Feladatmegoldó szeminárium, 2008-09 II. félév

Simonovits Miklós / Győri Ervin

2009 április

A vizsgához:
A feladatokat részben kiegészítettem definiciókkal, megoldási ötletekkel, lehet, hogy a konzultációig még néhány apróbb csiszolást átvezetek, további kisebb segítséget is begépelek.

Sajtóhibák:
A konzultáción az derült ki, hogy a kijelölt feladatokban voltak olyan elírások, amelyek zavaróknak bizonyultak. Három ilyet itt felsorolok:

- A Leibniz sorokra vonatkozó tételnél (12.1. feladat) lemaradt, hogy $a_n \to 0$, így nem is igaza tétel. (Mutassuk meg, hogy így nem is igaz.)
- 6.1. feladatban az, hogy f-nek nincs legkisebb periódusa azt jelentette, hogy van periódusa, de nincs legkisebb. (Beiktattam oda egy segítő megjegyzést,)
- A P_3 extremális számára vonatkozó feladatben (helytelenül) P_3 a 3 élű gráfot jelöli, én mindig P_4-gyel jelölöm ezt a 4 pontú gráfot. A 25.5 feladatban tehát a 3 élű gráfról van szó, és helyesen ez P_4 lenne, most már erre át is javítottam. A helyes szöveg:

Mutassuk meg, hogy
$$\mathbf{ex}(n, P_4) \le n.$$
Mutassuk meg, hogy ez (gyakran éles)

Időpont: péntekenként, 14.15-15.45

Hely: ELTE TTK, Déli tömb 0-220

Email címem: miki@renyi.hu.

Bevezető a 2. félévhez

Az itt leírtak elsősorban azoknak szólnak, akik most kezdik a feladatmegoldó szemináriumot.

A feladatmegoldó szeminárium filozófiája az, hogy kell egy szeminárium, ahol

• a matematikából válogatott fejezeteket, gyöngyszemeket tárgyalunk
• ahol nehéz/fontos feladatokat tárgyalunk
• ahol valóban lehet arra számítani, hogy a hallgatók szeretik a matematikát és szabadidejükből is szivesen áldoznak szép tételek megértésére.

A formátum:

• Megbeszélünk valami elméleti kérdést.
• Megbeszélünk valahányat a hallgatók által megoldott, vagy érdekesnek, de nehéznek tartott feladatokból, nem teljes részletességgel, hanem annyira részletesen, hogy az érdeklődő hallgató a részleteket átgondolhassa.
• Feladok új feladatokat, feladatsorokat,

Feladatsorok

Akkor alkalmazunk feladatsorokat, ha valamelyik matematikailag fontos tétel átgondolását feladatsorokra bontjuk.

Ilyenkor először jön a végcél, a tétel, majd az egyes feladatok.

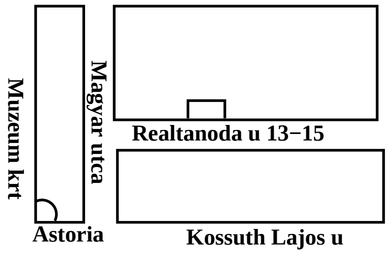
Véletlen bolyongás a matematikában

Pólya története

Aktuális üzenetek: /visszafele

Vizsgaidőpont: május 29 4h (du 4 órakor, hogy ez senkinek se ütközzön). A pontos helyet a tanulmányi osztály visszajelzése után írom meg, valószínűleg a szokott 0-220-as teremben. Itt javítottam a kirakott feladatsorozatokon azzal, hogy további definiciók, ötletek, stb kiegészitéssel láttam el.

Konzultáció: május 27, MTA Matematikai Kutató Intézet, du 6h, Reáltanoda u, 13-15, I. emelet. (Astoriától v. Ferenciek terétől 5 perc gyalog, a Kossuth Lajos utcával párhuzamos utca a Kálvin tér felé.



A jelen file állandó változásban van. Rendszerint hetente egyszer bővítem. Az új dolgokat ide az elejére fogom írni, majd innen bevándorolnak a feladatgyűjtemény megfelelő alfejezeteibe.

Amikor Lovász László megírta kombinatorika feladatgyűjteményét, [5], [6] amelyik – szerintem – hasonló alapelveket követ, mint a mi szemináriumunk, sok kitűnő kombinatorikus egyik alapkönyvévé változott. Idén ebből is fogunk feladatokat oldogatni, sokkal korábban Füredi Zoltán már tartott feladatmegoldó szemináriumot belőle. Mivel többször leszek külföldön, ezt a részt Győri Ervin fogja tartani, olyankor, amikor nem vagyok itthon.

A kombinatorika iránt érdeklődőknek érdemes a Lovász könyvet megvenniük, egyébként a mi céljainkra nézhető/letölthető az alábbi címről:

`http://www.tankonyvtar.hu/main.php?objectID=5757769`

Ezeket jogi okokból nem volna helyes ide bemásolnom. Néhány feladat persze, mint közkincs eleve szerepel az alábbiakban.

Győri Ervin a következő feladatokat tárgyalta:
1. Minden G-ben van félélszámú páros (véletlen vágás illetve algoritmus)
2. Háromszögmentes G párossá tehető $n^2/16$ él elhagyásával.

Lovász könyv 10. fejezetből 1,2,3,30,31,32,33,35,36(a)

1. Új mese

Mikor jó a Taylor soros generátorfüggvény és mikor használjuk a

$$\sum \frac{a_n}{n^s}$$

alakú generátorfv-t?

- A Taylor soros a konvolúciós rekurziókra jó,
- a Dirichlet sorok pedig a számelméleti kérdéseknél.
- Hogyan jön ehhez a Moebius fv?

2. Új feladatok

1.1. Feladat: Adjunk meg olyan fv-t, amelyik differenciálható [0,1]-ben, de a deriváltja nem folytonos 0-ban. [1]

1.2. Feladat: Adjunk meg olyan fv-t, amelyiknek 0 szélsőértékhelye, de a deriváltja a 0 akármilyen kis környezetében előjelet vált. [GO50/4] [2]

1.3. Feladat: Adjunk meg olyan differenciálható f-et [0,1]-ben, amelyikre $f'(0) > 0$, de f nem monoton 0 semelyik környezetében sem. [GO51/5] [3]

1.4. Feladat: Adjunk meg olyan függvényt, amelyik a [0,1] intervallumon Riemann-integrálható,[1] de semelyik részintervallumán nincs primitív fv-e. [4] $\Longleftarrow$ Vizsga: 1

[Legyen f az irracionális számokban 0, a (p/q)-ban $1/q$.]

