6 A TKF91 MODELL ANALITIKUS TOVÁBBFEJLESZTÉSEI

6.1 A TKF91 modell, mint sztochasztikus sorban állási rendszer

Az előző fejezetben a TKF91 modell kombinatorikus továbbfejlesztésit mutattam be. A kombinatorikus továbbfejlesztés alatt azt értettem, hogy a linkek születési-halálozási folyamata nem változott meg. (Ilyen értelemben a TKF92 modell is a TKF91 modell kombinatorikus fejlesztéseként fogható fel). Ebben a fejezetben olyan modelleket mutatok be, amelyekben a linkek születési és halálozási folyamata megváltozik. Ezek a modellek már csak abban hasonlítanak a TKF modellekre, hogy a szubsztitúció és a beszúrás-törlés folyamata szét van választva.

A linkek születési és halálozási folyamatának a változtatásával természetesen a $p_n(t)$, $p'_n(t)$ és $p''_n(t)$ valószínűségi függvények is megváltoznak. A fejezet központi kérdése, hogy az egyes modellek esetében ezek a függvények hogyan adhatóak meg. A TKF modell megalkotói ezeket a függvényeket ismert születési-halálozási folyamatok (Feller, 1968) képleteiből próbálgatással határozták meg (Thorne, személyes közlés). A $p_n(t)$, $p'_n(t)$ és $p''_n(t)$ valószínűségi függvények első analitikus levezetése Toroczkai Zoltántól és tőlem származik. A TKF91 modellt átfogalmaztuk a sorban állási rendszerek nyelvére, és megmutattuk, hogy abban a kontextusban a problémát gyakorlatilag megoldották (Sneddon, 1957).

A sorban állási rendszerek általános problémája a következő. Adott egy rendszer, amelyben egy vagy több kiszolgáló egység található. A rendszerbe vevők érkeznek, akiket ki kell szolgálni. Egy kiszolgáló egység csak egyetlen vevőt tud egyidejűleg kiszolgálni. Ha minden kiszolgáló egység foglalt, akkor az újonnan érkezett vevőknek várakozniuk kell, ha van szabad kiszolgáló egység, akkor a vevő kiszolgálása a beérkezéssel egy időben elkezdődik Mind a kiszolgálás időtartamát, mind a tetszőleges két egymás után érkező vevő beérkezése közötti időtartamot egy folytonos valószínűségi változó írja le. A legegyszerűbb valószínűségi változók exponenciális eloszlásúak, azaz mind a kiszolgálási, mind a beérkezési folyamatot Poisson folyamatként képzeljük el. A rendszer állapotát a rendszerben tartózkodó vevők számával lehet leírni. A sorban állási rendszerek nyelvén a következő feladatok fogalmazhatóak meg

- Ismert rendszer, valószínűségi változók és a rendszer adott kezdeti állapota esetén megmondani t idő elteltével a rendszer lehetséges állapotainak a valószínűségét, azaz leírni a rendszer ún. tranziens viselkedését.
- A rendszer stacionárius állapotának a jellemzése, azaz a folyamat elindítása után végtelen idővel mekkorák a rendszer egyes állapotainak a valószínűségei.
- Egy új vevő nem csak a sor végére állhat, hanem egy ismerőse után is. Ilyen esetekben a tranziens viselkedés leírásakor nem csak a rendszer állapotaira lehet rákérdezni, hanem a rendszer ún. részállapotaira is, azaz a kezdeti állapotban a rendszerben tartózkodó vevők közül kinek hány ismerőse érkezett.

A kiszolgálási időt és az érkezési időt leíró valószínűségi változók függhetnek a rendszer állapotától. Például a rendszerben tartózkodó vevők számától függhet a következő vevő beérkezéséig eltelő időtartam. A hosszú sor elijesztheti a vevőket, de akár fel is bátoríthatja. Ez utóbbira példa az egykori szocialista országok vevőinek a magatartása. A szomszédom mesélte, hogy kiskorában, az ötvenes években napjában többször is felmászott a padlásra, ahonnan le lehetett látni a domb alján elterülő térre. Ha sor állt a bolt előtt, akkor ők is rohantak le a boltba, mert akkor biztosan lehetett kapni valamit, ami egyébként hiánycikk volt.

Ha a TKF modellt átfogalmazzuk a sorban állási rendszerek nyelvére, akkor a halandó linkek lesznek a vevők. Egy vevő kiszolgálása a sorban állási rendszerek nyelvén ugyanazt jelenti, mint egy link halála a TKF modellben. A TKF modellben bármely halandó link μ rátával halhat meg, függetlenül a szekvenciában található linkek számától. A sorban állási rendszerekben ez azt jelenti, hogy minden egyes vevő kiszolgálási idejét egy μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó írja le, és minden egyes újonnan beérkező vevő kiszolgálása azonnal elkezdődik, függetlenül a rendszerben tartózkodó vevők számától. Ez utóbbi azt jelenti, hogy a rendszer kimeríthetetlen kapacitású, azaz végtelen sok kiszolgálóegységgel van felszerelve. Egy link születése a sorban állási rendszerekben egy új vevő érkezését jelenti. Egy új link születési rátája egyenesen arányos a szekvenciában meglévő összes linkek számával. A sorban állási modellben tehát felbátorodó vevőkről van szó. Az új vevő beérkezéséig eltelő idő függ a rendszerben tartózkodó vevők számától, de továbbra is exponenciális eloszlású valószínűségi változó írja le, csupán az eloszlás paramétere függ a rendszerben tartózkodó vevők számától. A TKF modellben illeszteni kell a szekvenciákat, ezért a sorban állási rendszerben kíváncsiak vagyunk a részállapotok valószínűségeire is. A részállapotok folyamatát úgy lehet leírni, hogy minden vevőhöz λ

paraméterű Poisson folyamattal csatlakozik egy ismerős. Ezenkívül van egy 'bolti csalogató', aki szintén λ paraméterű exponenciális várakozási idővel csalogatja be egymás után a vevőket. Ez a 'csalogató' a TKF modellben az immortális link.

Először az immortális link lehetséges részállapotainak a valószínűségeit számoljuk ki. A sorban állási modellben csak a halandó linkek számát számoljuk, így $p''_n(t)$ indexelése el van csúsztatva eggyel. Így most $p''_n(t)$ a 'bolti csalogató' által behívott, t idő elteltével a rendszerben tartózkodó vevők számát jelenti. Az ezt leíró differenciálegyenlet-rendszer

$$\frac{dp''_n(t)}{dt} = \lambda n p''_{n-1}(t) - \left[\lambda(n+1) + \mu n\right] p''_n(t) + \mu(n+1) p''_{n+1}(t) \qquad n > 0 \tag{6.1.1}$$

ahol $p''_{-1}(t) \equiv 0$, definíció szerint. A kezdeti érték feltétel:

$$p''_n(t) = \delta_{n,0} \tag{6.1.2}$$

A sorban állási rendszerek elméletében az ilyen végtelen differenciálegyenlet-rendszerek analitikus megoldási technikája már régóta ismert (Cox & Smith, 1961) Be kell vezetni az ún. generátorfüggvényt

$$P(\xi,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p''_n(t)\xi^n \tag{6.1.3}$$

Végigszorozva (6.1.1)-et ξ^n-nel, és összegezve az összes n-re, $P(\xi,t)$ egy parciális differenciálegyenletét kapjuk

$$\frac{\partial P(\xi,t)}{\partial t} = \left[\lambda\xi(\xi-1) + \mu(1-\xi)\right]\frac{\partial P(\xi,t)}{\partial \xi} + \lambda(\xi-1)P(\xi,t) \tag{6.1.4}$$

