \cdots \quad r_n \quad \cdots \quad s_n \end{array}$$

6.2. *Ábra*

Végül megmutatjuk, hogy T szürjektív, azaz minden $\pi \in NC_{n+1}(k(n+1))$ partícióhoz található olyan $\nu \in {}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(2k)}$ párpartíció, amire $T(\nu) = \pi$. Ezt k-ban való teljes indukcióval igazoljuk.

$k = 1$ esetén $NC_{(n+1)}(n+1)$-nek egyetlen eleme van: $\pi = \{1, 2, \ldots, n+1\}$. A $\nu = \{\{1, 2n\}, \{2, 2n-1\}, \ldots, \{n, n+1\}\} \in {}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2)}$ párpartíció nyilvánvalóan kielégíti a $T(\nu) = \pi$ összefüggést. Tegyük most fel, hogy adott k esetén T szürjektív. Megmutatjuk, hogy ebbõl ugyanez következik $k+1$ esetére is. Mivel $\pi \in$

$NC_{(n+1)}\left((k+1)(n+1)\right)$ nemkeresztezõ és π minden egyes blokkja pontosan $n+1$ elemet tartalmaz, π-nek van legalább egy olyan blokkja, amely csupa egymás melletti elemet tartalmaz, azaz van olyan $p\in\{1,2,\dots,k(n+1)\}$, hogy $\{p,p+1,p+2,\dots,p+n\}\in\pi$. Ezen elemek közül pontosan egy írható fel $j(n+1)$ alakban valamely $j=1,2,\dots,k+1$ mellett. Jelöljük ezt az elemet q-val. π-bõl vegyük most ki a $\{p,p+1,p+2,\dots,p+n\}$ blokkot, ily módon egy rövidebb $\tilde{\pi}\in NC_{(n+1)}\left(k(n+1)\right)$ partícióhoz jutunk. Feltevésünk szerint van olyan $\tilde{\nu}\in{}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\dots,i(2k)}$, hogy $\tilde{\pi}=T(\tilde{\nu})$. Tekintsük most az $\{1,2,\dots,2kn\}$ halmazt a $\tilde{\nu}$ partícióval. Ha $p\neq q$, legyen $s=\left[\frac{p}{n+1}\right]2n+\left(p-\left[\frac{p}{n+1}\right](n+1)\right)$, míg $p=q$ esetén legyen $s=\frac{p}{n+1}2n-(n-1)$. Ez biztosítja, hogy $b(s)=p$. Tegyünk most be $2n$ új elemet az $s-1$ és s elemek közé, és számozzuk át az így kapott halmazt oly módon, hogy eredményül az $\{1,2,\dots,2(k+1)n\}$ halmaz adódjon. Ezek után ν legyen e halmaz következõ párpartíciója. Azon elemek esetében, melyek az eredeti, $\{1,2,\dots,2kn\}$ halmazunkból származnak, ν-beli párjuk legyen az, amit $\tilde{\nu}$ meghatároz, míg a $2n$ új elem párját a $\{s_{h_0,j},s_{h_0-j}\}$ halmazokkal definiáljuk $j=1,2,\dots,h_0$ esetén, illetve a $\left\{s_{h_0,n-\tilde{j}},s_{h_0+1+\tilde{j}}\right\}$ halmazokkal $\tilde{j}=0,1,\dots,n-h_0-1$ esetén, ahol $h_0=q-p$; $s_h=\left[\frac{p+h}{n+1}\right]2n+\left(p+h-\left[\frac{p+h}{n+1}\right](n+1)\right)$ $h=0,1,\dots,n$, $h\neq h_0$ esetén, és $s_{h_0,l}=2\left(\frac{p+h_0}{n+1}-1\right)n+l$ $(l=1,2,\dots,n)$. A 6.3. ábra a $2n$ új elem ezen partícióját mutatja.

$$\begin{array}{c}
\circ\,\circ\cdots\circ\,\circ\times\times\cdots\times\times\times\times\cdots\times\times\circ\,\circ\cdots\circ\,\circ\\
s_1 s_2\ \cdots\ \ s_{h_0,1}\qquad\cdots\qquad\qquad s_{h_0,n}\ \cdots\ s_n
\end{array}$$

