

## Vizsgakérdések – Geometria

### A következőkre maghatározásokat, állításokat és bizonyításokat kérek:

- Vektorterek, bázisok, endomorfizmusok, izomorfizmusok
- Euklidészi vektortér, bilineáris formák, skalár szorzat,  $|\langle u, v \rangle| \leq |u| \cdot |v|$ , háromszög egyenlőtlenség, szögek
- Gram-Schmidt ortogonalizáció
- $O(n)$ ,  $SO(n)$ ,  $\det : O(n) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ ,

$$1 \rightarrow SO(n) \rightarrow O(n) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1$$

tükrözések szorzatára való felbontás.

- A kétdimenziós Euklidészi vektortér transzformáció csoportja, forgatások, tükrözések, ezek közti csoportműveletek.
- Euklidészi vektortér transzformáció csoportja, ortogonális mátrixok sajátértékei, karakterisztikus polinomjai, sajátterek merőlegessége,  $O(n)$  elemeinek sajátvektorok bázisában való felírása
- $O(3)$ ,  $SO(3)$ , (esetleg  $1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow S^3 \rightarrow SO(3) \rightarrow 1$ )
- Vektoriális szorzat az  $\mathbb{R}^3$ -ban. Tulajdonságok, determináns kapcsolat, Jacobi azonosság,
- $S^2$ -gömbi geometria, távolság, szög, lokális/globális incidenciák pontok és egyenesek közt,
- Gömbháromszög, poláris háromszög, koszinusz tétel oldalakra és szögekre, hasonlóság  $\equiv$  egybevágóság, szinusz tétel, háromszög egyenlőtlenségek változatai, háromszögterület és szögfelesleg, kör kerület és terület.
- Csoporthatások, homogén terek, affin terek, affin alterek, alterek struktúrája, metszete, párhuzamosság, hipersíkok,
- affin koordináták, affin burok, osztóviszony, Thálesz tétel 1,2,3; Ceva, Menelaosz,
- affin transzformációk, eltolások,  $0 \rightarrow (V, +) \rightarrow \text{Aff}(X) \rightarrow GL(V) \rightarrow 1$ , a következő mátrix-reprezentáció:

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Euklidészi affin tér, eltolások, tükrözések, transzformáció csoport,  $0 \rightarrow (V, +) \rightarrow \text{EuAff}(X) \rightarrow O(V, \langle, \rangle) \rightarrow 1$ , tükrözések szorzatára való felbontás; kollineációk.
- $SO(2)$  és  $O(2)$  véges részcsoportjai.
- Valós vektorterekbeli konvexitás, definíció, tulajdonságok, konvex kombináció, konvex burok és konvex kombinációkénti jellemzése,
- Carathéodory tétele,
- Radon tétele, Helly tételei (véges és végtelen változat),
- Hahn-Banach elválasztási tételek (3 eset: nyílt+affin altér, nyílt+valami, kompakt+zárt)
- Euler szám, kombinatorikus változat.

### Nem kötelező:

- Euler szám homológikus változat, a két Euler szám egyenlősége
- Homológia csoportok,
- Ha  $D$  a körlap, akkor az  $i : S^1 = \partial D \hookrightarrow D$  bentfoglalásnak nincs rektaktuma (nincs  $r : D \rightarrow \partial D$  folytonos leképezés amire  $r \circ i$  az identitás)
- Brouwer fix-ponttétel
- Fundamentális csoport, példák, az ‘Algebra főtétele’.