A kapott parciális differenciálegyenlet elsőrendű és lineáris lesz. Lineáris azért, mert autonóm, lineáris differenciálegyenlet-rendszerből indultunk ki, és elsőrendű azért, mert elsőrendű volt a differenciálegyenlet-rendszer, és az n-edik differenciálegyenlet együtthatói n-nek elsőfokú függvényei voltak. (6.1.4) könnyen megoldható Lagrange (a karakterisztikák) módszerével (Obádovics & Szarka, 1999). Ha $v(\xi,t,P)=C_1$ és $w(\xi,t,P)=C_2$ a

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\xi}{(\xi-1)(\mu-\lambda\xi)} = \frac{dP}{\lambda(\xi-1)P} \tag{6.1.5}$$

rendszernek két független megoldása, akkor (6.1.4) összes megoldása $\Phi\big(v(\xi,t,P)\big) = w(\xi,t,P)$ alakú, ahol Φ tetszőleges folytonosan differenciálható függvény.

A

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\xi}{(\xi-1)(\mu-\lambda\xi)} \tag{6.1.6}$$

differenciálegyenlet megoldásai

$$\frac{1-\xi}{\mu-\lambda\xi}e^{-t(\mu-\lambda)}=C_1 \tag{6.1.7}$$

A

$$\frac{d\xi}{(\xi-1)(\mu-\lambda\xi)}=\frac{dP}{\lambda(\xi-1)P} \tag{6.1.8}$$

differenciálegyenlet megoldásai

$$P(\mu-\lambda\xi)=C_2 \tag{6.1.9}$$

Így a (6.1.4) parciális differenciálegyenlet általános megoldása

$$P(\xi,t)=\frac{1}{\mu-\lambda\xi}\Phi\left(\frac{1-\xi}{\mu-\lambda\xi}e^{-t(\mu-\lambda)}\right) \tag{6.1.10}$$

A Φ függvényt a kezdeti érték feltétel szabja meg. (6.1.2)-ből adódóan

$$P(\xi,0)=1 \tag{6.1.11}$$

Ezért

$$\Phi(a)=\frac{\mu-\lambda}{1-\lambda a} \tag{6.1.12}$$

Azaz a (6.1.4) parciális differenciálegyenletnek a (6.4.2) peremfeltétel melletti megoldása

$$P(\xi,t)=\frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda e^{-(\mu-\lambda)t}+\lambda\left(e^{-(\mu-\lambda)t}-1\right)\xi} \tag{6.1.13}$$

A $p''_n(t)$ valószínűségi függvények $P(\xi$,t) Maclaurin-sorából (0 körüli Taylor-sorából) határozhatóak meg

$$\frac{\partial^n P(\xi,t)}{\partial\xi^n}=\frac{n!(\mu-\lambda)\lambda^n\left(1-e^{-(\mu-\lambda)t}\right)^n}{\left[\mu-\lambda e^{-(\mu-\lambda)t}+\lambda\left(e^{-(\mu-\lambda)t}-1\right)\xi\right]^{n+1}} \tag{6.1.14}$$

Az n-edik deriváltat elosztva n!-sal, és tekintve a ξ=0 pontban kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n!}\frac{\partial^n P(\xi,t)}{\partial\xi^n}\bigg|_{\xi=0}=\frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda e^{-(\mu-\lambda)t}}\left[\lambda\frac{1-e^{-(\mu-\lambda)t}}{\mu-\lambda e^{-(\mu-\lambda)t}}\right]^n \tag{6.1.15}$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy a halhatatlan linknek t idő múlva n leszármazottja lesz valóban $[1-\lambda\beta(t)][\lambda\beta(t)]^n$, mert

$$1-\lambda\beta(t)=1-\lambda\frac{1-e^{-(\mu-\lambda)t}}{\mu-\lambda e^{-(\mu-\lambda)t}}=\frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda e^{-(\mu-\lambda)t}} \tag{6.1.16}$$

A halandó linkek sorsát leíró függvényeket kicsit nehezebb kiszámolni. Emlékeztetőül

$$\frac{dp_n(t)}{dt}=\lambda(n-1)p_{n-1}(t)-(\lambda+\mu)np_n(t)+\mu np_{n+1}(t) \qquad n>0$$
$$\frac{dp_n^{'}(t)}{dt}=\lambda(n-1)p_{n-1}^{'}(t)-(\lambda+\mu)np_n^{'}(t)+\mu(n+1)p_{n+1}^{'}(t)+\mu p_{n+1}(t) \qquad n>0 \tag{6.1.17}$$
$$\frac{dp_0^{'}(t)}{dt}=\mu p_1^{'}(t)+\mu p_1(t)$$

Két generátorfüggvényt kell bevezetni, egyet $p_n(t)$-re, egyet pedig $p^{'}_n(t)$re

$$P^{(1)}(\xi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n(t)\xi^n$$
$$P^{(2)}(\xi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n^{'}(t)\xi^n \tag{6.1.18}$$

(6.1.17) megfelelő egyenleteit ξ^n-nel szorozva, és az összes n-re összeadva egy parciális differenciálegyenlet-rendszert kapunk

$$\frac{\partial P^{(1)}(\xi,t)}{\partial t}=\frac{\partial P^{(1)}(\xi,t)}{\partial\xi}(\lambda\xi-\mu)(\xi-1)-P^{(1)}(\xi,t)\frac{\mu}{\xi}$$
$$\frac{\partial P^{(2)}(\xi,t)}{\partial t}=\frac{\partial P^{(2)}(\xi,t)}{\partial\xi}(\lambda\xi-\mu)(\xi-1)+P^{(1)}(\xi,t)\frac{\mu}{\xi} \tag{6.1.19}$$

Az első egyenlet csak $P^{(1)}(\xi,t)$-től függ. Ezt Lagrange módszerével megoldva a

$$\frac{dt}{1}=\frac{d\xi}{(\lambda\xi-\mu)(1-\xi)}=\frac{dP^{(1)}}{-P^{(1)}\frac{\mu}{\xi}} \tag{6.1.20}$$

rendszer két független megoldása

$$\frac{1-\xi}{\lambda\xi-\mu}e^{-(\mu-\lambda)t}=C_1$$
$$\frac{P^{(1)}}{\xi}\left[\frac{(\lambda\xi-\mu)^{\lambda}}{(1-\xi)^{\mu}}\right]^{\frac{1}{\lambda-\mu}}=C_2 \tag{6.1.21}$$

A (6.1.19) rendszer első egyenletének általános megoldása tehát

$$P^{(1)}(\xi,t)=\xi\left[\frac{(\lambda\xi-\mu)^{\lambda}}{(1-\xi)^{\mu}}\right]^{\frac{-1}{\lambda-\mu}}\Phi\left(\frac{1-\xi}{\lambda\xi-\mu}e^{-(\mu-\lambda)t}\right) \tag{6.1.22}$$

A Φ függvény a

$$P^{(1)}(\xi,0)=\xi \tag{6.1.23}$$

peremfeltételből számítható ki. Mivel a

$$f(x)=\frac{1-x}{\lambda x-\mu} \tag{6.1.24}$$

függvény inverze

$$f^{-1}(x) = \frac{1+\mu x}{1+\lambda x} \tag{6.1.25}$$

ezért

$$\Phi(a) = \left[\frac{\left(\lambda \frac{1+\mu a}{1+\lambda a} - \mu \right)^{\lambda}}{\left(1 - \frac{1+\mu a}{1+\lambda a} \right)^{\mu}} \right]^{\frac{1}{\lambda-\mu}} \tag{6.1.26}$$