6.3. *Ábra*

Mivel a $2n$ új elem így megadott párpartíciója nemkeresztezõ és $\tilde{\nu}\in{}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\dots,i(2k)}$ szintén nemkeresztezõ, ν is nemkeresztezõ. Sõt (amint az könnyen ellenõrízhetõ) $\{1,2,\dots,2(k+1)n\}$ minden j-páratlan elemének a párja j-páros és minden j-páros elemének a párja j-páratlan, ami biztosítja, hogy $\nu\in{}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\dots,i(2(k+1))}$. Mivel $T(\nu)$-ben az a blokk, amelyik q-t tartalmazza szükségképpen a $\{p,p+1,p+2,\dots,p+n\}$ blokk, míg $T(\nu)$ többi blokkját $\tilde{\nu}$ adja meg ($\tilde{\nu}$-t ν rész-partíciójának tekinve), így $T(\nu)=\pi$, T szürjektív $k+1$ és így minden $k=1,2,3,\dots$ esetén.

Ezzel megmutattuk, hogy T egy ${}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\dots,i(2k)}\to NC_{n+1}\left(k\cdot(n+1)\right)$ bijekció, ami igazolja állításunkat. ■

6.7. Lemma. [O4] *Tetszõleges* $i:N\to\{1,2\}$ *függvény és minden* $k=1,2,3,\dots$, $n=2,3,4,\dots$ *esetén*

$$\#_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\dots,i(k)}=\sum_{\pi\in H_{i(1),i(2),\dots,i(k)}}\prod_{V\in\pi}{}_{(n-1)}C_{\frac{|V|}{2}}.$$

Bizonyítás. Valamely $\nu \in {}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(k)}$ partícióra legyen $L(\nu)$ az $\{1,2,\ldots,k\}$ halmaz azon partíciója, melynek a blokkjait a következõképpen definiáljuk.
(1) Ha $\{s_1, s_2\} \in \nu$, akkor legyen $p_1 = \left]\frac{s_1-1}{n}\right[$ és $p_2 = \left]\frac{s_2-1}{n}\right[$ $L(\nu)$ ugyanazon blokkjában, ahol $]\ [$ a felsõ egész részt jelöli.
(2) Ha r_1 ugyanabban a blokkban van, mint r_2, és r_2 ugyanabban a blokkban van, mint r_3, akkor legyen r_1 és r_3 is ugyanabban a blokkban (a tranzitivitás követelménye).

A két fenti feltétel nyilvánvalóan egy ekvivalenciarelációt definiál, ami ily módon valóban egy partícióját adja meg az $\{1,2,\ldots,k\}$ halmaznak. Ez az eljárás szemléletesen azt jelenti, hogy a megfelelõ elem n-esek 6.4. ábrán látható összeolvasztásakor a vizsgált ν párpartíció hídjait is értelemszerûen összeolvasztjuk, s az így kapott partíció lesz $L(\nu)$. A 6.4. ábra az alaphalmazok közötti kapcsolatot mutatja $n=3$, $k=4$ esetén.

$$\underbrace{\circ\circ\circ}\ \underbrace{\circ\circ\circ}\ \underbrace{\circ\circ\circ}\ \underbrace{\circ\circ\circ}$$

$$\Downarrow$$

$$\circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ$$

6.4. *Ábra*

Legyen $s_l(p) = (p-1)n + l \ (l = 1,2,\ldots,n,\ p = 1,2,\ldots,k)$. Megmutatjuk, hogy minden $\nu \in_{(n)} \tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(k)}$ esetén, amennyiben $V = \left\{p_1, p_2, \ldots, p_{|V|}\right\}$ $\left(p_1 < p_2 < \ldots < p_{|V|}\right)$ $L(\nu)$ egy blokkja, akkor $\{s_n(p_j), s_1(p_{j+1})\} \in \nu$ minden $j = 1,2,\ldots,|V|-1$ esetén, és $\left\{s_n\left(p_{|V|}\right), s_1(p_1)\right\} \in \nu$ (l. a 6.5. ábrát).

