Ergodicitás és korreláció-lecsengés biliárdokban

című PhD értekezés tézisei

Tóth Imre Péter

Matematika Intézet, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Témavezető: Szász Domokos

2005

Az alábbi fejezetekben az „Ergodicitás és korreláció-lecsengés biliárdokban” című PhD értekezést foglaljuk össze. Egy rövid bevezetés után ismertetjük a disszertációban tárgyalt modelleket, majd közöljük a főbb eredményeket. Végül egy pillantást vetünk a téma jövőbeli kutatásának némely tervezett irányára.

1. Bevezetés

A dinamikai rendszerek részletes viselkedése, nagy általánosságban, túl bonyolult a tanulmányozáshoz. Gyakran hasznosabb is inkább az aszimptotikus viselkedés vizsgálata. Ilyenkor elsődleges kérdés, hogy a rendszer ergodikus-e, ami a káoszelmélet egy alapvető fogalma. Ha ez a helyzet, a fizikusokat kvantitatív, mérhető tulajdonságok kezdik érdekelni, mint a korreláció-lecsengés (a relaxáció) sebessége, és valószínűségszámítási határeloszlástételek.

A biliárd olyan dinamikai rendszer, ami egy pontszerű részecske mozgását írja le egy Q dobozban, aminek az alakja bonyolult lehet. A mozgás a dobozon belül szabad repülés, a doboz határain pedig rugalmas visszapattanás. Számos biliárdra – mind félig szóróra és szóróra (ú.n. Sinai biliárdra) – ami szoros kapcsolatban áll a kemény golyó rendszerekkel, az ideális gáz egy modelljével – jellemző tulajdonság a hiperbolicitás, ami a kulcsjelenség az ergodicitásuk mögött. Ezek vizsgálata az érdeklődés középpontjában van legalább 1963 óta, amikor Sinai közzétette a Boltzmann féle ergodikus hipotézis később róla elnevezett változatát [17]. A legtöbb vizsgálatnál a szóró biliárdok a „könnyebb” eset. Itt a kiinduló pontunk Lai-Sang Young [19] nevezetes módszere, ami exponenciális korreláció-lecsengés bizonyítását tette lehetővé a 2-dimenziós esetben. Munkám célja a korreláció-lecsengés megértése volt a magas dimenziós ($d > 2$) szóró biliárdokra, ami a figyelem központjában van Young munkájának megjelenése óta.

A disszertáció kiinduló pontja a Bálint Péterrel, Nikolai Chernovval és Szász Domokossal közösen végzett munkánk [2], ami rávilágított, hogy Young módszerének elemei kiterjeszthetők a magas dimenziós esetre, kivéve az instabil sokaságok növekedési tulajdonságait, amiket Chernov emelt ki Young módszeréből és fogalmazott meg a $d > 2$ esetre.

Ezen növekedési tulajdonságok ellenőrzéséhez egy előfeltétel lehetett volna a szingularitási sokaságok görbületének korlátossága. Ezt a tulajdonságot Chernov és Sinai implicit módon feltételezte a lokális ergodicitási tétel – más nevén Alaptétel – nagyszerű bizonyításánál, és utána is elfogadta minden kutató. A disszertációm első eredménye tulajdonképpen negatív: *Magas dimenziós biliárdokan a szingularitási sokaság görbülete felrobban egy két-kodimenziós „patológia" közelében, ahol a sokaság nem is differenciálható.*

Ez a megfigyelés nem csak a növekedési tulajdonságok vizsgálatát nehezíti meg jelentősen, hanem rámutat egy kellemetlen hiányosságra is az Alaptétel minden korábbi bizonyításában. Fontos látni, hogy az Alaptétel nélkülözhetetlen kelléke a Boltzmann-Sinai Ergodikus Hipotézis bizonyításának kemény golyó rendszerekben, így a bizonyítás kijavítása elkerülhetetlen volt a továbblépéshez. Ez egyelőre csak részben sikerült. Ez a disszertáció második fő eredménye: *Az Alaptétel egy javított bizonyítását adjuk meg algebrai biliárdok esetére*, vagyis arra az esetre, amikor a szórótesteket algebrai egyenletek definiálják. Szerencsére ez az eredmény érvényes a legérdekesebb alkalmazásokra: kemény golyó rendszerekre, Lorentz folyamatokra és Bunimovich-Reháček stadionokra.

Szembesülve a patológiák kezelésének nehézségeivel a magas dimenziós biliárdokban, meg lehet próbálni „megkerülni" a problémát egy másik általánosítás, a puha biliárdok vizsgálatával. Van remény, hogy léteznek ergodikus puha biliárdok magas dimenzióban, amikben a patológikus viselkedés nem jelenik meg, így az exponenciális korreláció-lecsengés bizonyítása sokkal könnyebb lehet, mint hagyományos, „kemény" biliárdokban. Ebben az irányban az első lépés a 2-dimenziós puha biliárdok korreláció-lecsengésének megértése. Ez a disszertáció harmadik fő eredménye: *Exponenciális korreláció-lecsengést bizonyítunk* 2*-dimenziós puha biliárdok egy osztályára.*

A teljes disszertáció olyan eredményekre épül, amik megjelentek a [2], [1], [4] és [3] közleményekben. Tovább haladva a magas dimenziós korreláció-lecsengés irányába, az első lépés megtörtént: bizonyos magas dimenziós puha biliárdokra [5]-ben bebizonyítottuk a hiperbolicitást. Ez az eredmény azonban már nem része ennek a disszertációnak. A téma további vizsgálata folyamatban van.

Dinamikai rendszerekben számos fogalom létezik a „kaotikus" vagy „statisztikus" viselkedés különböző formáinak leírására. Ebben a disszertációban elsősorban kettővel foglalkozunk, az *ergodicitás*sal és az *exponenciális korreláció-lecsengés*sel (EDC). Egy harmadik fogalmat, a *hiperbolicitás*t gyakran használjuk mint eszközt, és egy negyediket, a *centrális határeloszlás tétel*t (CHT) mellékeredményként kapjuk az EDC-vel.