Ezt egyszerűsítve

$$\Phi(a) = \left[\frac{\left(\frac{\lambda-\mu}{1+\lambda a} \right)^{\lambda}}{\left(\frac{(\lambda-\mu)a}{1+\lambda a} \right)^{\mu}} \right]^{\frac{1}{\lambda-\mu}} = \left[\frac{(\lambda-\mu)^{\lambda-\mu} a^{-\mu}}{(1+\lambda a)^{\lambda-\mu}} \right]^{\frac{1}{\lambda-\mu}} = \frac{(\lambda-\mu) a^{-\frac{\mu}{\lambda-\mu}}}{1+\lambda a} \tag{6.1.27}$$

Így (6.1.19) első egyenletének a (6.1.23) peremfeltétel melletti megoldása

$$P^{(1)}(\xi,t) = \xi \left[\frac{(\lambda\xi-\mu)^{\lambda}}{(1-\xi)^{\mu}} \right]^{\frac{-1}{\lambda-\mu}} \frac{(\lambda-\mu)\left(\frac{1-\xi}{\lambda\xi-\mu} e^{-(\mu-\lambda)t} \right)^{-\frac{\mu}{\lambda-\mu}}}{1+\lambda \frac{1-\xi}{\lambda\xi-\mu} e^{-(\mu-\lambda)t}} \tag{6.1.28}$$

Ezt egyszerűbb alakra hozva

$$P^{(1)}(\xi,t) = \frac{\xi(\lambda\xi-\mu)^{-1} e^{-\mu t}(\lambda-\mu)}{1+\lambda \frac{1-\xi}{\lambda\xi-\mu} e^{-(\mu-\lambda)t}} = \frac{\xi e^{-\mu t}(\lambda-\mu)}{\lambda e^{-(\mu-\lambda)t} - \mu + \lambda\xi\left(1-e^{-(\mu-\lambda)t}\right)} =$$

$$= \frac{\xi e^{-\mu t}(\mu-\lambda)}{\mu - \lambda e^{-(\mu-\lambda)t} + \lambda\left(e^{-(\mu-\lambda)t} - 1\right)\xi} \tag{6.1.29}$$

Látható, hogy (6.1.29) csak egy $\xi e^{-\mu t}$ faktorban tér el (6.1.13)-tól. A ξ faktor a Maclaurin sort csúsztatja el, így valóban

$$p_n(t) = e^{-\mu t}\left[1-\lambda\beta(t)\right]\left[\lambda\beta(t)\right]^{n-1} \tag{6.1.30}$$

Ezt az eredményt meg lehetett volna kapni generátorfüggvény nélkül is, csupán (6.1.15) és elemi valószínűségszámítási ismeretek segítségével. Ugyanis amíg tudjuk, hogy a kezdő halandó link életben van, addig ez a rendszer és a halhatatlan link rendszere semmiben nem különbözik egymástól. Legyen E az az esemény, hogy a kezdő link életben van. Ennek a valószínűsége

$$P(E) = e^{-\mu t} \tag{6.1.31}$$

Ha F_n az az esemény, hogy a kezdő link túlélt, és önmagával együtt n utódja van, akkor

$$P(F_n) = P(F_n, E) = P(F_n | E)P(E) = [1-\lambda\beta(t)][\lambda\beta(t)]^{n-1} e^{-\mu t} \tag{6.1.32}$$

Célszerűbb (6.1.19) második egyenletébe nem behelyettesíteni $P^{(1)}(\xi,t)$-t, hanem beevezetni a

$$Q(\xi,t) = P^{(1)}(\xi,t) + P^{(2)}(\xi,t) \tag{6.1.33}$$

függvényt. Ekkor (6.1.19) két egyenletét összeadva kapjuk, hogy

$$\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial t} = \frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial \xi}(\lambda\xi-\mu)(\xi-1) \tag{6.1.34}$$

Ennek a parciális differenciálegyenletnek az általános megoldása

$$Q(\xi,t) = \Phi\left(\frac{1-\xi}{\lambda\xi-\mu} e^{-(\mu-\lambda)t}\right) \tag{6.1.35}$$

a peremfeltétel

$$Q(\xi,0) = \xi \tag{6.1.36}$$

ekképpen

$$\Phi(a) = \frac{\mu a+1}{\lambda a+1} \tag{6.1.37}$$

És így

$$Q(\xi,t) = \frac{\mu\left(e^{-(\mu-\lambda)t}-1\right)+\xi\left(\lambda-\mu e^{-(\mu-\lambda)t}\right)}{\lambda e^{-(\mu-\lambda)t}-\mu+\lambda\xi(1-e^{-(\mu-\lambda)t})} \tag{6.1.38}$$

Jelölje $M(f(x))$ $f(x)$ Maclaurin sorát! $Q(\xi,t)$-t

$$Q(\xi,t) = M\left(\frac{\mu\left(e^{-(\mu-\lambda)t}-1\right)}{\lambda e^{-(\mu-\lambda)t}-\mu+\lambda\xi(1-e^{-(\mu-\lambda)t})}\right)+\xi M\left(\frac{\left(\lambda-\mu e^{-(\mu-\lambda)t}\right)}{\lambda e^{-(\mu-\lambda)t}-\mu+\lambda\xi(1-e^{-(\mu-\lambda)t})}\right) \tag{6.1.39}$$

alakban keressük.

$$\frac{\partial^n}{\partial\xi^n}\left(\frac{\mu\left(e^{-(\mu-\lambda)t}-1\right)}{\lambda e^{-(\mu-\lambda)t}-\mu+\lambda\xi(1-e^{-(\mu-\lambda)t})}\right) = \frac{n!\,\mu\left(e^{-(\mu-\lambda)t}-1\right)\lambda^n(e^{-(\mu-\lambda)t}-1)^n}{\left[\lambda e^{-(\mu-\lambda)t}-\mu+\lambda\xi(1-e^{-(\mu-\lambda)t})\right]^{n+1}} \tag{6.1.40}$$

és

$$\frac{\partial^n}{\partial\xi^n}\left(\frac{\left(\lambda-\mu e^{-(\mu-\lambda)t}\right)}{\lambda e^{-(\mu-\lambda)t}-\mu+\lambda\xi(1-e^{-(\mu-\lambda)t})}\right) = \frac{n!\left(\lambda-\mu e^{-(\mu-\lambda)t}\right)\lambda^n(e^{-(\mu-\lambda)t}-1)^n}{\left[\lambda e^{-(\mu-\lambda)t}-\mu+\lambda\xi(1-e^{-(\mu-\lambda)t})\right]^{n+1}} \tag{6.1.41}$$

Így $Q(\xi,t)$ Maclaurin sorának n-edik tagja

$$\left[\frac{\lambda\mu\left(e^{-(\mu-\lambda)t}-1\right)^2}{\left(\lambda e^{-(\mu-\lambda)t}-\mu\right)^2}+\frac{\lambda-\mu e^{-(\mu-\lambda)t}}{\lambda e^{-(\mu-\lambda)t}-\mu}\right]\left[\lambda\beta(t)\right]^{n-1} = [1-\mu\beta(t)][1-\lambda\beta(t)][\lambda\beta(t)]^{n-1} \tag{6.1.42}$$

ahol $\beta(t)$ továbbra is

$$\beta(t) = \frac{1 - e^{-(\mu-\lambda)t}}{\mu - \lambda e^{-(\mu-\lambda)t}} \tag{6.1.43}$$