Algebra alaptétele

Ez a rész még egy kicsit túl tömör, még bővülni fog, csak nem akartam nagyon halasztgatni a kirakását.

Definició 1 (Egész függvények)**.** *Egy $f(z)$ függvényt egész függvénynek nevezünk, ha minden $a \in \mathbb{C}$ komplex pontban komplex differenciálható: létezik a*

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

1.5. Feladat: Mutassuk meg, hogy minden polinom egész függvény. [5] $\Longleftarrow$ Vizsga: 2

Megjegyzés 1. *Ez a feladat nem igényel semmi különösebb alaptudást. Ha bárhogy is be tudjuk bizonyítani, hogy a polinomok az egész számegyenesen differenciálhatók, az a bizonyítás majdnem biztos, hogy változatlanul átmegy az egész komplex síkra. Az egyik lehetőség a következő feladatok megoldása.*

1.6. Feladat: Mutassuk meg, hogy az $f(z) = cz+d$ a sík forgatva nagyítása és eltolása. [6]

1.7. Feladat: Mutassuk meg, hogy $f(z) = cz + d$ fv. az egész síkon differenciálható. [7]

1.8. Feladat: Mutassuk meg, hogy z^k az egész síkon differenciálható. [8]

1.9. Feladat: Mutassuk meg, hogy ha f és g az egész síkon differenciálható, akkor az összegük, szorzatuk is az egész síkon differenciálható. Mi a helyzet f/g-vel? [9]

Múlt félévben az algebra egyik bizonyítását a minimum-elv segítségével adtuk meg. Most egy topológiai bizonyításba megyünk bele, azonban ez a topológiai bizonyítás egy az analítikus függvényekre vonatkozó bizonyítás elemibbé tételéből jön. Első menetben vázoljuk az analítikus függvényekre vonatkozó módszert: Rouché tételének bizonyítását, majd kivesszük belőle a komplex számokat, hogy elemivé tegyük. Amikor analítikus függvényekről beszélünk, itt mindíg szorítkozhatunk polinomokra a komplex síkon, illetve, általánosabban egész függvényekre,. . .

Definició 2.

$$\oint_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta := \lim \sum f(\zeta_j)(\zeta_j - \zeta_{j-1}).$$

1.10. Feladat: Mutassuk meg, hogy $\oint z^n d\,z = 0$ $n \neq -1$-re. Mi a helyzet $n = -1$-re? [10]

Definició 3. *Legyen X egy nyílt halmaz $\mathbb{C}$-ben, azaz, a komplex síkon. Jelölje $N(f, X)$ az f függvény 0-helyeinek számát az X-ben.*

---

[1] Az, hogy egy függvény Riemann integrálható, ugyanaz, mint amit az első évben egyszerűen integrálhatónak mondunk. Azért mondjuk Riemann integrálhatónal, hogy megkülöböztessűk a később, a Valós Függvénytanban tanulandó Lebesgue integrálhatóságtól. Az utóbbi a felsőbb matematikában sokkal jobban használható.

Definició 4. *Nevezzünk egy nyílt X halmazon megadott $f : X \to \mathbb{C}$-t ott regulárisnak, ha*

Bizonyításvázlat: Mutassuk meg, hogy

$$N(f, D) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \, d\zeta$$

Mutassuk meg, hogy $N(f + \lambda g, D)$ folytonos $\lambda \in [0, 1]$.

---

2. Feladatsor: (Algebra alaptétele/Rouché tétele) Rouche tétele: Ha adott egy Γ Jordán görbe által határolt tartomány, D és két ennek lezárásán folytonos, belül reguláris függvény, f és g, akkor, ha ha Γ-n

$$|f(z)| > |g(z)|$$

(mindenütt), akkor

$$N(f, D) = N(f + g, D).$$

2.1. Feladat: Miért kell? [11]

2.2. Feladat: Mire jó? Bizonyítsuk be belőle az algebra alaptételét. [12]

2.3. Feladat: (Teljes szögelfordulás definíciója)
Adott Γ Jordan görbe és egy P pont a belsejében. Bizonyítandó, hogy: Ha $\rho(\Gamma, P)$-nél kisebb átmérőjű részívekre bontjuk Γ-t a_i pontokkal, akkor a $\sum_i a_i P a_{i+1} \angle$ a továbbfinomításoknál már nem változik. Ezt az összeget nevezzük teljes szögelfordulásnak. [13]

2.4. Feladat: Teljes szögelfordulás és a gyökök.
Mutassuk meg, hogy z^n teljes szögelfordulása 0-ra $2\pi n$. [14]

2.5. Feladat: A teljes szögelfordulás additívitása: Mutassuk meg, hogy ha a $P(z)$ a $|z| = R$ körvonalon a 0-t k-szor kerüli meg, $Q(z)$ a $|z| = R$ körvonalon ℓ-szer, akkor $P(z)Q(z)$ a $|z| = R$ körvonalon a 0-t $k + \ell$-szer kerüli meg. [15]

2.6. Feladat: Bizonyítsuk be Rouche tételét (legalábbis polinomokra) a teljes szögelfordulás segítségével. [16]

Mese a bolyongásról

...

2.7. Feladat: Mi a valószínűsége annak, hogy a $2n$-edik lépésben érünk először vissza a 0-ba? [17]

---

3. Feladatsor: (Weierstrass féle approximációs tétel) Bizonyítsuk be, hogy $|x|$ approximálható ε pontossággal polinommal a [-1,1] intervallumon.

Alapötlet: $y^2 = x^2$ pozitív megoldását akarjuk közelíteni, a közelítést rekurzióra vezetjük vissza, ahol a rekurzióban polinomok lesznek a közelítések.