$$\cdots\circ\cdots\circ\cdots\circ\cdots\cdots\circ\cdots$$

$$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \ \cdots \quad p_{|V|}$$

$$\Downarrow$$

$$\cdots\circ\circ\cdots\circ\circ\cdots\circ\circ\cdots\circ\circ\cdots\circ\circ\cdots\circ\circ\cdots\cdots\circ\circ\cdots\circ\circ\cdots$$

$$s_1(p_1) \ \cdots \ s_n(p_1) \qquad \cdots \qquad s_1\left(p_{|V|}\right) \cdots s_n\left(p_{|V|}\right)$$

6.5. *Ábra*

Mivel ν egy nemkeresztezõ párpartíció és mivel $\{s_1, s_2\} \in \nu$ esetén $i\left(\left]\frac{s_1}{n}\right[\right) \neq i\left(\left]\frac{s_2}{n}\right[\right)$, $s_1(p)$ párja szükségképpen $s_n(q)$ valamely $q = 1,2,\ldots,k$ mellett; míg

$s_n(p)$ párja $s_1(\tilde{q})$ valamely $\tilde{q} = 1, 2, \ldots, k$ mellett, minden $p = 1, 2, \ldots, k$ esetén. (Máskülönben az $s_1(p)$ elem és a párja közé esõ azon s elemek száma, melyekre $i\left(\right]\frac{s}{n}\left[\right) = 1$ különbözne azon itteni elemek számától, melyekre $i\left(\right]\frac{\tilde{s}}{n}\left[\right) = 2$, és így ν nem lehetne ${}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(k)}$ eleme.) Ha ármost $s_n(p_j) = p_j n$ párja nem $s_1(p_{j+1}) = (p_{j+1} - 1)n + 1$, akkor p_j és p_{j+1} nem lehetne $L(\nu)$ ugyanazon blokkjában (mivel ν nemkeresztezõ). Az elsõ és az utolsó elem esete egy kicsit bonyolultabb. $s_n\left(p_{|V|}\right) = p_{|V|}n$ párja nem lehet $s_1(p)$ valamely $p > p_{|V|}$ vagy $p < p_{|V|}$ esetén, mivel ekkor $p_{|V|}$ nem volna a legnagyobb, vagy p_1 nem volna a legkisebb elem V-ben. Ha viszont $s_n\left(p_{|V|}\right)$ párja $s_1(p)$ volna valamely $p_1 < p < p_{|V|}$ esetén, akkor - mivel ν nemkeresztezõ - p_1 és $p_{|V|}$ nem lehetne $L(\nu)$ ugyanazon blokkjában. Ebbõl már következik, hogy $s_n\left(p_{|V|}\right)$ párja szükségképpen $s_1(p_1)$.

Ezután megmutatjuk, hogy minden $\nu \in {}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(k)}$ esetén $L(\nu)$ nemkeresztezõ. Tegyük fel, hogy van olyan $\nu \in {}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(k)}$, hogy $L(\nu)$ keresztezõ. Ekkor található $V, U \in L(\nu)$ $(V \neq U)$, $v_1, v_2 \in V$, $u_1, u_2 \in U$ úgy, hogy $v_1 < u_1 < v_2 < u_2$. Legyen $\tilde{v}_1$ V legnagyobb u_1-nél kisebb eleme, legyen $\tilde{v}_2$ V legkisebb u_1-nél nagyobb eleme; legyen $\tilde{u}_1$ U legnagyobb $\tilde{v}_2$-nél kisebb eleme és legyen $\tilde{u}_2$ U legkisebb $\tilde{v}_2$-nél nagyobb eleme (ilyen elemek nyilván léteznek). Ebbõl következik, hogy V-nek nincs $\tilde{v}_1$ és $\tilde{v}_2$ közé esõ, U-nak pedig nincs $\tilde{u}_1$ és $\tilde{u}_2$ közé esõ eleme, és hogy fenn áll $\tilde{v}_1 < \tilde{u}_1 < \tilde{v}_2 < \tilde{u}_2$. De, amint azt fentebb láttuk, ez esetben $\{s_n(\tilde{v}_1), s_1(\tilde{v}_2)\} \in \nu$ és $\{s_n(\tilde{u}_1), s_1(\tilde{u}_2)\} \in \nu$. Mivel $s_n(\tilde{v}_1) < s_n(\tilde{u}_1) < s_1(\tilde{v}_2) < s_1(\tilde{u}_2)$, ν is keresztezõ, ami ellentmond feltevésünknek, miszerint $\nu \in {}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(k)}$.