Mivel

$$P^{(2)}(\xi,t) = Q(\xi,t) - P^{(1)}(\xi,t) \tag{6.1.43}$$

ezért

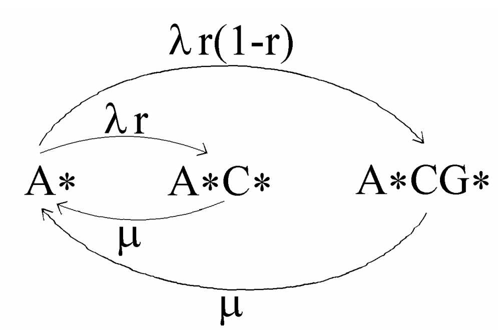
$$p_n^{'}(t) = \left[1 - \mu\beta(t) - e^{-\mu t}\right]\left[1 - \lambda\beta(t)\right]\left[\lambda\beta(t)\right]^{n-1} \tag{6.1.44}$$

6.2 Többszörös beszúrások modellezése

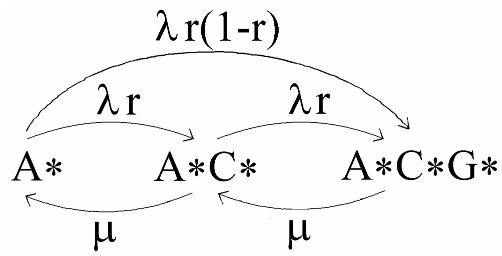
Továbbra is feltesszük, hogy a szubsztitúció és a beszúrás-törlés két, egymástól független Markov folyamat. A modell hosszú beszúrásokat enged meg, és abban különbözik a TKF92 modelltől (**6.2.1** ábra), hogy a hosszú beszúrásokban minden egyes karakterhez egy önálló link tartozik (Miklós & Toroczkai, 2001). Ekképpen nem kell széttörhetetlen fragmentumokat feltételezni, tehát ebben a modellben elképzelhető, hogy egy beszúrt hosszú fragmentum egyes karakterei kitörlődnek, míg egyesek megmaradnak (**6.2.2** ábra). Egy link eszerint képes egyidejűleg k halandó linket szülni λ_k rátával, ahol

$$\lambda_k = \lambda r(1-r)^{k-1},\ k = 1,2,\ldots,\ 0 < r < 1,\ \lambda > 0 \tag{6.2.1}$$

Természetesen ebben a modellben is minden egyes link születését egy karakter kíséri, véletlenszerűen választva a szubsztitúciós folyamat egyensúlyi eloszlásából. Csak a halandó linkek képesek meghalni, μ>0 rátával.



6.2.1. ábra A TKF92 modellt leíró folyamatábra. Egy link egy k hosszúságú fragmentumot képes szülni $\lambda r(1-r)^{k-1}$ rátával, λ>0, 0<r<1. A hosszú beszúrásokhoz csak egyetlen halandó link kapcsolódik. Így nem lehetséges a beszúrt karakterek külön-külön törlése. Ha a halandó link meghal, akkor vele együtt az összes hozzá tartozó karakter kitörlődik.



6.2.2 ábra A Miklós-Toroczkai modellt leíró folyamatábra. Egy link k darab halandó linket képes szülni, $\lambda r(1-r)^{k-1}$ rátával, $\lambda>0$, $0<r<1$. A hosszú beszúrásokban minden egyes karakterhez külön link tartozik, így lehetőség van a külön-külön törlésükre.

Először a halhatatlan link lehetséges sorsainak a valószínűségeit számoljuk ki. Megállapodunk, hogy ettől a fejezettől kezdve $p_n(t)$ jelöli annak a valószínűségét, hogy a halhatatlan linknek n utódja van t idő elteltével, önmagát is beleszámítva, $p_n^{(1)}(t)$ jelöli annak a valószínűségét, hogy egy halandó linknek n utódja van a t időpontban, és $p_n^{(2)}(t)$ jelöli annak a valószínűségét, hogy egy halandó link meghalt, viszont van n valódi leszármazottja a t időpontban. Összegyűjtve egy állapot valószínűségét növelő és csökkentő folyamatokat, a folyamatot leíró differenciálegyenlet

$$\frac{dp_n}{dt} = \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\lambda_j p_{n-j} + n\mu p_{n+1} - \left[n\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j + (n-1)\mu \right] p_n \tag{6.2.2}$$

Felhasználva, hogy $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j = \lambda$ és $\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\lambda_j p_{n-j} = \sum_{k=1}^{n-1} k\lambda_{n-k} p_k$, kapjuk, hogy

$$\frac{dp_n}{dt} = \lambda r \sum_{k=1}^{n-1} k(1-r)^{n-k-1} p_k + n\mu p_{n+1} - \left[n\lambda + (n-1)\mu \right] p_n \tag{6.2.3}$$

Az immortális link miatt, $p_0(t)=0$, minden időpillanatban. n=1-re az összegzés üres (6.2.3)-ban. A kezdeti feltételeket a

$$p_n(0) = \delta_{n,1} \tag{6.2.4}$$

egyenlet adja meg. Bevezetjük a $p_0(t)$ valószínűségek generátorfüggvényét

$$P(\xi;t) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n p_n(t) \tag{6.2.5}$$

Végigszorozva a (6.2.3) egyenletet ξ^n-nel, és összegezve minden n-re, a generátorfüggvénynek egy lineáris parciális differenciálegyenletét kapjuk.

$$\frac{\partial P}{\partial t} - (1-\xi)\left[\mu - \frac{\lambda\xi}{1-\xi(1-r)} \right] \frac{\partial P}{\partial \xi} = -(1-\xi)\frac{\mu}{\xi} P \tag{6.2.6}$$

A (6.2.4)-ből adódóan a peremfeltétel $P(\xi,t)= \xi$.

A (6.2.6) parciális differenciálegyenletet Lagrange módszerével oldjuk meg.

$$\frac{dt}{1}=\frac{d\xi}{-(1-\xi)\left[\mu-\dfrac{\lambda\xi}{1-\xi(1-r)}\right]}=\frac{dP}{-(1-\xi)\dfrac{\mu}{\xi}P} \tag{6.2.7}$$

Ennek két megoldása

$$v(\xi;t)=\frac{(1-\xi)^r}{(\mu-a\xi)^{\lambda/a}}e^{-t(\mu r-\lambda)}=c_1 \tag{6.2.8}$$

és

$$w(\xi;t;P)=P\frac{(\mu-a\xi)^{\lambda/a}}{\xi}=c_2 \tag{6.2.9}$$

ahol $a\equiv\lambda+\mu(1-r)>0$. A (6.2.6) általános megoldása tehát

$$P(\xi;t)=\xi(\mu-a\xi)^{-\lambda/a}\Phi\left(\frac{(1-\xi)^r}{(\mu-a\xi)^{\lambda/a})}e^{-t(\mu r-\lambda)}\right) \tag{6.2.10}$$