$y = 1 - z$

$$1 - 2z + z^2 = x^2$$

$$z = \frac{1}{2}(z^2 + (1 - x^2)).$$

$$z(x) = 1 - |x|.$$

Szuccesszív approx: $z_0(x) \equiv 1$.

(L. Szőkefalvi [9], p68, ahol Szőkefalvi azt is leírja, hogy az adott tételnek van két másik bizonyítása is...)

3.1. Feladat: Newton Approximáció a gyökvonásra [18]

3.2. Feladat: Köbgyökvonás [19]

3.3. Feladat: Mátrix invertálás közelítő invertálással, majd iteratív approximációval. [20]

3.4. Feladat: Mutassuk meg, hogy ha az $|x|$ függvényt tudjuk approximálni a $[-1, 1]$ zárt intervallumon, akkor minden töröttvonal-függvényt tudunk approximálni. [2] [21]

3.5. Feladat: Mutassuk meg, hogy ha minden szakaszonként lineáris függvényt tudunk polinommal approximálni, akkor minden $[a, b]$-n folytonos függvényt tudunk polinommal approximálni. [22]

3.6. Feladat: Mutassuk meg, hogy nincs olyan polinom, amelyik a $\sin x$-et $\varepsilon = 1$ pontossággal approximálja $(-\infty, \infty)$-n. [23]

---

[2] A töröttvonal-függvényt valójában folytonos, szakaszonként lineáris függvénynek kellene neveznünk: olyan $[a, b]$-n folytonos függvény, amelyre $[a, b]$ véges sok intervallumra bontható úgy, hogy a függvény mindegyiken lineáris.

Ez a feladatsor még befejezetlen: azt, hogy a $f(x) = |x|$ polinommal approximálható, még nem bontottuk fel részfeladatokra, csak az alapötletet fogalmaztuk meg nagyon vázlatosan.

Az alábbi feladatsorhoz szükségünk lesz egy tételre:

Tétel 1. *Ha a $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány minden pontjában $w = f(z)$ komplex differenciálható, akkor minden $z_0 \in D$ pont körül $f(z)$ hatványsora konvergál minden olyan K körlemezen, amelyik teljesen D-ben van.*

---

4. Feladatsor: ()

Innen többnyire a korábbi anyag található.

Általában sok különböző feladatot tettem ki, látszólag véletlenszerű sorrendben. Ezek közül néhányat, kb 10-15-öt megjelöltem, kiemelt figyelemre, a margón egy számozott nyíllal, mint itt:

Az oldal a szeminárium végéig fejlesztés alatt áll, a már elolvasott részei is változhatnak: általában bővülnek.

Az alábbiakban található feladatokból fogunk kiválasztani néhányat, azokról fogunk beszélgetni most pénteken. Készakarva több feladatot teszek ki, a valóságban mindig csak a feladatok egy részére kerül sor.

Az alábbi oktatási anyag, nincs túlcsiszolva, pl. elírások, magyar ékezetek sincsenek mindig rendbetéve.

Sőt, feltehetően a feladatokba hibás feladatok is bekerültek, nem készakarva, hanem a figyelmetlenségem miatt!

Abban is nagyon fog még változni az anyag, hogy

- bizonyos befejezetlen feladatsorokat még fogunk folytatni, majd befejezni,
- A feladatokhoz adott kísérő szövegek is változni fognak, többnyire bővülni,
- néhol nehézségjelzésekkel fogom a feladatokat ellátni,
- és mivel az anyag automatikus számozással van ellátva, automatikusan át is fog számozódni: adott fejezetek és feladatok sorszáma is változhat még.

Kiknek szólt a szeminárium?

Ez volt mindenesetre a legnehezebb kérdés. (*) A jelentkezők inhomogén hallgatóságot alkotnak, a végére a hallgatóság homogenizálódik.

Egyszerre hozok könnyebb és nehezebb feladatokat, olyan feladatokat is, amelyekhez kevés előismeret kell, és olyanokat is, amelyekhez több kell.

Tartalomjegyzék

Forma

- Beszélgetés a matematika egyik területéről
- Feladatok/feladatsorok kijelölése
- Feladatok megbeszélése
- Visszatérés korábbi feladatokhoz.

Témák

- Elsősorban analízis
- Topológia (Kapcsolódás az analízishez)
- Konvexitás
- Rendhagyó geometria
- Kombinatorika
- ... és mások

4.1. Feladat: S3 A második, (*)-gal megjelölt mondat hibás. [24]

Alapötlet: Mert nem hallgatóságot, hanem feladatmegoldókat várok a szemináriumra.

3. Geometria

3.1. Feladat: (Nem triviális!) Ha a síkon adott végtelen sok pont és bármely kettő távolsága egész szám, akkor ezek egy egyenesen vannak. Megold: 2 [25]

3.2. Feladat: (Nem triviális) Megadható a síkon végtelen sok pont úgy, hogy ne legyenek egy egyenesen, de bármely kettő távolsága racionális szám legyen. [26]

Megoldás: 2

3.3. Feladat: Megadható a síkon akárhány pont úgy, hogy bármely kettő távolsága egész, de nem adható meg végtelen sok. [27]

3.4. Feladat*: Bizonyítandó, hogy egy kör pontjaiból nem szerkeszthető meg a középpontja csak vonalzóval. (Steinhaus, Matematikai kaleidoszkóp) (Megfogalmazandó, mit is jelent pontosan ez a feladat.)

Alapötlet: Keresendő két kör és egy leképezés köztük a térben, amelyik egyenestartó, és a középpontot nem viszi a középpontba.

---

4. Feladatsor: () Bizonyítsuk be, hogy egy R sugarú n-dimenziós gömb felületén megadott m pont konvex burka, K lefedhető m darab 1/2 sugarú gömbbel. (Elekes.)

4.1. Feladat: Bizonyítsuk be az előbbi állítást 2 dimenzióra. [28]

4.2. Feladat: Bizonyítsuk be az előbbi állítást 3 dimenzióra. [29]

Elekes György ezzel bizonyította, hogy nincs polinomiális algoritmus a térfogat approximálására. (Ezt pontosabban is fogalmazhatnám!) Ezt a feladatsort az Elekes emlékülés elött vettem volna, ha nem marad el ennyi alkalom. Ott Lovász László éppen erről beszélt, ennek a megoldását magyarázta el egyebek között.