Ezután megmutatjuk, hogy minden $\nu \in {}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(k)}$ esetén $L(\nu)$ minden $V = \left\{p_1, p_2, \ldots, p_{|V|}\right\}$ $\left(p_1 < p_2 < \ldots < p_{|V|}\right)$ blokkjára $|V|$ páros, és $i(p_j) \neq i(p_{j+1})$ $(j = 1, 2, \ldots, |V| - 1)$. Fentebb láttuk, hogy $\{s_n(p_j), s_1(p_{j+1})\} \in \nu$, amibõl $i(p_j) = i\left(\right]\frac{s_n(p_j)-1}{n}\left[\right) \neq i\left(\right]\frac{s_1(p_{j+1})-1}{n}\left[\right) = i(p_{j+1})$ következik, míg $\left\{s_n\left(p_{|V|}\right), s_1(p_1)\right\} \in \nu$ következtében $i(p_1) = i\left(\right]\frac{s_1(p_1)-1}{n}\left[\right) \neq i\left(\right]\frac{s_n\left(p_{|V|}\right)-1}{n}\left[\right) = i(p_{j+1})$, ami állításunkat már bizonyítja. Ez azt jelnti, hogy $L(\nu) \in H_{i(1),i(2),\ldots,i(k)}$ minden $\nu \in {}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(k)}$ esetén.

Megmutatjuk, hogy L szürjektív, azaz bármely $\pi \in H_{i(1),i(2),\ldots,i(k)}$ partícióhoz található olyan $\nu \in {}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(k)}$ párpartíció, amire $L(\nu) = \pi$. Legyen $\pi = \left\{V_1, V_2, \ldots, V_{|\pi|}\right\}$, és legyen $V_j = \left\{p_1^{(j)}, p_2^{(j)}, \ldots, p_{|V_j|}^{(j)}\right\}$ $\left(p_1^{(j)} < p_2^{(j)} < \ldots < p_{|V_j|}^{(j)}, j = 1, 2, \ldots |\pi|\right)$. Legyen ν az $\{1, 2, \ldots, kn\}$ halmaz azon párpartíciója, mely az $\left\{s_1\left(p_1^{(j)}\right), s_n\left(p_{|V_j|}^{(j)}\right)\right\}$, $\left\{s_n\left(p_m^{(j)}\right), s_1\left(p_{m+1}^{(j)}\right)\right\}$ és $\left\{s_l\left(p_{2t-1}^{(j)}\right), s_{n+1-l}\left(p_{2t}^{(j)}\right)\right\}$ blokkokból áll, ahol $j = 1, 2, \ldots |\pi|$, $m = 1, 2, \ldots, |V_j| - 1$, $t = 1, 2, \ldots, \frac{|V_j|}{2}$ és $l = 2, 3, \ldots, n-1$ (l. a 6.6. ábrát π egy adott blokkjára vonatkozólag.)

$$\cdots\circ\cdots\circ\cdots\circ\cdots\cdots\circ\cdots$$

$$\Downarrow$$

$$\cdots\circ\circ\cdots\circ\circ\cdots\circ\circ\cdots\circ\circ\cdots\circ\circ\cdots\circ\circ\cdots\cdots\circ\circ\cdots\circ\circ\cdots$$

6.6. *Ábra*

Az így kapott ν párpartíció nyilvánvalóan ${}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(k)}$ eleme, és amint az könnyen látható, $L(\nu)=\pi$.