A jobb megértés kedvéért megadjuk ezen fogalmak általunk használt definícióját:

1. definíció. *Az (M, T, μ) dinamikai randszer ergodikus, ha minden μ-mérhető T-invariáns $A \subset M$ halmazra $\mu(A) = 1$ vagy $\mu(A) = 0$.*

Az (M, T, μ) dinamikai randszer ergodikus komponensei az M T-invariáns μ-mérhető részhalmazai σ-algebrájának atomjai. (M, T, μ) nyilvánvalóan akkor és csak akkor ergodikus, ha van egy 1 *mértékű ergodikus komponense.*

2. definíció. *(M, T, μ)-ben exponenciális a korreláció-lecsengés, ha bármely két Hölder-folytonos $f, g : M \to \mathbb{R}$ függvényre létezik olyan $C < \infty$ és $a > 0$ konstans, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re*

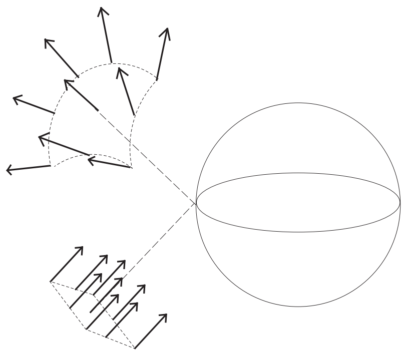
$$\left| \int_M f(x) g(T^n x) d\mu(x) - \int_M f(x) d\mu(x) \int_M g(T^n x) d\mu(x) \right| \leq C e^{-an}.$$

3. definíció. *(M, T, μ)-re érvényes a centrális határeloszlás tétel (CHT), ha bármely $\eta >$ 0-hoz és bármely Hölder-folytonos $f : M \to \mathbb{R}$ függvényhez, amelyre $\int f \, d\mu = 0$, létezik egy $\sigma_f \geq 0$, hogy*

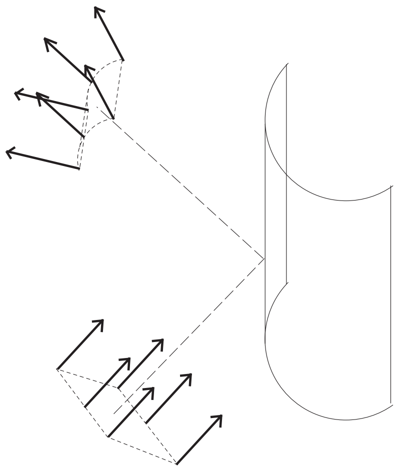
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i \xrightarrow{\text{distr}} \mathcal{N}(0, \sigma_f)$$

ahol $\mathcal{N}(0, \sigma_f)$ a σ_f szórású normális eloszlás.

Az 1. ábra mutatja a biliárdok azon vonását, ami a kaotikus viselkedés kulcsa. Ez a „szórási" mechanizmus, ami (bizonyos) közeli trajektóriák egymástól való eltávolodását eredményezi. Két jól megkülönböztethető esetet mutatunk be. Az egyik egy *szóró* biliárd, amiben a szórótestek szigorúan konvexek, így a párhuzamos trajektóriák minden irányban eltérülnek (egymástól) egyetlen ütközés során. A másik példa csak *félig szóró*: a szórótestek nem szigorúan konvexek, ami „kevésbé hatékony" szóráshoz vezet.



(a) szóró



(b) félig szóró

1. ábra. szórás szóró és félig szóró biliárdokban

1.1. Történeti áttekintés

A biliárdok matematikai vizsgálata több mint harminc éve kezdődött. 1970-es korszakalkotó cikkében [18] Ya. Sinai leírta a biliárdok első nagy csoportját, ami igazán kaotikus viselkedést mutat – nem nulla Lyapunov exponensekkel és pozitív entrópiával, ergodikus, keverő és (mint azt később G. Gallavotti és D. Ornstein [12] felfedezték) rendelkezik a Bernoulli tulajdonsággal. A Sinai biliárdok két dimenziósak , azaz a részecskét tartalmazó doboz $Q \subset \mathbb{R}^2$ vagy $Q \subset \mathbb{T}^2$, és Q határa konkáv (vagyis kívülről nézve konvex), hasonlóan a Lorentz folyamathoz (ahol a szórótestek konvexek). A konkávitás miatt a doboz határa, ∂Q szétszórja a rá eső geodetikus-nyalábot, ahogy az 1. ábrán látható. Ezért a Sinai-biliárdokat *szóró*nak nevezzük.

A két-dimenziós Lorentz-folyamatokat körültekintően tanulmányozták 1970 óta. Számos finom ergodikus és statisztikus tulajdonságot láttak be a kutatók, köztük P. Bleher,

L. Bunimovich, N. Chernov, J. Conze, C. Dettmann, G. Gallavotti, Krámli A., J. Lebowitz, D. Ornstein, K. Schmidt, Simányi N., Ya. Sinai, Szász D. és mások. A legújabb fő eredményt, az exponenciális korreláció-lecsengés bizonyítását L.-S. Young [19] érte el. Ezen kutatások sikerének jelentős hatása volt a modern statisztikus fizikára. Az eredetileg a síkbeli Lorentz-folyamatra kidolgozott eszközöket sok más fizikai modell-családra is alkalmazták – lásd a közelmúlt áttekintő műveit Cohen, Gallavotti, Ruelle és Young tollából [11, 15, 20].

Másfelől a magas dimenziós Lorentz-folyamat vizsgálata sokkal lassabban, és némileg vitatott módon haladt. Viszonylag kevés közlemény jelent meg kifejezetten a $d > 2$ esetről, különösen a két dimenzióval foglalkozó cikkek nagy számhoz képest. Ráadásul az érvelések többnyire elég vázlatosak voltak, mint pl. Chernov [7] művében. Általában feltételezték, hogy a magas dimenziós Lorentz-folyamat geometriai tulajdonságai lényegében hasolóak a 2-D esethez, így a fő eszközök kis áldozattal átvihetők a kettőről bármely dimenzióra. Így a szerzők ritkán dolgozták ki a részleteket.

Újabb felfedezések azt mutatták, hogy a térbeli szóró biliárdok *nagyon* mások, mint a síkbeliek. A Bunimovich és Reháček által végzett *asztigmatizmus* vizsgálatok – a némileg különböző fókuszáló biliárdok vonatkozásában – kihangsúlyozták a szerepét annak az ismert ténynek, hogy kezdetben párhuzamos biliárd-trajektóriák nagyon gyorsan fókuszálódhatnak egy síkban, míg nagyon lassan az erre merőleges síkokban. Az asztigmatizmus a 3 (és magasabb) dimenziós biliárdok sajátja, a síkban nem fordulhat elő.

A puha biliárdok története egyidős a keményekével. Számos más kutató munkáját követően Donnay és Liverani [10] bebizonyította bizonyos 2 dimenziós rendszerek ergodicitását, közel szükséges feltételek mellett. Ezen rendszerek egy részére az exponenciális korreláció-lecsengést ebben a diszzertációban tárgyaljuk. A magas dimenziós esetre, tudomásom szerint, az első eredmény a hiperbolicitás bizonyítása [5]-ben, ami még nem jelent meg.