4.3. Feladat: Bizonyítandó, hogy minden **szép** síkbeli tartomány eltolható úgy, hogy annyi rácspontot tartalmazzon, mint amekkora a területe. [30]

Megjegyzés 2. *A fenti feladat két szempontból problémás: nem definiáltuk a rácspontokat. Itt rácsponton olyan (x, y) pontot értünk, amelyiknek mindkét koordinátája egész szám.*

Nem mondtuk meg azt sem, hogy mit jelent az, hogy **szép**. *Legegyszerűbb először poligonokkal határolt tartományokra szorítkoznunk, majd átgondolni, mennyire általánosítható. Mindenesetre valamit fel kell tennünk, hiszen vannak olyan halmazok is, amelyeknek nincs szokásos területük. (Azaz, maga a terület is egy nagyon szemléletes, de problémás fogalom. Milyen terület, kérdezné egy 3-adéves hallgató: Riemann terület? Lebesgue terület?)*

Maga a feladat a Steinhaus könyvből való.

Ham sandwich theorem From Wikipedia, the free encyclopedia
In measure theory, a branch of mathematics, the ham sandwich theorem, also called the Stone-Tukey theorem after Arthur H. Stone and John Tukey, states that given n "objects" in n-dimensional space, it is possible to divide all of them in half (according to volume) with a single $(n-1)$-dimensional hyperplane. Here the "objects" should be sets of finite measure (or, in fact, just of finite outer measure) for the notion of "dividing the volume in half" to make sense.
`http://en.wikipedia.org/wiki/Ham_sandwich_theorem`

4.4. Feladat: Legyen Γ egy síkbeli zárt görbe. Mutassuk meg, hogy van olyan köré írt minimális téglalap, amelyik négyzet. [31]

4.5. Feladat: (Ham-sandwich 1) Mutassuk meg, hogy ha adott egy Γ konvex síkgörbe, akkor van olyan egyenes, amelyik a kerületet is, és a területet is felezi. [32]

4.6. Feladat: (Ham-sandwich 2) Mutassuk meg, hogy ha adott két konvex síkidom, D_1 és D_2 egy P közös belső ponttal, akkor van olyan egyenes, amelyik mindegyik területét megfelezi. [33]

Mely feltételek fontosak az előző két problémában?

4. Halmazelmélet

---

5. Feladatsor: () Mutassuk meg, hogy az egységnégyzetnek ugyanannyi pontja van, mint az egységszakasznak.

5.1. Feladat: Mutassuk meg, hogy a 0-1 sorozatok ugyanannyian vannak, mint a belőlük alkotott párok. [34]

4.1. Megszámlálható halmazok

5.2. Feladat: Mutassuk meg, hogy a racionális együtthatós polinomok megszámlálhatóan sokan vannak: sorozatba rendezhetőek. [35]

5.3. Feladat: Mutassuk meg, hogy a racionális töröttvonalak: racionális végpontú intervallumon megadottak, véges sok racionális pontban törnek és ott racionális az értékük megszámlálhatóan sokan vannak: sorozatba rendezhetőek. [36]

5.4. Feladat: Mutassuk meg, hogy a racionális töröttvonalak mindenütt sűrűn vannak $C[0,1]$-ben: Minden f a $[0,1]$-en folytonos függvényhez és minden $\varepsilon > 0$-hoz van ilyen Γ töröttvonal-függvény, hogy

$$|\Gamma(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \text{ha} \qquad x \in [0,1].$$

[37]

Megjegyzés 3. *A legutolsó feladat már nem halmazelmélet, hanem annak egy bizonyítási lépése lehet, hogy a zárt intervallumon folytonos függvények metrikus tere, (l. 17. def., 19.2 Fejezet). ahol a metrika a különbség maximuma, rendelkezik megszámlálható mindenütt sűrű halmazzal: szeparábilis metrikus tér.*

Definició 5. *Egy A végtelen halmaz*

(a) limesz superiorja, $\limsup A$ *az* $\{(a_i) : a_i \in A\}$ *sorozatok maximális határértéke.*

(b) limesz inferiorja, $\liminf A$ *az* $\{(a_i) : a_i \in A\}$ *sorozatok minimális határértéke.*

5.5. Feladat: Igaz-e, hogy

$$\limsup a_n b_n = (\limsup a_n) \cdot (\limsup b_n)?$$

[38]

5.6. Feladat: Tekintsük a korlátos sorozatokon azt a metrikus teret, amelyiknél

$$\mathbf{a} := \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

és

$$\mathbf{b} := \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$$

távolsága

$$\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \sup |a_i - b_i|.$$

Mutassuk meg, hogy ez metrikus tér. Mutassuk meg, hogy nem szeparábilis. Teljes-e? [39]

4.2. Bernstein tétele

Mese: Adott struktúráknak vannak alaptulajdonságai, és akkor mondjuk, hogy két megadott struktúra közül az egyik, A kisebb-egyenlő, mint a másik, B ha A beleképezhető B egy rész-struktúrájába 1-1 értelműen, a tulajdonságok figyelembevételével. Ilyenkor az volna a természetes, ha abból, hogy $A \le B$ és $B \le A$ következne, hogy $A = B$. Ez nem feltétlenül van így. Alább látunk egy esetet, ahol ez így van, és 2 esetet, ahol az nincs így.

Mindenesetre, mindíg definiálnunk kell a $\le$ relációt, és hogy mikor tekintünk két objektumot egyenlőnek.