A Φ függvényt a $P(\xi,t)=\xi$ peremfeltétel határozza meg. Így

$$\Phi(z)=\left[\mu-af^{-1}(z)\right]^{\lambda/a} \tag{6.2.11}$$

ahol

$$f(x)=\frac{(1-x)^r}{(\mu-ax)^{\lambda/a}} \tag{6.2.12}$$

Így a generátorfüggvény egzakt megoldása

$$P(\xi;t)=\xi\left[\frac{\mu-af^{-1}(f(\xi)e^{-(\mu r-\lambda)t})}{\mu-a\xi}\right]^{\frac{\lambda}{a}} \tag{6.2.13}$$

A halandó linkek lehetséges állapotait leíró differenciálegyenletek

$$\frac{dp_n^{(1)}}{dt}=\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\lambda_j p_{n-j}^{(1)}+n\mu p_{n+1}^{(1)}-\left[n\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j+n\mu\right]p_n^{(1)} \tag{6.2.14}$$

és

$$\frac{dp_n^{(2)}}{dt}=\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\lambda_j p_{n-j}^{(2)}+(n+1)\mu p_{n+1}^{(2)}+ \tag{6.2.15}$$

$$+\mu p_{n+1}^{(1)}-\left[n\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j+n\mu\right]p_n^{(2)}$$

A következő feltételeknek kell teljesülniük

$$p_0^{(1)}(t)=0,\quad \forall t\geq 0 \tag{6.2.16}$$

és a kezdeti feltételek:

$$p_n^{(1)}(0)=\delta_{n,1},\quad p_n^{(2)}(0)=0,\quad \forall n\geq 0 \tag{6.2.17}$$

Szintén generátorfüggvényeket kell bevezetni, $P^{(i)}(\xi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n p_n^{(i)}(t)$, i=1,2, és az előbbihez hasonló módon két parciális differenciálegyenletet kapunk.

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial t}-(1-\xi)\left[\mu-\frac{\lambda\xi}{1-\xi(1-r)}\right]\frac{\partial P^{(1)}}{\partial \xi}=-\frac{\mu}{\xi}P^{(1)} \tag{6.2.18}$$

$$\frac{\partial P^{(2)}}{\partial t}-(1-\xi)\left[\mu-\frac{\lambda\xi}{1-\xi(1-r)}\right]\frac{\partial P^{(2)}}{\partial \xi}=\frac{\mu}{\xi}P^{(1)} \tag{6.2.19}$$

(6.2.18)-at Lagrange módszerével oldjuk meg

$$\frac{dt}{1}=\frac{d\xi}{-(1-\xi)\left[\mu-\dfrac{\lambda\xi}{1-\xi(1-r)}\right]}=\frac{dP^{(1)}}{-\dfrac{\mu}{\xi}P^{(1)}} \tag{6.2.20}$$

Vegyük észre, hogy az első egyenlőség ugyanaz, mint (6.2.7)-ben, tehát az integrálásból is ugyanazt az eredményt kapjuk. A második egyenlőséget integrálva kapjuk, hogy

$$w(\xi;t;P^{(1)})=P^{(1)}\frac{(1-\xi)^{\mu r/(\mu r-\lambda)}}{\xi(\mu-a\xi)^{\lambda/(\mu r-\lambda)}}=c_2 \tag{6.2.21}$$

Hasonlóan az előzőekhez, az általános megoldásból a peremfeltételt figyelembe véve kapjuk meg a keresett generátorfüggvényt

$$P^{(1)}(\xi;t)=\xi\left[\frac{\mu-a\xi}{\mu-af^{-1}(f(\xi)e^{-(\mu r-\lambda)t})}\right]^{\frac{\lambda}{\mu r-\lambda}}\times \tag{6.2.22}$$

$$\times\left[\frac{1-f^{-1}(f(\xi)e^{-(\mu r-\lambda)t})}{1-\xi}\right]^{\frac{\mu r}{\mu r-\lambda}}$$

ahol az f függvény a (6.2.12)-ben megadott függvény.

$P^{(2)}(\xi,t)$ meghatározásához először megint definiálni kell a $Q(\xi;t)=P^{(1)}(\xi;t)+P^{(2)}(\xi,t)$ függvényt. Összeadva (6.2.18) és (6.2.19)-et

$$\frac{\partial Q}{\partial t}-(1-\xi)\left[\mu-\frac{\lambda\xi}{1-\xi(1-r)}\right]\frac{\partial Q}{\partial \xi}=0 \tag{6.2.23}$$

Ezt a parciális differenciálegyenletet szintén könnyen meg lehet oldani a karakterisztikák módszerével. A karakterisztikus egyenlet, ugyanaz, mint (6.2.7) első egyenlősége, így annak a megoldása ugyanaz a $v(\xi,t)$ függvény, mint ami a (6.2.8)-ban van megadva. Ekképpen $Q(\xi,t)=\Phi(v(\xi,t))$ az általános megoldás, ahol Φ tetszőleges differenciálható függvény. Felhasználva a (6.2.16) és (6.2.17) feltételeket, a peremfeltétel $Q(\xi,0)=\xi$. Így

$$Q(\xi;t)=f^{-1}(f(\xi)e^{-(\mu r-\lambda)t}) \tag{6.2.24}$$

ahol az *f* függvény a (6.2.12)-ben megadott, és ez a levezetés a

$$P^{(2)}(\xi;t) = f^{-1}(f(\xi)e^{-(\mu r-\lambda)t}) - P^{(1)}(\xi;t) \tag{6.2.25}$$

generátorfüggvényhez vezet, ahol $P^{(1)}(\xi,t)$ (6.2.22)-vel van megadva.

A kapcsoltsági valószínűség kiszámításához szükség van az egyensúlyi eloszlásra is. Ezt meg lehet kapni a (6.2.13) egyenletből a $t\rightarrow\infty$ határértéknél. Mivel $f^{-1}(0)=1$, és az immortális link miatt, a generátorfüggvény

$$\Gamma(\xi) = \left[\frac{\mu-a}{\mu-a\xi}\right]^{\frac{\lambda}{a}} \tag{6.2.26}$$

A generátorfüggvény Maclaurin sorából kapjuk meg a szekvenciák hosszának az egyensúlyi eloszlását

$$\gamma_n = (\mu-a)^{\lambda/a}\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(\lambda+ia)}{n!\,\mu^{(\lambda+na)/a}} \tag{6.2.27}$$

$\dfrac{d\Gamma(\xi)}{d\xi}$-ből, a $\xi\rightarrow 1$ határértéknél kapjuk meg az egyensúlyi eloszlásban a szekvenciák hosszának a várható értékét, ami

$$E(\gamma) = \frac{\lambda}{\mu r-\lambda} \tag{6.2.28}$$

Sajnos a (6.2.12)-ben megadott *f* függvény inverzének nincsen zárt alakja. Ezért $p_n(t)$, $p_n^{(1)}(t)$ és $p_n^{(2)}(t)$ függvényeket csak numerikus úton lehet meghatározni. A generátorfüggvényeket ki kell számolni l_1+1 pontban, ahol l_1 a rövidebbik szekvencia hossza. Ehhez a

$$f(\xi)e^{-(\mu r-\lambda)t} = \frac{(1-x)^r}{(\mu-ax)^{\lambda/a}} \tag{6.2.29}$$

egyenletet kell numerikusan megoldani *x*-re, adott ξ, μ, λ, *r*, *t* és *a* mellett. Ha adva van l_1+1 pont, akkor a generátorfüggvényeket numerikusan kell deriválni l_1-szer. Ezután

$$p_n(t) = \frac{\partial^n P(\xi,t)}{\partial\xi^n}\frac{1}{n!} \tag{6.2.30}$$

és hasonlóan a $p_n^{(1)}(t)$ és $p_n^{(2)}(t)$ függvényekre. A numerikus deriválást igen nagy pontossággal kell végrehajtani, mert a hiba mértéke a deriválások számával exponenciálisan nő. A számításhoz nem elégséges az ismert programozási nyelvek, mint pl.: C, Fortran, Delphi számábrázolása. Az algoritmus leprogramozásához több egész típusú változó segítségével kell megoldani a valós számok ilyen pontosságú ábrázolását. Az algoritmus gyorsításához érdemes felső határt szabni az illesztésben előforduló indel-ek hosszának, így nem szükséges annyi deriváltat kiszámolni, mint amennyi a szekvencia hossza