2. A vizsgált modellek

2.1. A kemény biliárd rendszer

A biliárd egy dinamikai rendszer, ami egy pontszerű részecske mozgását írja le egy összefüggő, kompakt $Q \subset \mathbb{T}^d$ tartományban. A tartomány ∂Q határáról általában feltesszük, hogy szakaszonként C^3-sima. Q belsejében a mozgás egyenes vonalú egyenletes, míg a visszapattanás a határon rugalmas. A sebesség nagysága a mozgásnak első integrálja, értékét 1-nek rögzítjük. Így a biliárd folyam fázistere a lehetséges konfigurációs pontok Q halmaza, ahol minden pont el van látva a lehetséges sebesség vektorokkal. A lehetséges sebesség-vektorok halmaza többnyire $\mathbf{S}^{d-1}$, de ∂Q pontjaiban, ahol pillanatszerű ütközés történik, csak egy félgömb – a bejövő és kimenő sebességeket azonosítjuk, hogy a részecske állapota minden pillanatban egyértelműen definiált legyen. Így a fázistér $\mathcal{M} = Q \times \mathbf{S}^{d-1}/\sim$, ahol $\sim$ a fenti, bejövő és kimenő sebességeket azonosító ekvivanelcia-reláció. Ennek ellenére egy x fázispontot $x = (q, v)$-ként fogunk jelölni, ahol $q \in Q$ és $v \in \mathbb{R}^d$, $|v| = 1$. Az S^t dinamika az a $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ függvény, amely megadja, mely $S^t(x)$ állapotban lesz a részecske a t időben, ha a nulla időben x-ben van. Erre a rendszerre a szokásos invariáns mérték a μ_0 Liouville (valószínűségi) mérték $\mathcal{M}$-en, ami lényegében a Lebesgue mértékek szorzata, vagyis $d\mu_0 = \text{const.} d\mathcal{L}_0 d\mathcal{H}$ ahol $\mathcal{L}_0$ a Lebesgue mérték Q-n és $\mathcal{H}$ a Riemann mérték $\mathbf{S}^{d-1}$-en.

4. definíció. *A kapott* $(\mathcal{M}, \{S^t, t \in \mathbb{R}\}, \mu_0)$ *dinamikai rendszer a biliárd folyam.*

A folyam helyett gyakran tekintjük a rendszer diszkrét idejű változatát úgy, hogy csak ütközési pillanatokat nézünk. Más szóval, a ∂Q határ egy természetes Poincaré szelést definiál a folyamra. Nevezetesen, legyen

$$M = \{(q, v) \in \mathcal{M} \mid q \in \partial Q\}.$$

$n(q)$-val fogjuk jelölni ∂Q-nak a Q-ba befelé mutató egység-normálisát q-ban. φ-vel jelöljük az ütközési szöget, ami $n(q)$-nak a kimenő v sebességgel bezárt szöge, tehát $\cos\varphi = \langle v, n(q)\rangle$. Ha $d = 2$, kényelmes lesz φ-t előjeles szögként kezelni, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Mindig kimenő sebességekkel dolgozunk, így

$$M = \{(q, v) \in \mathcal{M} \mid q \in \partial Q,\ \langle n(q), v\rangle \geq 0\} = \partial Q \times \mathbf{S}_+^{d-1},$$

ahol a $+$ jelöli, hogy csak a kimenő sebességek félgömbjét vesszük figyelembe.

A diszkrét idejű dinamika, T, az M-be való első visszatérés leképezése lesz: bármely $x \in \mathcal{M}$-re legyen $t^+(x) := \inf\{t > 0 | \ S^t x \in M\}$ és $T^+ x := S^{t^+(x)} x$ (persze $T^+ : \mathcal{M} \to M$). A $T : M \to M$ Poincaré metszet dinamikát úgy definiáljuk, hogy $Tx := T^+ x$ minden $x \in M$-re.

Erre a dinamikára a természetes invariáns mérték, ami a folyam μ_0 invariáns mértékének „vetülete” M-re a dinamika által, most is abszolút folytonos a Lebesgue mértékek szorzatára:

$$d\mu = \text{const.}\langle n(q), v\rangle d\mathcal{L} d\mathcal{H} = \text{const.} \cos\varphi d\mathcal{L} d\mathcal{H},$$

ahol $\mathcal{L}$ a Riemann mérték ∂Q-n és $\mathcal{H}$ még mindig a Riemann mérték $\mathbf{S}^{d-1}$-en.

5. definíció. *A kapott* (M, T, μ) *diszkrét idejű dinamikai rendszer a biliárd leképezés.*

Félig szóró biliárdokkal fogunk dolgozni, ami azt jelenti, hogy ∂Q sima komponensei konvexek (Q-n kívülről nézve). Ha ezek a komponensek szigorúan konvexek, a biliárd szóró. Más szóval:

6. definíció. *Egy biliárd félig szóró, ha* ∂Q *egy sima komponensének bármely* q *pontjában* ∂Q *görbületi operátora (avagy második alapformája) – ami nem más, mint az* $n(q)$ *függvény derivált operátora – pozitív szemidefinit. Ha ez az operátor minden* $q \in \partial Q$*-ra pozitív definit, a biliárd szóró.*

A „szóró” elnevezés abból az effektusból ered, hogy ∂Q-t közeli pontokban, párhuzamos sebességgel elérő részecskéket az ütközés eltérít egymástól – egy sík frontot az ütközés „szór” (lásd az 1. ábrát). Egy félig szóró biliárdban az ütközés a sík frontokat bizonyos irányokban szórja. Az ilyen esetekben Q komplementerének komponenseit „szórótesteknek” nevezzük.

2.1.1. Frontok

A hiperbolicitás leírásában legfontosabb eszközeink a lokális ortogonális sokaságok, vagy röviden *frontok*. A frontokat nem a Poincaré metszetben, hanem a folyam fázisterében definiáljuk.

7. definíció. *Vegyünk a Q teljes konfigurációs térnek egy sima 1-kodimenziós E részsokaságát, és lássuk el minden q pontjában a $v(q)$ egység-normálissal mint sebességgel, folytonosan. Következésképp a sebesség minden pontban az E részsokaság ugyanazon oldalára mutat. A*

$$\Sigma = \{(q, v(q)) \mid q \in E\} \subset \mathcal{M}, \tag{1}$$

halmazt, ahol $v : E \to \mathbf{S}^{d-1}$ folytonos (sima) és $v \perp E$ E-nek minden pontjában, frontnak nevezzük.

Ennek a v függvénynek a deriváltja, amit B-vel jelölünk, központi szerepet játszik: $dv = Bdq$, ha (dq, dv) *a frontnak* érintővektora. B az E érintőterén, $\mathcal{T}_qE$-n hat, és értékeit a sebesség-gömb $\mathcal{J} = \mathcal{T}_{v(q)}\mathbf{S}^{d-1}$ érintőteréből veszi fel. Ez mindkettő természetesen be van ágyazva a Q konfigurációs térbe, és ezen a beágyazáson keresztül azonosíthatók. Így írhatjuk egyszerűen, hogy $B : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$. B nem egyéb, mint az E részsokaság görbületi operátora. Mi mégis második alapformának (SFF) fogjuk nevezni, hogy elkerüljük az összetévesztését más görbületekkel, amiket tárgyalni fogunk. B nyilván szimmetrikus.

8. definíció. *Egy front konvex, ha az SFF-je, B pozitív szemidefinit. Egy front szigorúan konvex, ha az SFF-je, B pozitív definit.*

Biliárdokban a frontok az időfejlődés során frontok maradnak – legalábbis lokálisan, és bizonyos szingularitásoktól eltekintve.