5.7. Feladat: (Könnyű bevezető) Definiáljuk az A háromszöget (háromszöglemezt) kisebbnek, mint a B, ha A egybevágósággal belevihető B-be. Rendezést kapunk-e? (Tranzitívitás?) Mi a helyzet most a fentiekkel? [40]

5.8. Feladat: Mutassuk meg, hogy ha A beleképezhető 1-1 értelmű módon B egy részébe és B beleképezhető 1-1 értelmű módon A egy részébe, akkor ezek leképezhetőek 1-1 értelműen egymásra. [41]

Megjegyzés 4. *Az előbbi feladatnak az a tartalma, hogy, ha a halmazelméletben, a számosságoknál $A \le B$ és $B \le A$, akkor $A = B$. A háromszögekre is ez áll. Ez nem minden "alaphelyzetben" van így. Erre vonatkozik az alábbi 2 feladat.*

5.9. Feladat: Egy leképezés A és B között topológiai ekvivalencia, ha 1-1-értelmű és oda-vissza folytonos. Igaz-e, hogy ha A topológiailag ekvivalens (=homeomorf) B egy részével és viszont, akkor A és B egymással topológiailag ekvivalensek. (Keressünk erre könnyű ellenpéldát.) [42]

5.10. Feladat: Igaz-e, hogy ha egy A végtelen gráf beleképezhető 1-1-értelműen egy B gráf B' részébe és viszont, B is ráképezhető A egy A' részére akkor A és B között van 1-1-értelmű megfeleltetés. [43]

Megjegyzés 5. *A homeomorfia-feladatokra az intervallumok ellenpéldát adnak. Miért? A fák problémája nem független az intervallumok problémájától, hiszen egy végtelen bináris fán egy végtelen út kódolhat egy valós számot, így a fa maga kódolhatja a valós számok egy részhalmazát. (???)*

5. Függvények

1.1. Feladat: Mutassuk meg, hogy nincs olyan $P(x)$ polinom, amelyik a $[0,\infty)$-en a $\sin x$ függvényt állítaná elő. [44]

1.2. Feladat: Mutassuk meg, hogy nincs olyan $P(x)$ polinom, amelyik a $[0,\infty)$-en a $\sin x$ függvényt állítaná elő. [45]

1.3. Feladat: Mutassuk meg, hogy nincs olyan $P(x)$ polinom, amelyik a $[0,1]$-en a $\sin x$ függvényt állítaná elő. [46]

1.4. Feladat: Mutassuk meg, hogy nincs olyan $P(x)/Q(x)$ racionális törtfüggvény, amelyik a $[0,\infty)$-en a $\sin x$ függvényt állítaná elő. [47]

1.5. Feladat: Mutassuk meg, hogy nincs olyan $P(x)/Q(x)$ racionális törtfüggvény, amelyik a $[0,1]$-en a $\sin x$ függvényt állítaná elő. [48]

Megoldás: S27/M**??**

Megjegyzés 1. *A fenti megoldás elkerüli a lényeget, kevés fogalommal operál, viszont elemi. Az igazi megoldás S27/M***??***.*

6. Folytonos függvények

6.1. Feladat: Mutassuk meg, hogy folytonos függvénynek a valós számegyenesen vagy nincs periódusa, vagy van legkisebb periódusa, vagy konstans. [49] $\Longleftarrow$ $\boxed{\text{Vizsga: 3}}$

Megjegyzés 6. *Legyen f a $(-\infty,\infty)$-en adott folytonos függvény.*

(a) Mutassuk meg, hogy ha nincs legkisebb periódusa, akkor van akármilyen kis periódusa.

(b) Mutassuk meg, hogy ha f-nek van két különböző értéke, akkor nem lehet akármilyen kis periódusa.

(c) Mutassuk meg, hogy folytonosság nélkül nem igaz (b).

6.2. Feladat: Mutassuk meg, hogy folytonos $f(x,y)$ függvénynek korlátos zárt halmazon van minimuma. [50]

7. Furcsa függvények

Definició 6 (Korlátosság). *Az A halmazon f akkor korlátos, ha van olyan konstans, K, hogy minden $x \in A$-ra $|f(x)| < K$.*

Ugrás

---

8. Feladatsor: () (Cauchy egyenlet) Mutassuk meg, hogy ha f folytonos a $(-\infty, \infty)$-ben, és

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

akkor f lineáris: $f(x) = cx$.

8.1. Feladat: A fenti feltétel mellett $f(kx) = kf(x)$. [51]

8.2. Feladat: Mutassuk meg, hogy egy $f \in C(-\infty, \infty)$ és

$$f(kx) = kf(x), \quad \text{és} \quad f(\ell x) = \ell f(x) \qquad \text{ahol} \qquad x \neq 0, \quad \text{és} \quad (k, \ell) = 1$$

akkor f egyértelműen meghatározott. [52]

8.3. Feladat: Adjunk meg olyan függvényt a [0,1]-en, amelyik mindenütt végesértékű, de semilyen részintervallumban nem korlátos. [53]

Megjegyzés 2. *Van a fenti, ún. Cauchy egyenletnek, (1)-nek nem lineáris (azaz itt nem-folytonos) megoldása is. Ez a megoldás nagyon vad és a megadásához a Kiválasztási Axiómát, vagy ennek valamilyen ekvivalens formáját, mondjuk a Zorn lemmát kell használni. Az előző feladat azt mutatja, hogy vannak nagyon vad függvények is. A nagyon vad függvények között vannak ezek a furcsa megoldások.*

Definició 7 (Folytonosság). *...*

8.4. Feladat: Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ \frac{1}{q} & \text{ha } x = \frac{p}{q} \end{cases}$$

Jóldefiniált-e ez a függvény? Javítsuk ki a definiciót. Mutassuk meg, hogy a függvény ... [54]

8.5. Feladat: Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ q & \text{ha } x = \frac{p}{q} \text{ és } (p, q) = 1, \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy a függvény eleget tesz a kettővel korábbi követelményeknek. [55]

---

9. Feladatsor: () Lehet-e a trigonometrikus függvényeket függvényegyenlettel definiálni?

Megjegyzés 7. *A kérdésre adhatunk tisztán valós ill. komplex választ is. Az alábbiakban mindkettőre kitérünk.*

Az alábbi feladatoknál kicsit óvatosnak kell lennünk: Azt egy kicsit elmosva fogalmazom, hogy milyen viselkedést teszünk fel a függvényről. A valósban az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az egész számegyenesen megadott folytonos függvényekre gondolunk, a komplexben ugyanez az egész komplex síkon.