A kapcsoltsági valószínűséget dinamikus programozási algoritmussal lehet meghatározni. Tegyük fel, hogy a *B* szekvencia a rövidebb. Az *A* szekvencia egyensúlyi valószínűsége

$$P_\infty(A) = (\mu - a)^{\lambda/a} \frac{\prod_{i=0}^{|A|-1}(\lambda + ia)}{|A|!\,\mu^{(\lambda+|A|a)/a}} \prod_{i=1}^{|A|} \pi(a_i) \qquad (6.2.31)$$

A dinamikus programozási algoritmus kezdeti feltételei

$$P_t(A_0 | B_j) = p_{j+1}(t) \prod_{k=1}^{j} \pi(b_k) \qquad (6.2.32)$$

Az algoritmus gyorsabbá tehető, ha előre kiszámoljuk a $\prod_{k=l}^{j} \pi(b_k)$ értékeket minden $l<j$-re. Ezután a rekurzió

$$\begin{aligned} P_t(A_i | B_j) &= \sum_{l=0}^{j} P_t(A_{i-1} | B_l)\, p_{j-l}^{(2)}(t) \prod_{k=l+1}^{j} \pi(b_k) + \\ &+ \sum_{l=0}^{j-1} P_t(A_{i-1} | B_l)\, p_{j-l}^{(1)}(t)\, f_{a_i b_{l+1}} \prod_{k=l+2}^{j} \pi(b_k) \end{aligned} \qquad (6.2.33)$$

Így a dinamikus programozási algoritmus futási ideje O(n^3).

A beszúrás-törlést ebben a modellben három paraméter segítségével írtuk le, nevezetesen μt, λt, és *r* segítségével. A maximum likelihood paramétereket numerikus optimalizálással lehet meghatározni, pl. a gradiens módszerrel. A három paramétert azonban le lehet csökkenteni kettőre, ha figyelembe vesszük a következő egyenlőséget

$$\frac{\lambda}{\mu r - \lambda} = \frac{|A| + |B|}{2} \qquad (6.2.34)$$

azaz az adott szekvenciák hosszának az átlaga a szekvenciahossz várható értékének a maximum likelihood becslése.

6.3 Többszörös törlések modellezése

A többszörös beszúrással ellentétben a többszörös törlés modellezése lényegesen több problémába ütközik. Ugyanis legyen $E_1(\Delta t)$ az az esemény, hogy t és t+Δt között bármilyen törlés következik be egy A szekvenciában, $E_2(\Delta t)$ pedig az az esemény, hogy t és t+Δt között az A szekvencia egy adott halandó linkje törlődik, vagy egyedül, vagy többedmagával. Ha ezen két esemény valószínűségére feltesszük, hogy

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(E_1(\Delta t))}{\Delta t} = c_1 |A| \tag{6.31}$$

és

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(E_2(\Delta t))}{\Delta t} = c_2 \tag{6.3.2}$$

ahol c_1 és c_2 konstansok, tehát az összesített törlési ráta legyen egyenesen arányos a szekvencia hosszával, egy halandó link törlése pedig legyen független a szekvencia hosszától, és attól, hogy a link hol helyezkedik el a szekvenciában, akkor a Thorne-Kishino-Felsenstein modell az egyetlen modell, amely ezeket a feltételeket teljesíti. Azaz nincs olyan modell, amely teljesíti az (6.3.1) és (6.3.2) feltételeket, és megengedi több link egyszerre való törlését. Azonban létezik egy modell, amely megenged többszörös törléseket, teljesíti a (6.3.2) feltételt és a következő feltételt:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(E_1(\Delta t))}{\Delta t} = c_1 |A| + c' \qquad \text{ha } |A| \geq 1 \tag{6.3.3}$$

Ebben a modellben egy szekvenciára úgy gondolunk, mint egy ismeretlen végtelen hosszú szekvencia egy ismert darabjára. A végtelen szekvencia bármely n hosszúságú darabja törlődhet, $\mu r^2(1-r)^{n-1}$ rátával. Megmutatható, hogy ekkor

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(E_1(\Delta t))}{\Delta t} = \mu\left[1 + r\left(|A| - 1\right)\right] \qquad \text{ha } |A| \geq 1 \tag{6.3.4}$$

A folyamatot leíró (végtelen) differenciálegyenletben n=1-től minden egyenlet tartalmaz egy

$$-\mu(1+(n-1)r)x_n \tag{6.3.5}$$

tagot. A parciális differenciálegyenletben az ezekből származó kifejezés

$$\mu\left[-(1-r)P(\xi,t) + (1-r)x_0 - \frac{\partial P(\xi,t)}{\partial \xi} r\xi\right] \tag{6.3.6}$$

Ha egy szekvenciából egy szakasz törlődik, akkor ezáltal egy rövidebb szekvencia gyakorisága nő. A parciális differenciálegyenletben ez a következő táblázat kékkel jelölt kifejezéseivel íródik le. Minden cellát meg kell még szorozni az adott sor elején és az adott: oszlop tetején levő kifejezéssel és még μ-vel. A táblázat természetesen folytatódik jobbra és lefelé a végtelenségig:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	$\frac{1}{(1-r)}$	1	(1-r)	$(1-r)^2$	$(1-r)^3$	$(1-r)^4$
ξ	$\frac{2r}{(1-r)^2}$	$\frac{2r}{(1-r)}$	2r	2r(1-r)	$2r(1-r)^2$	$2r(1-r)^3$
ξ^2	$\frac{2r+r^2}{(1-r)^3}$	$\frac{2r+r^2}{(1-r)^2}$	$\frac{2r+r^2}{(1-r)}$	$2r+r^2$	$(2r+r^2)(1-r)$	$(2r+r^2)(1-r)^2$
ξ^3	$\frac{2r+2r^2}{(1-r)^4}$	$\frac{2r+2r^2}{(1-r)^3}$	$\frac{2r+2r^2}{(1-r)^2}$	$\frac{2r+2r^2}{(1-r)}$	$2r+2r^2$	$(2r+2r^2)(1-r)$
ξ^4	$\frac{2r+3r^2}{(1-r)^5}$	$\frac{2r+3r^2}{(1-r)^4}$	$\frac{2r+3r^2}{(1-r)^3}$	$\frac{2r+3r^2}{(1-r)^2}$	$\frac{2r+3r^2}{(1-r)}$	$2r+3r^2$