2.1.2. Hiperbolicitás

A hiperbolicitás a legtöbb biliárd kulcs-tulajdonsága, amit erősen kihasználnak más, erős statisztikus viselkedést jelentő tulajdonságok bizonyításában. Általában a hiperbolicitás azt jelenti, hogy egyik Lyapunov exponens sem nulla. [1] Hamilton rendszerekben (köztük a biliárdokban is) ez azt jelenti, hogy a fázistér minden pontjában az érintőtér felbontható két azonos dimenziójú altérre úgy, hogy az egyiken (az *instabil* altéren) a dinamika tágító, míg a másikon (a *stabil* altéren) összehúzó. Mégis, biliárdokban a hiperbolicitás mindig kötődik az instabilitás geometriai képéhez: az instabil altér valamilyen szigorúan konvex frontnak felel meg – ilyenre példa az 1. ábra (szóró eset) kimenő frontja. Egy ilyen frontot alkotó fázispontok eltávolodnak egymástól, ami megfelel a tágításnak az instabil irányban. Félig szóró biliárdokban a konvex frontok konvexek maradnak az időfejlődés során, igy a tágítás tartós. Más példákban, köztük fókuszáló biliárdokban (pl. a híres Bunimovich stadionban) és puha biliárdokban a mechanizmus bonyolultabb, de a lényeg ugyanaz: konvex frontok konvexek maradnak. A későbbiekben szükségünk lesz a következő, hiperbolicitással kapcsolatos fogalomra (amit most az egyszerűség kedvéért a folyamra definiálunk):

9. definíció. *Egy x pontnak a 0-tól b ideig terjedő trajektória-darabját elégségesnek nevezzük, ha egy x-beli sík front egy $S^b(x)$-beli szigorúan konvex fronttá fejlődik (b idő alatt). Egy x fázispontot akkor nevezünk elégségesnek, ha a teljes trajektóriája tartalmaz egy véges elégséges trajektória-darabot.*

[1] A biliárd folyam esetében egy Lyaponov exponens – ami a folyam iránynak felel meg – szükségszerűen nulla. A hiperbolicitás itt azt jelenti, hogy az összes *többi* nem nulla.

2.1.3. Szingularitások

Tekintsük az érintő ütközések halmazát, azaz legyen

$$\mathcal{S}_0 := \{(q,v) \in M \mid \langle v, n(q)\rangle = 0\} = \partial M.$$

Könnyű látni, hogy a T leképezés nem folytonos a $T^{-1}\mathcal{S}_0$ halmazon. $\mathcal{S}_0$ további ősképei,

$$\mathcal{S}_k := T^{-k}\mathcal{S}_0 \quad (k > 0),$$

az úgynevezett „magasabb rendű” szingularitások. Egy magasabb iterált, T^n szingularitási halmaza (ahol ő nem folytonos),

$$\mathcal{S}^{(n)} = \cup_{i=1}^{n}\mathcal{S}_i. \tag{2}$$

Ami még rosszabb, a dinamika deriváltja felrobban ezen szingularitások közelében. A magas dimenziós ($d > 2$) esetben mindennek tetejébe megjelenik egy nagy anizotrópia: a tágítás felrobban egy irányban, miközben eltűnik a másikban (mindkettő az instabil altérben). Ez a lelke az összefoglaló 3.1 fejezetében tárgyalt jelenségnek.

Az irodalomban általában feltételezték, hogy az $\mathcal{S}^{(n)}$ halmaz az M Poincaré fázistér sima és kompakt részsokaságainak véges uniója. Ennek ellenére magas dimenziós félig szóró biliárdokban ezek a sokaságok csak topológiai értelemben tekinthetők M részsokaságainak. Ezért ezeket a halmazokat úgy tekintjük, mint topológiailag beágyazott egy kodimenziós peremes sokaságokat. A belsejükben sima sokaság struktúrájuk van, de a peremüknél szabálytalanul viselkednek (a görbület divergál).

A fentiekben a szingularitásokat a T diszkrét idejű dinamikára vezettük be. A folyam szingularitásai hasonlóan definiálhatók.

2.2. A puha biliárd rendszer

Tekintsük egy pontszerű részecske mozgását kerek szórótestek síkbeli, periódikus rácsában. Számos fizikailag érdekes dinamikai rendszer van, ami ehhez az elrendezéshez kapcsolódik. Ezek mindegyikében egyenes vonalú egyenletes a mozgás a szórótesteken kívül. Ha a részecske a körökről a rugalmas ütközés szabályai szerint pattan vissza (a beesési és a visszaverődési szög megegyezik), a *kemény Lorentz folyamat*ról beszélünk.

Most a következő természetes módosítást vizsgáljuk: Tekintsünk véges sok diszjunkt R sugarú kört a $\mathbb{T}^2$ kétdimenziós lapos egység-tóruszon. (Nem lenne nagyon más, ha az $\mathbb{R}^2$ euklideszi téren tekintenénk kerek szórótestek periodikus elrendezését.) Előírjuk, hogy az elrendezés véges horizontú legyen: létezzen egy $\tau_{\max}$ konstans, hogy egy ennél hosszabb trajektória-darab bisztosan metsz legalább egy szórótestet.

A pontszerű részecske végezzen hamiltoni mozgást egy olyan potenciálban, ami azonosan nulla kívül, és valami forgásszimmetrikus $V(r)$ függvény a körökön belül. (Itt r a szórótest középpontjától való távolságot jelöli.) A tömeget és a teljes energiát rögzítjük,

$$m = 1, \qquad E = \frac{1}{2}.$$

Így a szabad repülés sebessége egységnyi, $|v| = 1$.

Tudjuk, hogy a (később bevezetendő) feltevéseink eredményeképpen a fenti energia szintfelületre megszorított Hamilton rendszer ergodikus a Liouville mértékre nézve (lásd 23. megjegyzés). Célunk *a keverési sebesség vizsgálata.* A kimenő sebsségek M Poincaré szelésével dolgozunk.

s jelölje az ívhossz paramétert a szórótest kerülete mentén (egy tetszőleges rögzített pontból indulva), ami a kimenő részecske helyét adja meg.

φ jelölje az ütközési szöget, amit a kimenő sebesség és a szórótest s beli normálvektora zár be. Látható, hogy $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

A pozíció ekvivalens leírására használható egy másik szög-paraméter, $\Theta \in [0, 2\pi]$, amelyre $s = R\Theta$ (R a szórótest sugara).

A T dinamika az M-be való első visszatérés leképezés. M-en a Lebesgue mértéket m-mel jelöljük.