9.1. Feladat: Mutassuk meg, hogy az addiciós formulák meghatározzák a $\sin x$-et és a $\cos x$-et, ha még valahogyan normáljuk is: Tekintsük a

$$f(x + y) = f(x)g(y) + g(x)f(y) \tag{2}$$
$$g(x + y) = g(x)g(y) - f(x)f(y) \tag{3}$$

függvényegyenletrendszer (f, g) megoldásait a $(-\infty, \infty)$-n. Milyen normálást, extra kikötést adnánk meg, tudunk elképzelni, amelyikkel már be tudjuk, hogy a fenti rendszernek csak egy megoldása van, és arra $f(0) = 0$, $g(0) = 1$. [56] Előadáson volt

Megjegyzés 8. *Világos, hogy ha f, g megoldása a függvényegyenletrendszerünknek, akkor $f(cx), g(cx)$ is megoldás.*

9.2. Feladat: Definiáljuk a trigonometrikus függvényeket az addiciós formulákkal. [57]

9.3. Feladat: Oldjuk meg az $f(x + y) = f(x)f(y)$ függvényegyenletet a valós egyenesen. [58]

9.4. Feladat: Oldjuk meg az $f(x + y) = f(x)f(y)$ függvényegyenletet a komplex síkon. [59]

8. Konvexitás

Definició 8. *Egy $C \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex, ha valahányszor tartalmaz két pontot, az őket összekötő szakaszt is tartalmazza.*

Szükséges ismeretek:
Konvex nyílt/zárt halmaz. Esetleg szorítkozhatunk konvex (zárt) sokszögekre.

8.1. Feladat: Mutassuk meg, hogy konvex halmazok metszete konvex. (Rutin) [60]

8.2. Feladat: Pontosítsuk az előző feladatot: Mit is kérdeztem? Véges sok, megszámlálható, vagy akárhány konvex halmaz metszetét? Mutassuk meg, hogy ... darab konvex halmaz metszete konvex. (Rutin) [61]

8.3. Feladat: (Helly tétele) Ha a síkon adott n konvex zárt alakzat és bármely 3 metszete nemüres, akkor a metszetük nemüres: van olyan pont, amelyik mindegyikhez hozzátartozik. [62]

8.4. Feladat: (Helly tétele) Ha a síkon adott n konvex zárt alakzat és bármely 3 metszete nemüres, akkor a metszetük nemüres: van olyan pont, amelyik mindegyikhez hozzátartozik. [63]

8.5. Feladat: (Helly tétele) Ha az $\mathbb{R}^d$ d-dimenziós térben ($n = 2, 3$, vagy akármi) adott n konvex zárt alakzat és bármely $d+1$ metszete nemüres, akkor a metszetük nemüres: van olyan pont, amelyik mindegyikhez hozzátartozik. [64]

8.6. Feladat: (Előkészítés Young tételéhez): Mekkora az 1 oldalú szabályos háromszög köré írt kör sugara? [65]

8.7. Feladat: (Young tétele): Egy síkbeli 1 átmérőjű ponthalmaz lefedhető egy $1/\sqrt{3}$ sugarú zárt körlemezzel. [66]

9. Polinomok

Szükséges ismeretek:
Sorozatok konvergenciája, végtelenhez tartása

9.1. Feladat: Adott $P(z) = \sum a_n z^n$ polinomhoz keressünk olyan R-et, (az együtthatók függvényében) amelyikre tudjuk, hogy $|z| > R$ esetén már nem lehet gyöke. [67]

---

10. Feladatsor: () (Gauss tétele) Ha a $P(z)$ polinomnak a síkon n (különböző) gyöke van, akkor a deriváltja minden gyöke ezek konvex burkába esik.

10.1. Feladat: Először bizonyítsuk be Gauss tételét a valós esetben: amikor $P(x)$ valós polinomnak n különböző valós gyöke van. [68]

10.2. Feladat: Kell-e az előző feladatban, hogy $P(x)$ valós polinomnak n csupa különböző valós gyöke van? [69]

10.3. Feladat: Egy f függvény logaritmikus deriváltja: $\frac{f'(z)}{f(z).}$ (Miért hívjuk ezt logaritmikus deriváltnak?) Mutassuk meg, hogy a szorzat logaritmikus deriváltja a logaritmikus deriváltak összege. [70]

Magyarázat 1. *A derivált, vagy differenciálhányados ugyanaz. Polinomokra a derivált definiciójához nincs szükség analízisre: definiálhatjuk formálisan így is:*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

deriváltja

$$P'(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1}.$$

10.4. Feladat: Tegyük fel, hogy

$$P(z) = (z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_n),$$

(ahol a gyökök között lehetnek megegyezők, azaz, többszörösek is). Í rjuk fel a P'/P logaritmikus deriváltat a gyökök segítségével [71]

10.5. Feladat: Mutassuk meg, hogy ha a gyökök mind a felső félsíkban vannak, akkor a logaritmikus derivált gyökei is a felső félsíkban vannak. [72]

10.6. Feladat: Bizonyítsuk be a feladatsor elején kimondott Gauss tételt. [73]

---

11. Feladatsor: () Az algebra alaptételének elemi bizonyítása

Ismerkedés a polinomok viselkedésével a komplex síkon:

11.1. Feladat: Mutassuk meg, hogy egy n-edfokú polinom, $P(z)$, alkalmas A, B konstansokra eleget tesz a

$$|P(z)| < A|z|^n + B$$

egyenlőtlenségnek. [74]

Alapötlet:
Kissé részletesebben:

10. Sorozatok konvergenciája

10.1. Konvexítás függvénycsaládokra

Az alábbiak motivációja a többváltozós komplex differenciálható függvények elméletéből jön, de megértésükhöz, megoldásukhoz nem kell előismeret.

Legyen adott egy $\mathcal{D}$ tartomány, és $\mathcal{F}$ legyen ezen értelmezett függvények algebrája: vektortér, amelyik a függvényszorzatra is zárt.