Először meghatározzuk a teljes táblázat összegét, ezután vonjuk le a feketével jelölt kifejezéseket. A teljes táblázatot soronként adjuk össze. Ez:

$$\begin{aligned}
&\mu P(1-r,t)\left[\frac{1}{(1-r)}+\frac{2r\xi}{(1-r)^2}+\frac{(2r+r^2)\xi^2}{(1-r)^3}+\frac{(2r+2r^2)\xi^3}{(1-r)^4}+\frac{(2r+3r^2)\xi^4}{(1-r)^5}+\ldots\right]=\\
&\mu P(1-r,t)\left[\frac{1}{(1-r)}+\frac{2r\xi}{(1-r)^2}\frac{(1-r)}{(1-r-\xi)}+\frac{r^2\xi^2}{(1-r)^3}\frac{(1-r)^2}{(1-r-\xi)^2}\right]=\\
&\mu P(1-r,t)\frac{(1-\xi)^2(1-r)}{(1-r-\xi)^2}
\end{aligned} \tag{6.3.7}$$

Az első átló levonása:

$$\begin{aligned}
&-\mu\frac{2r-r^2}{1-r}\frac{\partial P(\xi,t)}{\partial\xi}-\mu\left(\frac{1}{1-r}-\frac{2r-r^2}{1-r}\right)x_0=\\
&-\mu\frac{2r-r^2}{1-r}\frac{\partial P(\xi,t)}{\partial\xi}-\mu(1-r)x_0
\end{aligned} \tag{6.3.8}$$

Vegyük észre, hogy a (6.3.6) és a (6.3.8) képletekben szereplő x_0-t tartalmazó tagok éppen kiejtik egymást, így a parciális differenciálegyenletben nem fog x_0-t tartalmazó kifejezés szerepelni.

A többi átló levonásával az összes levonandó tag összege a következőképpen alakul:

$$-\mu(1-r)x_0-\mu P(\xi,t)\frac{r(1-r)(2-r-2\xi)}{(1-r-\xi)^2}-\mu\frac{\partial P(\xi,t)}{\partial\xi}\frac{r^2\xi}{(1-r-\xi)} \tag{6.3.9}$$

Összeadva (6.3.6)-ot (6.3.7)-et és (6.3.9)-et a következő kifejezés írja le a többszörös törlés folyamatát a parciális differenciálegyenletben.

$$-\mu\frac{\partial P(\xi,t)}{\partial\xi}\frac{r(1-r)\xi}{(1-r-\xi)}+\mu\left[P(1-r,t)-P(\xi,t)\right]\frac{(1-r)(1-\xi)^2}{(1-r-\xi)^2} \tag{6.3.10}$$

Ehhez hozzávéve a többszörös beszúrásokat

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(\xi,t)}{\partial\, t}&=\frac{\partial P(\xi,t)}{\partial\xi}\left[\lambda\frac{\xi(1-\xi)}{1-(1-r)\xi}-\mu\frac{r(1-\xi)\xi}{1-r-\xi}\right]+\\&+P(\xi,t)\left[\lambda\frac{(1-\xi)}{1-(1-r)\xi}-\mu\frac{(1-r)(1-\xi)^2}{(1-r-\xi)^2}\right]+P(1-r,t)\mu\frac{(1-r)(1-\xi)^2}{(1-r-\xi)^2}\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

(6.3.11) megoldásait

$$P(\xi,t)=f(\xi)g(t) \tag{6.3.12}$$

alakban keressük. Ekkor a parciális differenciálegyenlet a

$$\begin{aligned}g'(t)f(\xi)&=f'(\xi)g(t)\left[\lambda\frac{\xi(1-\xi)}{1-(1-r)\xi}-\mu\frac{r(1-\xi)\xi}{1-r-\xi}\right]+\\&+f(\xi)g(t)\left[\lambda\frac{(1-\xi)}{1-(1-r)\xi}-\mu\frac{(1-r)(1-\xi)^2}{(1-r-\xi)^2}\right]+f(1-r)g(t)\mu\frac{(1-r)(1-\xi)^2}{(1-r-\xi)^2}\end{aligned} \tag{6.3.13}$$

alakra hozható. Ezt átrendezve

$$\begin{aligned}g'(t)kf(\xi)&=kg(t)\left\{f'(\xi)\left[\lambda\frac{\xi(1-\xi)}{1-(1-r)\xi}-\mu\frac{r(1-\xi)\xi}{1-r-\xi}\right]+\right.\\&\left.+f(\xi)\left[\lambda\frac{(1-\xi)}{1-(1-r)\xi}-\mu\frac{(1-r)(1-\xi)^2}{(1-r-\xi)^2}\right]+f(1-r)\mu\frac{(1-r)(1-\xi)^2}{(1-r-\xi)^2}\right\}\end{aligned} \tag{6.3.14}$$

ahol k a szeparációs konstans. Szétszedve a t-től és ξ-től függő tagokat

$$g'(t) = kg(t)$$
$$kf(\xi) = f'(\xi)\left[\lambda\frac{\xi(1-\xi)}{1-(1-r)\xi} - \mu\frac{r(1-\xi)\xi}{1-r-\xi}\right] +$$
$$+ f(\xi)\left[\lambda\frac{(1-\xi)}{1-(1-r)\xi} - \mu\frac{(1-r)(1-\xi)^2}{(1-r-\xi)^2}\right] + f(1-r)\mu\frac{(1-r)(1-\xi)^2}{(1-r-\xi)^2} \tag{6.3.15}$$

differenciálegyenlet rendszerhez jutunk. (6.3.11) általános megoldása (6.3.15) megoldásaiból képzett (6.3.12) alakú függvényeknek tetszőleges lineáris kombinációja. Sajnos a (6.3.15) egyenlet olyan határozatlan integrálhoz vezet, amit analitikusan nem lehet megoldani.

6.4 Poisson eloszlású sorban állási rendszer

A TKF91 rendszer átírásából származó sorban állási rendszerben előforduló sorban állási magatartás általában nem jellemző. Ha a modellben megtartjuk a végtelen sok kiszolgálási egységet, de a vevők érkezését a sor hosszától függetlennek tekintjük, akkor a jól ismert M/M/∞ rendszerhez jutunk. A rendszer jelölésében a két M azt jelöli, hogy mind az érkezés, mind a kiszolgálás Poisson folyamat, a ∞ szimbólum pedig a végtelen sok kiszolgálóegységre utal. A folyamat tranziens viselkedése már régóta ismert (Sneddon, 1957). $p_n(t)$ jelölje annak a valószínűségét, hogy a t időpontban n vevő tartózkodik a rendszerben. A folyamatot leíró differenciálegyenlet rendszer

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda + n\mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t) \tag{6.4.1}$$

Bevezetve a

$$P(\xi,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)\xi^n \tag{6.4.2}$$

generátorfüggvényt, a már ismert eljárással a

$$\frac{\partial P(\xi,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(\xi,t)}{\partial \xi}\mu(1-\xi) + P(\xi,t)\lambda(\xi-1) \tag{6.4.3}$$

parciális differenciálegyenlethez jutunk. A karakterisztikák módszerével dolgozva

$$\frac{dt}{1}=\frac{d\xi}{\mu(\xi-1)}=\frac{dP}{P\lambda(\xi-1)} \tag{6.4.4}$$

rendszerből

$$(\xi-1)e^{-\mu t}=C_1$$
$$Pe^{-\frac{\lambda}{\mu}\xi}=C_2 \tag{6.4.5}$$

megoldásokhoz jutunk. A

$$p_n(0)=\delta_{n,k} \tag{6.4.6}$$

kezdeti feltételt teljesítő megoldás

$$P(\xi,t)=\left[(\xi-1)e^{-\mu t}+1\right]^k e^{-\frac{\lambda}{\mu}(\xi-1)\left(1-e^{-\mu t}\right)} \tag{6.4.7}$$