Jelöljük μ-vel a természetes invariáns valószínűségi mértéket M-en. Ez a μ abszolút folytonos m-re, és a sűrűségfüggvényét az alábbi egyenlet adja:

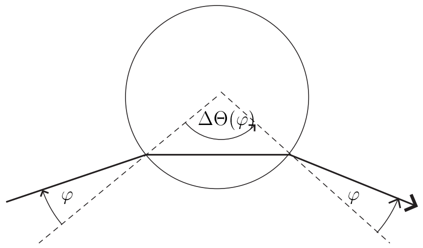
$$d\mu = \text{ const. } \cos(\varphi)\, dm = \text{ const. } \cos(\varphi)\, ds\, d\varphi. \tag{3}$$

10. definíció. *Az (M, T, μ) dinamikai rendszer a puha biliárd leképezés.*

A T első visszatérés függvény jellemzéséhez a mozgást két részre bontjuk: szabad repülésre a szórótestek között, illetve a szórótest potenciáljában való repülésre. A szabad repülés a biliárd esetével teljesen analóg módon kezelhető. A részecske elhagyja az egyik szórótestet az s_0 pontban φ_0 sebességgel, és elér egy másik szórótestet egy s-sel (vagy, ami ezzel ekvivalens, Θ-val) jellemzett pontban, egységnyi sebességgel, ami φ szöget zár be az $n(s)$ normálvektorral a beesési pontban. Valamennyi potenciál-beli mozgás után a részecske elhagyja a szórótestet egy $s_1 (= R\Theta_1)$ pontban, egy φ_1-gyel jellemzett sebességgel. Szimmetria okokból $\varphi_1 = \varphi$, így az egyetlen nemtriviális mennyiség a $\Delta\Theta = \Theta_1 - \Theta$ különbség. Ugyancsak szimmetria okokból következik, hogy $\Delta\Theta$ csak a φ szögtől függ.

A potenciálnak a T leképezésben játszott szerepét teljesen meghatározza a $\Delta\Theta(\varphi)$ függvény.

11. definíció. *A $\Delta\Theta(\varphi)$ függvényt* ***forgatási függvény****nek nevezzük.*



2. ábra. a forgatási függvény jelentése

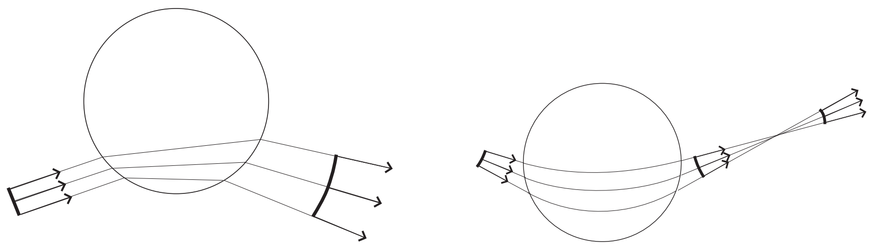
Mivel T-nek elsősorban a deriváltjaival dolgozunk, bevezetjük a következő jelölést:

$$\kappa(\varphi) = \frac{d\Delta\Theta(\varphi)}{d\varphi}.$$

2.2.1. A hiperbolicitás mechanizmusai

2 dimenziós puha biliárdokra [10] két lehetséges hiperbolicitási mechanizmust mutatott meg.

Szóró eset. Tegyük fel, hogy $\kappa < -2$ vagy $\kappa \geq 0$ minden φ-re. Ekkor a puha biliárd ergodikus és hiperbolikus. A hiperbolicitás, csak úgy, mint a kemény esetben, konvex frontokhoz köthető. Konvex bejövő frontokból (vagyis amik éppen elérik a potenciált) konvex kimenő frontok lesznek (amikor elhagyják a potenciált). Lásd a 3. ábrát.



(a) szóró eset

(b) defókuszáló eset

3. ábra. a hierbolicitás mechanizmusai

Defókuszáló eset. Tegyük fel, hogy létezik egy $\delta > 0$, hogy $0 \geq \kappa > -2 + \delta$. Ezen felül az elrendezés legyen olyan, hogy a két szórótest közötti szabad repülés úthosszára van egy $t_{\min}$ alsó korlát, melyre teljesül hogy $t_{\min} > \frac{2R(2-\delta)}{\delta}$. Ekkor a puha biliárd ergodikus és hiperbolikus. Ám a hiperbolicitás mechanizmusa most más, mint a szóró esetben. Konvex bejövő frontok fejlődhetnek konkáv kimenő frontokká. Ezek a konkáv frontok, mivel van elég idejük a következő szórótest eléréséig, defókuszálódnak és ismét konvexszé válnak a szabad repülés során. Így, amikor ismét elérnek egy szórótestet, már újra konvexek. Lásd a 3. ábrát.

3. Eredmények

3.1. A szingularitások geometriája magas dimenziós szóró biliárdokban

Számos megjelent közleményben feltételezték – kimondva vagy kimondatlanul – hogy a szingularitások a fázistér 1-kodimenziós sima részsokaságaiból állnak. Gyakran még egy egyenletes, a szingularitás rendjétől független görbületi korlátot is feltételeztek. Ezekre a feltevésekre a szingularitások környezetei mértékének becsléséhez volt szükség. Ilyen egyenletes korlát valóban létezik 2-dimenziós biliárdokban, ám nem létezik magasabb dimenzióban, amint azt a következő tétel – mely egy, a disszertációban található ellenpéldára épül – mutatja:

12. tétel. ***Általában magas dimenziós szóró biliárdokban $\mathcal{S}_2$ görbülete nem korlátos. Az egység normálvektor nem folytonosan differenciálható függvénye az alappontjának.***

Néhány finomabb tulajdonság (mint ergodicitás és korreláció-lecsengés) szigorú bizonyításához magas dimenziós szóró biliárdokban elkerülhetetlennek látszik a szingularitások szisztematikus jellemzése. Ennek a jellemzésnek egy része – ami elegendő a lokális ergodicitás bizonyításához – megtalálható ebben a disszertációban, lásd a tézisfüzet 3.2 fejezetét. A következőkben nem adunk szigorú bizonyításokat; csak rámutatunk néhány analógiára, és hangsúlyozzuk néhány érdekes vonását a szingularitások irregularitásának.

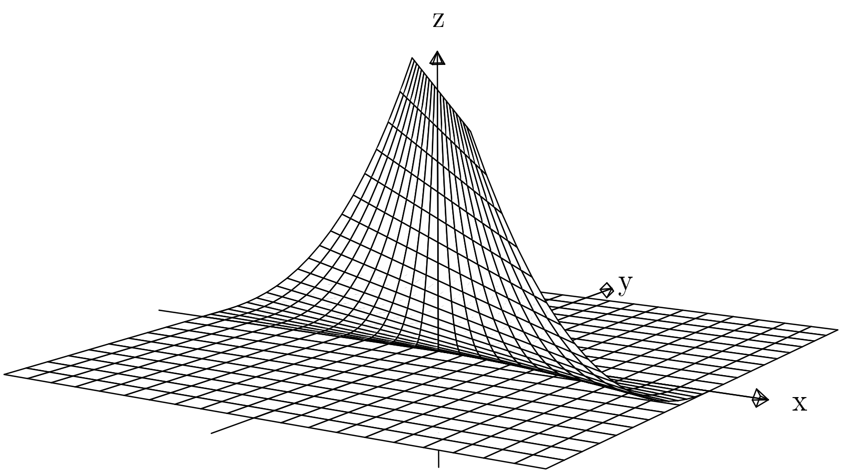
3.1.1. A Whitney esernyő

Tekintsük $\mathbb{R}^3$-ban az alábbi algebrai egyenlet által definiált egy-kodimenziós halmazt, a Whitney esernyőt:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 z = y^2\}.$$

Ennek a halmaznak „egyik fele" (az $\{xy \leq 0\}$ térnegyedekkel vett metszete) a 4. ábrán látható. Az egyszerűség kedvéért a W_2 jelölést használjuk erre a „fél esernyő"-re, és W_1-et a $\{z = 0\}$ síkra. Világos, hogy

- W_2 véget ér W_1-en (az x tengely pontjaiban), így $W_1 \cap W_2 = \partial W_2$.
- az x tengely minden pontjában, ahol $x \neq 0$, W_2 és W_1 találkozása érintő.
- W_2-nek sima sokaság struktúrája van a belsejében, ám az origó közelében a görbülete nem korlátos, mivel a normálvektor gyorsan változik (igazából a normálvektornak nincs is jól definiált határértéke az origóban).