Vegyük észre, hogy ν $\left\{s_1\left(p_1^{(j)}\right), s_n\left(p_{|V_j|}^{(j)}\right)\right\}$ és $\left\{s_n\left(p_m^{(j)}\right), s_1\left(p_{m+1}^{(j)}\right)\right\}$ alakú blokkjai ($m=1,2,\ldots,|V_j|-1,\ j=1,2,\ldots,|\pi|$) (a 6.6. ábra vastagon rajzolt hídjai) már önmagukban megadják $L(\nu)$ minden blokkját; és az a tény, hogy ν nemkeresztezõ, biztosítja, hogy ν többi blokkja (melyeket a 6.6. ábrán a vékony vonalak jelölnek ki) nem definiál $L(\nu)$ egyik blokkjához sem további elemeket. Ez egyben azt is jelenti, hogy az $\left\{s_l\left(p_t^{(j)}\right)\right\}$ elemeken (ahol $l=2,3,\ldots,n-1$; $t=1,2,\ldots,|V_j|$ és $j=1,2,\ldots,|\pi|$) bármilyen más $\tilde{\nu}$ párpartíció - melyre $\{s_1,s_2\}\in\tilde{\nu}$ esetén $i\left(\left]\frac{s_1-1}{n}\right[\right)\neq i\left(\left]\frac{s_2-1}{n}\right[\right)$ - eleget tesz az $L(\tilde{\nu})=\pi$ összefüggésnek. Figyelembe véve, hogy bármely $\pi\in H_{i(1),i(2),\ldots,i(k)}$ partíció esetén π minden $V_j=\left\{p_1^{(j)},p_2^{(j)},\ldots,p_{|V_j|}^{(j)}\right\}$ blokkjának elemeire $i\left(p_m^{(j)}\right)\neq i\left(p_{m+1}^{(j)}\right)$ $(m=1,2,\ldots,|V_j|-1)$ áll fenn, valamint azt a nyilvánvaló tényt, hogy $\tilde{\nu}$ azon részpartíciói, melyek $L(\tilde{\nu})$ különbözõ blokkjait definiálják függetlenek egymástól, a 6.6. Lemma bizonyítja állításunkat. ■

A 6.4. Tétel bizonyítása. (2.1.18) szerint tetszõleges (a_1,a_2) R-diagonális pár R-sora

$$R_{(a_1,a_2)}(X_1,X_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\,(X_1X_2)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\,(X_2X_1)^k \tag{6.2}$$

alakú, valamilyen $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ komplex értékû együttható sorzattal. A (2.1.16) momentum-kumuláns formula szerint az (a_1,a_2) pár momentum generáló sorára

$$\begin{aligned}&[coef\,(i\,(1)\,,i\,(2)\,,\ldots,i\,(m))]\left(M_{(a_1,a_2)}\right)\\ =\ &\sum_{\pi\in NC(k)}\prod_{V\in\pi}[coef\,(\,i\,(1)\,,i\,(2)\,,\ldots,i\,(m)|\,V)]\left(R_{(a_1,a_2)}\right)\end{aligned}$$

teljesül, $m\geq 1$ és tetszõleges $i:N\rightarrow\{1,2\}$ függvény esetén. Mivel azonban az R-diagonális párok R-sora speciális alakú, a fenti összegzésben sok tag eltûnik. Figyelembevéve a (6.2) formulát, azt kapjuk, hogy

$$[coef\,(i\,(1)\,,i\,(2)\,,\ldots,i\,(m))]\left(M_{(a_1,a_2)}\right)=\sum_{\pi\in H_{i(1),i(2),\ldots,i(m)}}\prod_{V\in\pi}\alpha_{\frac{|V|}{2}}\tag{6.3}$$

$m\geq 1$ és tetszõleges $i:\mathbf{N}\rightarrow\{1,2\}$ függvény esetén, ahol $H_{i(1),i(2),\ldots,i(k)}$ jelentése a 6.5. definícióban megadott.

Amint azt a 2.1. alfejezetben említettük, a momentum-kumuláns formula invertálható, ami esetünkben azt jelenti, hogy ha egy (a_1,a_2) pár momentum generáló sora a (6.3) képlettel megadott alakú minden $m\geq 1$ és tetszõleges $i:\mathbf{N}\rightarrow\{1,2\}$ függvény esetén valamilyen $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ komplex értékû együttható sorzattal, akkor (a_1,a_2) R-diagonális pár az $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ együtthatókkal.