Vegyük észre, hogy az első szorzótényező egy $e^{-\mu t}$ paraméterű binomiális eloszlás generátorfüggvénye, a második szorzótényező pedig egy $\frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-\mu t}\right)$ paraméterű Poisson eloszlás generátorfüggvénye. A folyamat tehát bármely állapotból $\frac{\lambda}{\mu}$ paraméterű Poisson eloszlásba konvergál. Az, hogy a tranziens folyamat miért az előbb említett két eloszlás szuperpozíciója könnyen megmagyarázható. A t=0 időpontban jelen levő halandó linkek μ rátával halnak meg, függetlenül attól, hogy közben hány új link születik, és hány link hal meg. t idő elteltével a még életben lévő ősi linkek száma éppen $e^{-\mu t}$ paraméterű binomiális eloszlást fog mutatni. A másik szorzótényező, a Poisson eloszlású rész, pedig a t=0 időpontban még nem élt linkek számát adja meg, ami valóban független attól, hogy az adott pillanatban hány ősi link élt túl. Ezek szerint annak a valószínűsége, hogy a kezdeti k linkből előre megadott n link él túl t idő elteltével, és az összes többi link száma l

$$p_{\mathbf{k},l}(t)=\left(e^{-\mu t}\right)^n\left(1-e^{-\mu t}\right)^{k-n} e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-\mu t}\right)}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-\mu t}\right)\right)^l}{l!} \tag{6.4.8}$$

ahol $\mathbf{k}$ egy k dimenziós (0,1) feletti vektor, melyben az 1 reprezentálja a túlélt ősi linkeket, 0 a meghalt kező linkeket, és $\mathbf{k}^2=n$.

A statisztikus szekvencia illesztésben nem elég megmondani azt, hogy melyik link élt túl, melyik halt meg, és *összesen* hány újonnan született link van, hanem az újonnan született linkeknek az eloszlását is meg kell mondani, azaz, hogy melyik ősi linknek hány leszármazottja van. A differenciálegyenletbe behelyettesítve megmutatható, hogy ameddig minden ősi link túlél, addig bármely olyan specifikus leszármazási viszonynak a valószínűsége, amelyben az összes újonnan született link száma l

$$p_l(t) = \left(e^{-\mu t}\right)^k e^{-\frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-\mu t}\right)} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-\mu t}\right)\right)^l}{l!\binom{k+l}{k}} \tag{6.4.9}$$

azaz ez a valószínűség független attól, hogy melyik ősi linknek pontosan hány leszármazottja van, csupán a leszármazottak összegétől függ. k darab ősi linket és ezek l leszármazottját pontosan $\binom{k+l}{k}$ féleképpen lehet sorba rakni, azaz amíg minden link túlél, addig minden adott hosszúságú leszármazási viszonynak ugyanakkora a valószínűsége.

A többi leszármazási viszony valószínűségének a kiszámításához szükség lenne egy egyetlen halandó linkből kiinduló folyamat állapotainak a leírására. Ezt a folyamatot leíró differenciálegyenlet rendszer

$$\begin{aligned}
\frac{dp_n(t)}{dt} &= -(\lambda + n\mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t), \quad n \geq 2 \\
\frac{dp_1(t)}{dt} &= -(\lambda + n\mu)p_1(t) + 2\mu p_2(t), \\
\frac{dp_0(t)}{dt} &= \mu p_1(t)
\end{aligned} \tag{6.4.10}$$

A generátorfüggvény segítségével kapott parciális differenciálegyenlet

$$\frac{\partial P(\xi,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(\xi,t)}{\partial \xi}\mu(1-\xi) + P(\xi,t)\lambda(\xi-1) - P(0,t)\lambda(\xi-1) \tag{6.4.11}$$

Ha a megoldásokat $f(\xi)g(t)$ alakban keressük, akkor

$$g'(t)f(\xi) = f'(\xi)g(t)\mu(1-\xi) + f(\xi)g(t)\lambda(\xi-1) - f(0)g(t)\lambda(\xi-1) \tag{6.4.12}$$

Szeparálván (6.4.12)-t, a kapott differenciálegyenlet rendszer

$$g'(t) = kg(t)$$
$$kf(\xi) = f'(\xi)\mu(1-\xi) + f(\xi)\lambda(\xi-1) - f(0)\lambda(\xi-1) \tag{6.4.13}$$

Sajnos a (6.4.13) rendszer $f(\xi)$-re vonatkozó differenciálegyenletének csak pozitív egész k szeparációs állandó esetén van zárt alakú megoldása. Sajnos pont pozitív k-kra a

$$P(\xi,t) = e^{kt} f(\xi) \tag{6.4.14}$$

megoldások bizonyosan 0 együtthatóval szerepelnek a generátorfüggvényben, mivel tudjuk, hogy bármely, a

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 0,$$
$$p_n(t) \geq 0, \quad \forall n \tag{6.4.15}$$

kezdeti feltételt kielégítő megoldásra

$$\lim_{t\to\infty} P(\xi,t) = 1 \tag{6.4.16}$$

hiszen a 0 hosszúságú állapot nyelő.

Az, hogy a (6.3.15) és a (6.4.13) egyenleteknek nincsen zárt megoldása, még nem jelenti azt, hogy esetleg végtelen függvény alakban ne lehetne megtalálni a megoldást. A legismertebb példa erre a sztochasztikus sorban állási rendszerek elméletében az M/M/1 rendszer. Ebben a rendszerben egyetlen kiszolgáló egység van, és mind a beérkezés, mind a kiszolgálás Poisson folyamat. Az egyes állapotok valószínűségeiből képzett generátorfüggvény parciális differenciálegyenlete

$$\frac{\partial P(\xi,t)}{\partial t} = \left(\lambda - \frac{\mu}{\xi}\right)(\xi-1)P(\xi,t) + P(0,t)\mu\left(1-\frac{1}{\xi}\right) \tag{6.4.17}$$

Habár ez a parciális differenciálegyenlet $f(\xi)g(t)$ alakú megoldásai minden k szeparációs állandóra megoldhatóak, nem világos, hogy az így kapott megoldások milyen lineáris megoldásai elégítik ki a $P(\xi,t)= \xi^n$ feltételt. A rendszer tranziens viselkedése mégis megadható. Ehhez venni kell a (6.4.17) rendszer Laplace transzformáltját. A kapott egyenletből $P(\xi,t)$ megfelelő kezdeti feltételt kielégítő megoldásának a Laplace transzformáltja meghatározható. Inverz Laplace transzformációval $P(\xi,t)$ is megkapható, és megmutatható, hogy

$$p_{i,k}(t)=e^{-(\lambda+\mu)t}\left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{k-i}{2}}I_{k-i}(2\sqrt{\lambda\mu t})+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{k-i-1}{2}}I_{k+i+1}(2\sqrt{\lambda\mu t})+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{t}\sum_{j=k+i+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-\frac{j}{2}}I_j(2\sqrt{\lambda\mu t})\right) \tag{6.4.18}$$

ahol $p_{i,k}(t)$ annak a valószínűsége, hogy egy kezdő időpontban i vevőt tartalmazó rendszer t idő elteltével k vevőt fog tartalmazni és

$$I_j(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{j+2m}}{(j+m)!\,m!} \qquad j\geq 0 \tag{6.4.19}$$
$$I_j=I_{-j}$$