4. ábra. a Whitney esernyő

Ezen tulajdonságokat tekintve az ellenpéldában tárgyalt szingularitások geometriája analóg a 4. ábrához. [2] W_1 megfelel $\mathcal{S}_1$-nek, W_2 $\mathcal{S}_2$-nek, míg az origó megfelel az olyan kétszeresen érintő érintő ütközések halmazának, ahol a két ütközési normális egymásra is merőleges. (ez a halmaz egy-kodimenziós $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$-ben).

3.2. Magas dimenziós félig szóró biliárdok alaptétele

Ezt a fejezetet a félig szóró biliárdok alaptételének – más szóval lokális ergodicitási tételének – szenteljük. A két dimenziós esetet rendezte Sinai nevezetes cikke [18]. Tizenhét év telt el amíg a Chernov és Sinai által alkotott magas dimenziós általánosítás [9] megjelent. Egy technikás, de lényegét tekintve igen átlátható megfogalmazását adta a tételnek, egy finom bizonyítással. Ezen gondolatoknak egy összefüggő tárgyalása és a feltételek

[2] Igazság szerint a 4. ábra eggyel kevesebb dimenziós – W_2-vel szemben a szingularitások 3 dimenziós sokaságok – de ennek az analógia szempontjából kicsi a jelentősége.

részletezése található [13]-ban, ahol egy kicsit általánosabb, az úgynevezett „transzverzális” változatát mondják ki az alaptételnek – leginkább a három dimenziós alkalmazásokat szem előtt tartva. Számos más cikk is megjelent a '90-es években a tétel szép tálalásával, még az eredeti félig szóró biliárdnál általánosabb dinamikai rendszerekre is (pl. szinguláris Hamilton rendszerekre [14]). Mégis, mindezen cikkben feltételezték, hogy a dinamika minden hatványára a szingularitási halmaz véges uniója egy-kodimenziós sima, kompakt részsokaságoknak. Mivel a 12. tétel szerint ez nem így van, alapvető fontosságúvá vált a feltevés kiváltása.

Először definiálnunk kell azt a regularitási tulajdonságot, ami a szingularitások simaságának helyébe lép. Ezt az ún. „Lipschitz felbonthatóság” tulajdonságot itt $\mathbb{R}^m$ részhalmazaira definiáljuk. Ez a definíció térképek útján átvihető Riemann sokaságok részhalmazaira.

13. definíció. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^m$ és $L \in \mathbb{R}$. H-t „Lipschitz felbontható” (egy-kodimenziós) részhalmaznak nevezzük L konstanssal, ha felbontható véges sok nyílt lokálisan Lipschitz grafikonra és egy kis maradék halmazra a következő módon: Létezik H^* és $H_1, ..., H_K$, hogy*

- $H \subset \bigcup_{i=1}^{K} \bar{H}_i \bigcup H^*$,
- $H_i \cap H_j = \emptyset$ *bármely $i \neq j$-re,*
- *minden H_i egy egy-kodimenziós nyílt lokálisan Lipschitz grafikon (L konstanssal) – azaz, ha megfelelő koordinátarendszerben nézzük, akkor egy nyílt halmazon értelmezett, lokálisan Lipschitz függvény grafikonja,*
- $(\bigcup_{i=1}^{K} \partial H_i) \cup H^*$ *több mint egy kodimenziós (bizonyos mértékelméleti értelemben).*

A H^* halmaz a felbontásban csak technikai okból szerepel.

A pontos tulajdonságot, amit a félig szóró biliárdok szingularitásaitól elvárunk, egy sejtés formájában fogalmazzuk meg:

14. sejtés. *Minden félig szóró biliárdban, ahol a horizont véges, létezik egy $L \in \mathbb{R}$, hogy minden N egészre a $\bigcup_{|n|\leq N} \mathcal{S}_n$ halmaz (a legfeljebb N-ed rendű szingularitások halmaza) „Lipschitz felbontható” L konstanssal.*

Érdemes megemlíteni, hogy „átlátszó falak” bevezetésével (lásd [9]) minden félig szóró biliárd visszavezethető egy véges horizontúra.

Ezen sejtés állítása szóról szóra fog megjelenni az Alaptétel módosított változatának feltételei között. A sejtést bebizonyítjuk a legfontosabb speciális esetre, amikor a szórótestek algebraiak.

A tétel kimondása előtt meg kell fogalmaznunk a feltételeket, amik mellett a módosított bizonyítás működik.

15. feltétel. *(Chernov-Sinai Ansatz, ami 3.1-es feltétel [13]-ban). Majdnem minden szinguláris x fázispontra igaz, hogy az x trajektóriája csak egyszer szinguláris, sőt a pozitív fél-trajektória elégséges.*

Most következik az új feltétel – a Lipschitz felbonthatóság – a szingularitásokra.

16. feltétel. *Létezik egy $L \in \mathbb{R}$, hogy minden $N \in \mathbb{N}$-re a $\bigcup_{|n| \le N} \mathcal{S}_n$ szingularitási halmaz „Lipschitz felbontható” L konstanssal. (vesd össze a 14. sejtéssel)*

Most már ki tudjuk mondani a fejezet fő eredményét:

17. tétel. ***(az Alaptétel) Tegyük fel, hogy a 15. és 16. feltétel teljesül és x egy elégséges fázispont. Ekkor létezik x-nek egy U környezete, hogy az U minden pontja ugyanabba az ergodikus komponensbe tartozik.***

Ezzel a tétellel az ergodicitás bizonyítása annak megmutatására egyszerűsödik, hogy sok elégséges fázispont van – ami nem témája ennek a disszertációnak.

3.2.1. Az algebrai szórótestek esete

A következő tételek azt mutatják, hogy algebrai félig szóró biliárdok szingularitásai eleget tesznek a 14. sejtésben megfogalmazott tulajdonságnak. Szerencsére a legfontosabb példák félig szóró biliárdra mind algebraiak. Így az algebraiság feltétele nem korlátozza lényegesen az alaptétel alkalmazhatóságát.