Legyen mostantól $a_1=b_1^n$, $a_2=b_2^n$, valamely rögzített $n\in\{2,3,4,\ldots\}$ esetén. ($n=1$ esetén a tétel állítása nyilvánvaló). Ekkor

$$\begin{aligned}&[coef\,(i\,(1)\,,i\,(2)\,,\ldots,i\,(m))]\left(M_{(a_1,a_2)}\right)=\varphi\left(a_{i(1)}a_{i(2)}\ldots a_{i(m)}\right)\\ =\ &\varphi\left(b_{i(1)}^nb_{i(2)}^n\ldots b_{i(m)}^n\right)\\ =\ &\varphi\left(b_{i(1)}b_{i(1)}\ldots b_{i(1)}b_{i(2)}b_{i(2)}\ldots b_{i(2)}\ldots b_{i(m)}b_{i(m)}\ldots b_{i(m)}\right)\\ =\ &\sum_{\pi\in H_{i(1),i(1),\ldots,i(1),i(2),i(2),\ldots,i(2),\ldots,i(m),i(m),\ldots,i(m)}}\prod_{V\in\pi}\alpha_{\frac{|V|}{2}} &\text{(i)}\\ =\ &\sum_{\nu\in{}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(m)}}\prod_{V\in\nu}1=\#_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(m)} &\text{(ii)}\\ =\ &\sum_{\pi\in H_{i(1),i(2),\ldots,i(m)}}\prod_{V\in\pi}{}_{(n-1)}c_{\frac{|V|}{2}}\ , &\text{(iii)}\end{aligned}$$

ahol ${}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(k)}$ jelentése a 6.5. definícióban megadott, a ${}_{(n-1)}c_{\frac{|V|}{2}}$ számok pedig az $(n-1)$ paraméterû általánosított Catalan-számok. Itt az elsõ egyenlõség a momentum generáló sor definíciójából következik, (i) annak a következménye, hogy (b_1,b_2) cirkuláris pár és így egyben persze R-diagonális pár is valamely $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ együtthatókkal, (ii) annak figyelembevételével kapható meg, hogy cirkuláris párok R-sorában csak azok az együtthatók nem tûnnek el, melyek az X_1X_2 vagy az X_1X_2

tagokhoz tartoznak, ezek értéke pedig éppen 1 (könnyen ellenõrízhetõ, hogy (i)-ben valóban csak azon tagoknak van járulékuk, melyek a ${}_{(n)}\tilde{H}_{i(1),i(2),\ldots,i(m)}$ halmaz partícióihoz kapcsolhatók, és ilyenkor a kapott járulék pont 1), míg (iii) a 6.7. Lemma következménye. Ezzel beláttuk, hogy a (b_1, b_2) pár momentum-generáló sorát (6.3) írja le minden $n = 2, 3, 4, \ldots$ mellett, $m \geq 1$ és tetszõleges $i : \mathbf{N} \to \{1, 2\}$ függvény esetén, a $\left\{{}_{(n-1)}c_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ együttható sorzattal. ■

A 6.4. tételbõl rögtön adódik az alábbi

6.8. Következmény. [**O4**] *Egy (A, φ) C^*-valószínûségi mezõ c cirkuláris elemét tekintve $(c^n, (c^*)^n)$ R-diagonális pár minden $n = 1, 2, 3, \ldots$ esetén.*

6.9. Megjegyzés. $n = 2$ esetén az α_k együtthatók értéke minden k-ra 1, azaz

$$R_{\left(b_1^2, b_2^2\right)}(X_1, X_2) = \sum_{k=1}^{\infty} (X_1 X_2)^k + \sum_{k=1}^{\infty} (X_2 X_1)^k .$$

$n = 3$ esetén $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ megegyezik a Catalan-számok $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozatával, azaz

$$R_{\left(b_1^3, b_2^3\right)}(X_1, X_2) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (X_1 X_2)^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (X_2 X_1)^k ,$$

ahol $c_k = {}_2c_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$.

6.10. Megjegyzés. A 6.4. tétel bizonyítása alapján az alábbi összefüggések adódnak tetszõleges (a_1, a_2) R-diagonális pár momentumaira.
(a) $\varphi\left(a_{i(1)} a_{i(2)} \ldots a_{i(m)}\right) = 0$, ha m páratlan,
(b) $\varphi\left(a_{i(1)} a_{i(2)} \ldots a_{i(m)}\right) = 0$, valahányszor

$$\#\{j \in \{1, 2, \ldots, m\} : i(j) = 1\} \neq \#\{j \in \{1, 2, \ldots, m\} : i(j) = 2\}, \quad \text{és}$$

(c) $\varphi\left(\bar{a}_{i(1)} \bar{a}_{i(2)} \ldots \bar{a}_{i(m)}\right) = \varphi\left(a_{i(1)} a_{i(2)} \ldots a_{i(m)}\right)$ $m \geq 1$ és tetszõleges $i : \mathbf{N} \to \{1, 2\}$, függvény esetén, ahol $\bar{a}_1 = a_2$ és $\bar{a}_2 = a_1$.

