Ergodicitás és korreláció-lecsengés biliárdokban

című PhD értekezés összefoglalója

Tóth Imre Péter, 2005

Doktori munkám végső célja magas dimenziós ($d > 2$) szóró biliárdok korreláció-lecsengésének megértése volt.

A disszertáció kiinduló pontja a [2] munkánk, ami rávilágított, hogy Young módszerének elemei kiterjeszthetők a magas dimenziós esetre, kivéve az instabil sokaságok növekedési tulajdonságait, amiket Chernov emelt ki Young módszeréből és fogalmazott meg a $d > 2$ esetre.

Ezen növekedési tulajdonságok ellenőrzéséhez egy előfeltétel lehetett volna a szingularitási sokaságok görbületének korlátossága. Ezt a tulajdonságot Chernov és Sinai implicit módon feltételezte a lokális ergodicitási tétel – más nevén Alaptétel – nagyszerű bizonyításánál, és utána is elfogadta minden kutató. A disszertációm első eredménye tulajdonképpen negatív: *Magas dimenziós biliárdokan a szingularitási sokaság görbülete felrobban egy két-kodimenziós „patológia" közelében, ahol a sokaság nem is differenciálható.*

Ez a megfigyelés nem csak a növekedési tulajdonságok vizsgálatát nehezíti meg jelentősen, hanem rámutat egy kellemetlen hiányosságra is az Alaptétel minden korábbi bizonyításában. Fontos látni, hogy az Alaptétel nélkülözhetetlen kelléke a Boltzmann-Sinai Ergodikus Hipotézis bizonyításának kemény golyó rendszerekben, így a bizonyítás kijavítása elkerülhetetlen volt a továbblépéshez. Ez egyelőre csak részben sikerült. Ez a disszertáció második fő eredménye: *Az Alaptétel egy javított bizonyítását adjuk meg algebrai biliárdok esetére*, vagyis arra az esetre, amikor a szórótesteket algebrai egyenletek definiálják. Szerencsére ez az eredmény érvényes a legérdekesebb alkalmazásokra: kemény golyó rendszerekre, Lorentz folyamatokra és Bunimovich-Reháček stadionokra.

Szembesülve a patológiák kezelésének nehézségeivel a magas dimenziós biliárdokban, meg lehet próbálni „megkerülni" a problémát egy másik általánosítás, a puha biliárdok vizsgálatával. Van remény, hogy léteznek ergodikus puha biliárdok magas dimenzióban, amikben a patológikus viselkedés nem jelenik meg, így az exponenciális korreláció-lecsengés bizonyítása sokkal könnyebb lehet, mint hagyományos, „kemény" biliárdokban. Ebben az irányban az első lépés a 2-dimenziós puha biliárdok korreláció-lecsengésének megértése. Ez a disszertáció harmadik fő eredménye: *Exponenciális korreláció-lecsengést bizonyítunk 2-dimenziós puha biliárdok egy osztályára.*

A teljes disszertáció olyan eredményekre épül, amik megjelentek a [2], [1], [4] és [3] közleményekben. Tovább haladva a magas dimenziós korreláció-lecsengés irányába, az első lépés megtörtént: bizonyos magas dimenziós puha biliárdokra [5]-ben bebizonyítottuk a hiperbolicitást. Ez az eredmény azonban már nem része ennek a disszertációnak. A téma további vizsgálata folyamatban van.

[1] P. Bálint, N. I. Chernov, D. Szász and I. P. Tóth, *Multi-dimensional Semi-dispersing Billiards: Singularities and the Fundamental Theorem*, Annales Henri Poincaré **3** (2002) 451–482.

[2] P. Bálint, N. I. Chernov, D. Szász and I. P. Tóth, *Geometry of Multi-dimensional Dispersing Billiards*, Astérisque **286** (2003) 119–150.

[3] P. Bálint and I. P. Tóth, *Correlation decay in certain soft billiards*, Commun. Math. Phys. **243** (2003) 55–91.

[4] P. Bálint and I. P. Tóth, *Mixing and its rate in soft' and 'hard' billiards motivated by the Lorentz process*, Physica D **187** (2004) 128–135.

[5] P. Bálint and I. P. Tóth, *Hyperbolicity of multi-dimensional soft billiards*, submitted to Discrete and Cont. Dyn. Syst.