Definició 9. *Egy K halmaz $\mathcal{F}$-konvex burka azon $\mathbf{z}$ pontok halmaza, amelyekre minden $f \in \mathcal{F}$-re*

$$|f(\mathbf{z})| \leq \max_{z \in \mathcal{D}} |f(z)|.$$

10.1. Feladat: Az alább egy kicsit más definiciót adunk meg és bizonyítandó, hogy a két definició ekvivalens. [75]

Definició 10 (Második)**.** *Minden $f \in \mathcal{D}$-re és $c \geq 0$-ra legyen*

$$A(f,c) := \{z \ : \ |f(z)| \leq c\}$$

Egy K halmaz $\mathcal{F}$-konvex burka azon $A(f,c)$ minden $f \in \mathcal{F}$-re

$$|f(\mathbf{z})| \leq \max_{z \in \mathcal{D}} |f(z)|.$$

Ekkor egy X halmaz $\mathcal{F}$-konvex burka:

$$\hat{X} := \bigcap_{f \in \mathcal{F},\ c > 0} A(f,c).$$

Megjegyzés 9. *Valamit a fenti feladatban kell csinálnunk az üres halmazzal. Okoz-e ez gondot? Mit csináljunk? Mondjuk, megegyezhetünk, hogy csak a nem-üreseket tekintjük...???*

10.2. Feladat: Legyen az $\mathcal{F}_a(z)$ függvények halmaza az adott $a \in \mathbb{R}^n$-től vett távolság. Legyen K kompakt: korlátos és zárt. Mi lesz $\hat{K}$? [76] $\Longleftarrow$ $\boxed{\text{Vizsga: 4}}$

Megjegyzés 10. *Mivel a nagyon nagy körök jól közelítik a félsíkokat, így nem meglepő, hogy a fenti feladatra a válasz ugyanaz, mintha K-t tartalmazó felsíkok metszetét vennénk: éppen K konvex burka*

10.3. Feladat: Hogyan működik a fenti feladat egy nemkorlátos tartomány lezárásában, pl. a a jobb félsíkban:

$$\mathcal{D} := \{z \ : \ \mathcal{R}e\ z \geq 0\}$$

-ra? [77]

10.4. Feladat: Mutassuk meg hogy $\hat{\hat{K}} = \hat{K}$. Mutassuk meg hogy nagyobb függvénycsaládra a burok nem lehet kisebb. Hogy $\hat{K} \supseteq K$. [78] ⟸ Vizsga: 5

10.5. Feladat: Mutassuk meg, hogy ha a síkban az összes polinomot vesszük, akkor a a burok lehet határozottan kisebb mint a geometriai konvex burok. [79]

10.6. Feladat: Jó-e a következő definició: K akkor $\mathcal{F}$-konvex, ha $K = \hat{K}$? Mit ad ez a definició pl. $\mathbb{R}^2$-ben, a $z - a$ alakú függvényekre, ha a tetszőleges komplex szám? [80]

10.7. Feladat: Jó-e a következő definició: K akkor $\mathcal{F}$-konvex, ha $K = \hat{K}$? [81]

Szükséges ismeretek:
Sorozatok konvergenciája, végtelenhez tartása

---

11. Feladatsor: () Ismert függvények két polinom közé szorítása.

---

12. Feladatsor: () Monoton a

$$h_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

sorozat?

12.1. Feladat: Mutassuk meg, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$$

monoton növekvő, ha $\alpha < \frac{1}{2}$, és monoton csökkenő, ha $\alpha > \frac{1}{2}$. [82]

Definició 11. *Azt mondjuk, hogy a_n gyorsabban tart végtelenhez, mint b_n, ha $a_n/b_n \to \infty$.*

12.2. Feladat: Mutassuk meg, hogy ha adott véges sok végtelenhez tartó sorozat, akkor van egy olyan, amelyik mindegyiknél gyorsabban tart végtelenhez. [83] $\Longleftarrow$ Vizsga: 6

12.3. Feladat: Mutassuk meg, hogy ha adott megszámlálható sok végtelenhez tartó sorozat, akkor van egy olyan, amelyik mindegyiknél gyorsabban tart végtelenhez. [84] $\Longleftarrow$ Vizsga: 7

Megjegyzés 11. *Ehhez a feladathoz az átlós eljárást kell használni: "lépésenként konstruálni" meg az u_n sorozatot, úgy, hogy valahonnan, egy alkalmas $\Omega(n)$-től kezdve már sokkal nagyobb, mint az első n sorozatmegfelelő tagjai.*

12.4. Feladat: Definiáld azt, hogy egy sorozat gyorsabban tart 0-hoz, mint a másik. [85]

12.5. Feladat: Milyen a kettővel megelőzőhöz hasonló állítás mondható ki a 0-hoz tartó sorozatokra. [86]

12.6. Feladat: Vegyük az összes egész számokból álló monoton növő sorozatot. Igaz-e, hogy van olyan sorozat, amelyik ezek mindegyikénél gyorsabban tart 0-hoz. [87]

11. Konvergenciasebesség

---

12. Feladatsor: () Mitől irracionális az e?

Magyarázat 2. *A következő két feladat arról szól, hogy az irracionális számok jól approximálhatóak recionálisakkal, míg minden racionális α rosszul approximálhatóak tőle különböző racionálissal.*

12.1. Feladat: Bizonyítandó, hogy minden α racionális számhoz létezik olyan $c > 0$, hogy ha $p/q \neq \alpha$ then

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| > \frac{c}{q}.$$

[88]

12.2. Feladat: Bizonyítandó, hogy minden α irracionális számhoz végtelen sok olyan $\frac{p}{q}$ létezik, amelyre

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{q^2}.$$

[89]

12. Leibniz sorok

12.1. Feladat: Bizonyítandó, hogy ha $a_n > 0$ monoton csökkenő, akkor ⟸ Vizsga: 8

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots \pm a_n \ldots$$

konvergens, és az

$$S_n := a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots \pm a_n$$

szelet (részletösszeg) hibája az első elhagyott tag. [90]

Az ilyen sorokat hívjuk Leibniz soroknak.