IRODALOMJEGYZÉK

[**Ak**] N.I. Akhiezer, *The Classical Moment Problems*, Oliver & Boyd, Edinburgh-London (1965).

[**An**] G.E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Addison-Wesley, Reading, (1976).

[**AI**] R. Askey and M. Ismail, *Recurrence relations, continued fractions and orthogonal polynomials*, Memoires Mathematical Society, Vol **49,** (1984).

[**AK1**] N.I. Akhiezer, M. Krein, Ueber Fouriersche Reihen beschränkter summierbarer Funktionen und ein neues Extremumproblem, Communications de la Société Mathématique de Kharkoff, 11 (4) (1935), 21-26.

[**AK2**] N.I. Akhiezer, M. Krein, *On certain problems in the theory moments,* Kharkhoff (1938).

[**Ar**] L. Arnold, On the asymptotyc distribution of the eigenvalues of random matrices, J. Math. Anal. Appl. **20** (1967), 262-268.

[**BV**] H. Bercovici and D. Voiculescu, Lévy-Hincin type theorems for multiplicative and additive free convolution, *Pacific J. Math.* **153** (1992), 217-248.

[**BR**] O. Bratteli, D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Stacistical Mechanics I,II*, Springer, New York, (1979, 1981).

[**Br**] E. Brézin, Dyson's universality in generalized ensembles of random matrices, in *The Mathematical Beauty of Physics,* J.M. Drouffe and J.B. Zuber (eds.), World Scientific, (1997).

[**Ch**] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, (1978).

[**F**] P.J. Forrester, *Log-potential systems in statistical and quantum physics*, to be published.

[**Fe**] W. Feller *An Introduction to Probability and Its Applications I*, John Wiley, (1957, 1968).

[**Fi**] E. Fischer, Ueber das Caratheodorysche Problem, Potenzeihen mit positivem reellen Teil betreffend, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **32** (1911), 240-256.

[**FK**] Z. Füredi and J Komlós, The eigenvalues of random symmetric matrices, *Combinatorics*, **1** (1981), 233-241.

[**HP**] F. Hiai, D. Petz, *The semi-circle law, free random variables and entropy*, to be published.

[**HiPe**] Peter Hilton, Jean Pedersen, *Catalan Numbers, Their Generalization, and Their Uses*, The Mathematical Intelligencer **13**, No. 2, (1991).