Az egyértelműség kedvéért rögzítjük, hogy *algebrai sokaságnak* nevezzük egy polinomiális egyenletekből álló rendszer megoldáshalmazát. Egy k-dimenziós algebrai sokaság bármely (mérhető) részhalmazát k-dimenziós ASRH-nak fogjuk nevezni (úgy mint „algebrai sokaság részhalmaza”). Az algebrai sokaságok dimenziójáról lásd [16]-et. Használni fogjuk a következő definíciót is:

18. definíció. *Egy biliárd algebrai, ha véges sok szórótestje van, és minden szórótest egy kodimenziós ASRH-knak (mint $\mathbb{T}^d \subset \mathbb{R}^d$ részhalmazainak) véges uniója.*

19. tétel. *Algebrai biliárdban $\mathcal{S}_n$ véges uniója egy-kodimenziós ASRH-knak $\mathbb{R}^{2d}$-ben.*

20. tétel. *Bármely egy-kodimenziós H algebrai sokaság Lipschitz felbontható (a 13. definíció értelmében) bármely $L > 0$ konstanssal.*

21. következmény. ***(Alaptétel algebrai félig szóró biliárdokra) Tegyük fel, hogy a 15. feltétel teljesül és a félig szóró biliárd algebrai. Legyen x egy elégséges fázispont. Ekkor létezik x-nek egy U környezete, hogy az U minden pontja ugyanabba az ergodikus komponensbe tartozik.***

3.3. Korreláció-lecsengés puha biliárdokban

Célunk most exponenciális korreláció-lecsengés bizonyítása bizonyos puha biliárdokban. Ezen eredmények alapján azt sejtjük, hogy a keverés exponenciális lényegében minden (véges horizontú) esetben, amire [10] hiperbolicitást és ergodicitást bizonyított. Mégis, ellentétben [10]-vel, nincs sok potenciál – igazából csak két család van – amire az exponenciális korreláció-lecsengést konkrétan meg tudjuk mutatni.

A konkrét példák kis számának oka, hogy meg kell érteni a „dinamika második deriváltját”. Ahhoz, hogy görbületi korlátot és disztorziós becslést kaphassunk – ami nélkülözhetetlen [8] és [19] módszerének alkalmazásához – meg kell vizsgálnunk $\kappa(\varphi)$ deriváltját.

Az alábbiakban két tulajdonságot definiálunk, amik segítségével a fő eredmény megfogalmazható.

22. definíció. *A puha biliárd rendelkezik a H tulajdonsággal (H mint „hiperbolicitás"), amennyiben*

1. *Létezik egy pozitív c konstans, hogy* $|2+\kappa(\varphi)| > c$ *miden* φ*-re;*

2. *A szórótestek elrendezése olyan, hogy bármely két kör távolsága legalább* $\tau_{\min}$*, ahol*

$$\tau_{\min} \gneqq \max_{\varphi}\left\{-2R\kappa(\varphi)\frac{\cos\varphi}{2+\kappa(\varphi)}\right\}.$$

23. megjegyzés. *Bár egy kissé másként fogalmazva, [10]-ben lényegében bebizonyították, hogy a H tulajdonsággal rendelkező puha biliárdok hiperbolikusak és ergodikusak.*

24. definíció. *A forgatási függvényt regulárisnak nevezzük, ha a következő állítások teljesülnek rá:*

1. $\Delta\Theta(\varphi)$ *szakaszonként* egyenletesen *Hölder folytonos. Azaz létezik olyan* $C < \infty$ *és* $\alpha > 0$ *konstans, továbbá* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *felbontható véges sok intervallumra úgy, hogy bármely* φ_1*-re és* φ_2*-re (egy ilyen intervallum belsejéből):*

$$|\Delta\Theta(\varphi_1) - \Delta\Theta(\varphi_2)| \le C|\varphi_1 - \varphi_2|^{\alpha}.$$

2. $\Delta\Theta(\varphi)$ *szakaszonként* C^2 *függvénye* φ*-nek a* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *zárt intervallumon, a fenti értelemben. (Vegyük észre ugyanakkor, hogy* κ*-nak, szemben* $\Delta\Theta$*-val, lehet, hogy nincs véges egyoldali határértéke a szakadási pontokban.)*

3. *van egy véges* C *konstans, hogy*

$$|\kappa'(\varphi)| \le C|(2+\kappa(\varphi))^3|$$

   ahol $\kappa'(\varphi)$ *a* κ *deriváltja* φ *szerint.*

4. *Az utolsó tulajdonsághoz tekintsünk egy* φ_0 *szakadási pontot, ahol* $\kappa(\varphi)$*-nek (szemben* $\Delta\Theta(\varphi)$*-vel) nincs véges baloldali határértéke. Persze, ha jobboldali határérték nincs, az annak megfelelő tulajdonságot tesszük fel.*

   Alkalmas $[\varphi_0 - \epsilon, \varphi_0)$ *intervallumra megszorítva,* $\omega(\varphi) = \frac{2+\kappa(\varphi)}{\cos\varphi}$ *monoton függvénye* φ*-nek.*

Most már ki tudjuk mondani a fejezet fő tételét.

25. tétel. ***Tegyük fel, hogy a*** (M, T, μ) ***puha biliárdra teljesül a H tulajdonság és a forgatási függvény reguláris. Tegyük fel továbbá, hogy nincsenek sarokpontok és a horizont véges (***$0 < \tau_{min}$, $\tau_{max} < \infty$***).***

Ekkor a dinamikai rendszerre, az ergodicitáson és hiperbolicitáson felül, teljesül az exponenciális korreláció-lecsengés és a centrális határeloszlás tétel Hölder-folytonos függvényekre.

3.3.1. Konkrét potenciálok

A 25. tétel következményeként kimondhatjuk bizonyos konkrét potenciálokra az exponenciális korreláció-lecsengést. Ilyen következmények bizonyításához ki kell számolnunk a $\Delta\Theta(\varphi)$ forgatási függvényt a $V(r)$ potenciálból.

26. következmény. *Tekintsük a konstans potenciál esetét,*

$$V(r) = V_0 \text{ minden } r \in [0, R)\text{-re.}$$

A korreláció-lecsengés exponenciális, ha

- $V_0 > 0$ *és a konfiguráció tetszőleges,*
- $V_0 < 0$ *és a konfiguráció olyan, hogy* $\tau_{\min} > \frac{2R}{\sqrt{1-2V_0-1}}$.

27. következmény. *Adott* $A > 0$ *és* $\beta > -2$ *konstansok mellett tekintsük a*

$$V(r) = A\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\beta}\right)$$

potenciált. A korreláció-lecsengés exponenciális, ha

- $A = \frac{1}{2}$, $0 > \beta(> -2)$ *és a konfiguráció tetszőleges,*
- $A = \frac{1}{2}$, $\beta > 0$ *és a konfiguráció olyan, hogy* $\tau_{\min} > \frac{2R}{\beta}$.