[**JSW**] P. Jørgensen, L. Schmitt, R. Werner, q-canonical commutation relations and stability of the Cuntz algebra, *Pac. J. Math.* **165**, (1991) 131-151.
[**Kr**] G. Kreweras, Sur les partitions non-croisées d'un cycle, *Discrete Math.* **1**, (1972), 333-350.
[**L**] László Lovász, Combinatorial problems and exercises, Akadémiai Kiadó Budapest, (1979).
[**LM**] H. van Leeuwen and H. Maassen, A q-deformation of the Gauss distribution, *J. Math. Phys.*, **36** (9) (1995), 4743-4756.
[**MP**] V.A. Marchenko and L.A. Pastur, The distribution of eigenvalues in certain sets of random matrices, *Math. Sb.* **72** (1967), 507-536.
[**MSz**] Móri F. Tamás és Székely J. Gábor (szerk.), Többváltozós statisztikai analízis, Mûszaki Könyvkiadó, Budapest (1986).
[**Me**] M.L. Mehta, *Random Matrices*, Academic Press, Boston, second edition, (1991).
[**N**] A. Nica, R-transform of free joint distributions and non-crossing partitions, *J. Funct. Anal.* **135**, (1996), 271-296.
[**NS1**] A. Nica and R. Speicher, On the multiplication of free N-tuples of noncommutative random variables, *Amer. J. Math.* **118** (1996), 799-837.
[**NS2**] A. Nica and R. Speicher, R-diagonal pairs - a common approach to Haar unitaries and circular elements, in Free Probability Theory, D.V. Voiculescu (ed.), *Fields Institute Communications* **12**, Amer. Math. Soc, (1997), 149-188.
[**O1**] Oravecz Ferenc, Partíciók, párpartíciók, *Polygon Matematikai Szakfolyóirat,* ***VIII/1*** (1998), 27-37.
[**O2**] F. Oravecz, The Marchenko-Pastur distribution as the limit distribution of some symmetric random matrices, *Annales Univ. Sci. Budapest*, közlésre elfogadva.
[**O3**] F. Oravecz, Symmetric partitions and pairings, *Colloquium Mathematicum*, elbírálás alatt.
[**O4**] F. Oravecz, On the powers of Voiculescu's circular elements, *Proceedings of the AMS*, elbírálás alatt.
[**O5**] F. Oravecz, The favoured solutions of the moment problem, elõkészületben.
[**OP**] F. Oravecz and D. Petz, On the eigenvalue distribution of some symmetric random matrices, *Acta sci. Math.* **63** (1997), 483-495.
[**Per**] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Teubner, Leipzig (1913).
[**R**] Ø. Ryan, On the limit distributions of random matrices with independent or free entries, preprint.
[**Ro**] G.-C. Rota, On the Foundations of Combinatorial Theory. I Theory of Möbius Functions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw.* Geb. **2** (1964), 340-368.
[**Sh**] A.N. Shiryayev, *Probability,* Springer, (1984).
[**Si**] R. Simon, Combinatorial statistics on non-crossing partitions, *J. Combinatorial Th.* A **66** (1994), 270-301.

[**Sp1**] R. Speicher, The lattice of admissible partitions, in *Quantum Probability and Related Topics* **VIII**, L. Accardi (ed.), Word Scientific, Singapore, (1993), 347-352.
[**Sp2**] R. Speicher, Multiplicative functions on the lattice of non-crossing partitions and free convolution, Math. Annalen **298**, (1994), 611-628.
[**Sp3**] R. Speicher, Combinatorial theory of the free product with amalgamation and operator-valued free probability theory, *Memoirs of Amer. Math. Soc* **627**, (1998).
[**ST**] J.A. Shohat and J.D. Tamarkin, *The problem of moments*, Math. Surveys No **1**, (1942).
[**TW**] C.A. Tracy and H. Widom, Introduction to random matrices, in Geometric and Quantum Aspects of Integrable Systems (Schweningen, 1992N, Lecture Notes in Physics **424,** Springer, (1993), 103-130.
[**V1**] D. Voiculescu, Symmetries of some reduced free product C^*-algebras, in *Operator Algebras and Their Connection with Topology and Ergodic Theory,* Lecture Notes in Math. **1132**, Springer (1985).
[**V2**] D. Voiculescu, Addition of non-commuting random variables, *J. Funct. Anal.* **66** (1986), 323-346.
[**V3**] D. Voiculescu, Multiplication of certain non-commuting random variables, *J. Operator Theory* **18** (1987), 223-235.
[**V4**] D. Voiculescu, Circular and semicircular systems and free product factors, in *Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras, and Invariant Theory,* A. Connes et al. (eds), Birkhäuser, (1990), 45-60.
[**V5**] D. Voiculescu, Limit laws for random matrices and free products, *Invent. Math.* **104**, (1991), 201-220.
[**VDN**] D.V. Voiculescu, K.J. Dykema and A. Nica, *Free Random Variables*, CRM Monograph Ser. **1**, Amer. Math. Soc, (1992).
[**Wa**] K.W. Wachter, The strong limits of random matrix spectra for sample matrices of independent elements, *Ann. Probab.* **6** (1978), 1-18.
[**Wi1**] E.P. Wigner, Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions, *Ann. of Math.* **62** (1955), 548-564.
[**Wi2**] E.P. Wigner, On the distribution of the roots of certain symmetric matrices, *Ann. of Math.* **67** (1958), 235-327.
[**Wi3**] E.P. Wigner, Random matrices in physics, *SIAM Reviw* **9** (1967), 1-23. 548-564.