4. Az eredmények áttekintése

Amint azt a bevezetésben leírtuk, ennek a munkának jelentős része magas dimenziós rendszerek korreláció-lecsengésének vizsgálatára irányul. Ebbe az irányba továbbhaladva az első lépés megtörtént: hiperbolicitást bizonyítottunk magas dimenziós puha biliárdok egy osztályára [5]. Hogy a korreláció-lecsengés irányába haladjunk, az alábbi utat tervezzük követni.

1. Ami a talán legközvetlenebb kihívást illeti, azt sejtjük, hogy léteznek gyorsan keverő potenciálok, amikre a $|\kappa + 2| > c$ feltétel (és így a H tulajdonság a 22. definícióból) nem teljesül közel érintő ütközésekre. Így ezekre a rendszerekre nem érvényes a 25. tétel, sőt, legalábbis tudomásunk szerint, nincs az irodalomban ismert eredmény ilyen puha biliárdok ergodicitására és hiperbolicitására sem. Így a következő megjegyzést tesszük:

   28. megjegyzés. *Előfordulhat, hogy* κ *tart* -2*-höz amint* $\varphi \to \frac{\pi}{2}$, *mégis* $|\frac{2+\kappa}{\cos\varphi}| > c$, *és a rendszer lehet hiperbolikus (esetleg ergodikus vagy exponenciálisan keverő). Ennek a kérdésnek a vizsgálata folyamatban van.*

   Ennek az esetnek a kezelésében az a nehézség, hogy a szórótesteken belüli és az azokon kívüli mozgás külön-külön kezelése, úgy tűnik, bizonyos érvelésekben nem lehetséges.

   Egy ilyen rendszerre akár a hiperbolicitás bizonyítása két dimenzióban is önmagában érdekes lenne.

2. A magas dimenziós esetben, vagyis magas dimenziós szóró biliárdok puha változatainál (amit pl. a három dimenziós, gömb szórótestekkel definiált Lorentz folyamat motivál), már az ergodicitás is nehéznek tűnik. Ennek oka, hogy puha rendszerekben nem működik az algebrai megközelítés a szingularitások kezelésére, így jelenleg nem ismert ide vonatkozó alaptétel. Ezért lehet sokkal könnyebb egy olyan puha rendszert kezelni, ahol $|\frac{2+\kappa}{\cos\varphi}|$ nullától és végtelentől is el van választva. Ebben az esetben a szingularitások patológikus viselkedése nem jelenik meg.

A jövő kutatásainak egy másik iránya, amit elsősorban a fizikai alkalmazások motiválnak, lehet azon rendszerek további vizsgálata, amikre a gyors keverés már bizonyítást nyert. Például, ha bebizonyosodott diffúziós állandók és más transzport-együtthatók létezése, érdekes lenne megérteni, hogyan függnek ezek bizonyos paraméterektől, mint pl. a teljes energiától.

Végül, de nem utolsó sorban, szemben a 25. tétel általános voltával, kellemetlen, hogy milyen kevés konkrét potenciálra sikerült alkalmazni ezt az eredményt a 3.3.1. fejezetben. Kívánatos lenne a regularitási tulajdonságokat ellenőrizni – legalább numerikusan – a potenciálok lehető legszélesebb osztályára.

5. Köszönet-nyilvánítás

Először is köszönöm minden társszerzőmnek, hogy velük dolgozhattam és tanulhattam tőlük, és ezeket a problémákat együtt oldhattuk meg. Bálint Péter külön köszönetet érdemel a kézirat lelkiismeretes átolvasásáért és rengeteg értékes javaslatáért. Ám legfőképpen, köszönöm témavezetőmnek, Szász Domokosnak a doktori munkám minden részletéhez nyújtott segítségét.

Köszönettel tartozom Simányi Nándornak sok értékes beszélgetésért és javaslatért, és a Budapesti Műszaki Egyetem Sztochasztika Tanszékének a kiváló munkakörülmények biztosításáért. Végül, de nem utolsó sorban, köszönom családomnak a támogatást és türelmet.

Hivatkozások

[1] P. Bálint, N. I. Chernov, D. Szász and I. P. Tóth, *Multi-dimensional Semi-dispersing Billiards: Singularities and the Fundamental Theorem*, Annales Henri Poincaré **3** (2002) 451–482.

[2] P. Bálint, N. I. Chernov, D. Szász and I. P. Tóth, *Geometry of Multi-dimensional Dispersing Billiards*, Astérisque **286** (2003) 119–150.

[3] P. Bálint and I. P. Tóth, *Correlation decay in certain soft billiards*, Commun. Math. Phys. **243** (2003) 55–91.

[4] P. Bálint and I. P. Tóth, *Mixing and its rate in 'soft' and 'hard' billiards motivated by the Lorentz process*, Physica D **187** (2004) 128–135.

[5] P. Bálint and I. P. Tóth, *Hyperbolicity of multi-dimensional soft billiards*, submitted to Discrete and Cont. Dyn. Syst.

[6] L. A. Bunimovich and J. Reháček, *How high dimensional stadia look like*, Commun. Math. Phys. **197** (1998) 277–301.

[7] N. Chernov, *Statistical properties of the periodic Lorentz gas. Multidimensional case.* J. Stat. Phys. **74** (1994), 11–53.

[8] N. Chernov, *Decay of correlations and dispersing billiards*, J. Stat. Phys. **94** (1999), 513–556.

[9] N. Chernov and Ya. G. Sinai, *Ergodic Properties of Certain Systems of 2–D Discs and 3–D Balls.*, Russ. Math. Surv. **(3) 42** (1987), 181–201.

[10] V. Donnay and C. Liverani, *Potentials on the two-torus for which the Hamiltonian flow is ergodic*, Commun. Math. Phys. **135** (1991), 267–302.

[11] G. Gallavotti and E.D.G. Cohen, *Dynamical ensembles in stationary states*, J. Stat. Phys. **80** (1995), 931–970.

[12] G. Gallavotti and D. Ornstein, *Billiards and Bernoulli schemes*, Commun. Math. Phys. **38** (1974), 83–101.

[13] A. Krámli, N. Simányi and D. Szász, *A „Transversal" Fundamental Theorem for Semi-Dispersing Billiards*, Commun. Math. Phys. **129** (1990), 535–560.

[14] C. Liverani and M. Wojtkowski, *Ergodicity in Hamiltonian Systems*, Dynamics Reported (New Series) **4** (1995), 130–202.

[15] D. Ruelle, *Smooth dynamics and new theoretical ideas in nonequilibrium statistical mechanics*, J. Stat. Phys. **95** (1999) 393–468.

[16] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, Springer, 1974

[17] Ya. G. Sinai, *On the foundations of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **153** (1963), 1262–1264.

[18] Ya. G. Sinai, *Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards*, Russ. Math. Surv. **25** (1970), 137–189.

[19] L.-S. Young, *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity*, Annals of Math. **147** (1998), 585–650.

[20] L.-S. Young, *Ergodic theory of chaotic dynamical systems*, XIIth International Congress of Mathematical Physics (ICMP'97) (Brisbane), 131–143, Internat. Press, Cambridge, MA, 1999