Megjegyzés 12. *Azt kell észrevenni, hogy az egymásutáni részletösszegek egymásba skatulyázott, egyre szűkülő intervallum-sorozatot alkotnak. Ezeknek van egyetlen egy közös pontjuk, az a keresett határérték.*

12.2. Feladat: Mit jelent a fenti tétel a

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

sorra? [91]

13. Taylor sorok

13.1. Feladat: Legyen a_n korlátos. Mutassuk meg, hogy ⟸ Vizsga: 9

$$s_N(z) := \sum_{n=1}^{N} a_n z^n$$

Cauchy sorozat a $|z| < 1$ nyílt egységkörlemez minden pontjában. [92]

Megjegyzés 13. *Azokat az $f(z)$ függvényeket tekintjük (a polinomok után) a legegyszerűbb függvényeknek, amelyikek egy D tartományon polinomok határértékei, az alábbi értelemben: a D tartomány minden K korlátos zárt részhalmazán létezik hozzájuk olyan polinom-sorozat, $P_n(z)$, melyekre*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{z\in K} |f(z) - P_n(z)| \to 0.$$

14. Műveletek sorokkal

14.1. Feladat: (Hatványsorok szorzata, Cauchy szorzat) Mutassuk meg, hogy ha $c_n := \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$, akkor

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

[93]

14.2. Feladat: (Hatványsorok tagonkénti differenciálhatósága) Mutassuk meg, hogy ha

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

akkor

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}.$$

[94]

Megjegyzés 3. *Ez a feladat értelmezést igényel. Lehet úgy értelmezni, hogy a $z \in (-a, a)$ intervallumra gondolunk, de úgy is, hogy a $|z| < r$ körlemezre. Az utóbbi esetben*

$$f'(a) := \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Ilyenkor azt mondjuk hogy az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény komplex differenciálható. Ha ezt egy nyílt halmazon tesszük fel, az hihetetlenül erős megkötés: implikálja a hatványsorba fejthetőséget.

15. Vegyes feladatok sorokra

15.1. Feladat: Adjunk meg olyan (szép) függvénysorozatot a $[0, 1]$-en, amelyikre $\Leftarrow$ Vizsga: 10

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n \to \infty} f_n(x)\,dx.$$

[95]

Megjegyzés 14. *Visszajátszható a feladat arra, amikor a függvények 0-hoz tartanak, de az integráljaik nem tartanak 0-hoz. Ez múlhat azon, hogy az adott függvények nem-negatívak, egyre magasabbra mennek fel egyre rövidebb részintervallumon a $[0, 1]$-ben, de azért még 0-hoz tartanak, és az alattuk levő területek még elég nagyok maradnak: nem tartanak 0-hoz.*

16. Általánosított határértékek

---

17. Feladatsor: () Konvergens sorozatok számtani közepének konvergenciája.

Miért fontos?
Hogyan általánosítható?

17.1. Feladat: Legyenek az (a_n) sorozat számtani közepei a b_n-ek ezek számtani közepei a c_n-ek: ⟸ Vizsga: 11

$$b_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{és} \qquad c_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Lehetséges-e, hogy c_n konvergens, de b_n nem konvergens? Lehetséges-e, hogy c_n konvergens, de b_n nem konvergens, ha még azt is feltesszük, hogy $a_n > 0$? [96]

Megjegyzés 15. *Itt arról van szó, hogy az osszcilláció ellene hat a konvergenciának, az átlagolás egy oszcilláló sorozatot kisimít, de talán egy kisimítás nem elég erős, kettő már konvergenssé teszi, de egy átlagolás még nem. Próbálkozzunk az alábbi sorozatokkal:*

$a_n = (-1)^n$; $a_n = (-1)^n\sqrt{n}$; $a_n = (-1)^n n$;
$a_n = (-1)^n n\sqrt{n}$; $a_n = (-1)^n n^2$; $a_n = (-1)^n n^3$;
$a_n = (-1)^n 3^n$;

Miért fontos?
Hogyan általánosítható?

17. Függvénysorozatok konvergenciája

Definició 12. *$f_n(z)$ egyenletesen konvergál az A halmazon $f(z)$-hez, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan $n_0(\varepsilon)$, hogy $n > n_0$ esetén $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.*

Magyarázat 3. *Az egyenletes konvergenciával szemben áll a pontonkénti konvergencia: $f_n(z)$ pontonként konvergál az A halmazon $f(z)$-hez, ha minden $z \in A$-ra és $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan $n_0(\varepsilon, z)$, hogy $n > n_0(\varepsilon, z)$ esetén $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.*

A különbség lényege tehát, hogy az $n_0(\varepsilon)$ az egyenletes konvergenciában nem függ a helytől: z-től.

17.1. Feladat: Adjunk meg olyan függvénysort, amelyik $[0, 1]$-en konvergens, de nem egyenletesen konvergens. [97]

18. Hatványsorok

18.1. Feladat: Adjunk meg olyan hatványsort, amelyik konvergens az egységkörlemezen, egyenletesen konvergens, de nem konvergál sehol az egységkörön kívül. [98] ⟸ Vizsga: 12

18.2. Feladat: (Segítség az előző feladathoz:) Vizsgáljuk meg azt a hatványsort, $\sum a_n z^n$-et, ahol ha $n \neq k!$, akkor $a_n = 0$, ha $n = k!$, akkor $a_n = \frac{1}{k^2}$:

$$f(z) = 1 + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^6}{3^2} + \frac{z^{24}}{4^2} + \frac{z^{120}}{5^2} + \dots$$

---

19. Feladatsor: () (Hadamard formula) Mutassuk meg, hogy, a $\sum a_n z^n$ függvénysor egy körlemez belsejében konvergál, a külsejében divergál. Arról, hogy a határon mit tesz, nehéz bármit mondani. [99]

19.3. Feladat: Mutassuk meg, hogy, a $\sum a_n z^n$ függvénysor, ha konvergál z_0-ban, akkor egyenletesen abszolut konvergens a $|z| < |z_0| - \varepsilon$ körlemezben (minden $\varepsilon > 0$-ra). [100]

19.4. Feladat: [101]

---

20. Feladatsor: () (Abel szummáció)

19. Topológia

19.1. Metrikus terek

Definició 13. *Az M halmazt egy $\rho(x, y)$ kétváltozós távolságfüggvénnyel (metrikával) metrikus térnek nevezzük, ha a következő teljesül:*

1. $\rho(x, y) \geq 0$.
2. $\rho(x, y) = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $x = y$.
3. *[Háromszögegyenlőtlenség] Minden* $x, y, z \in M$*-ra*

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) \leq \rho(x, z).$$

Egy metrikus teret $\mathcal{M} = (M, \rho)$ alakban adunk meg: megadjuk a halmazt, pontjainak halmazát, és megadjuk a metrikát.

Megjegyzés 16 (Egy fontos példa)**.** *Az alábbiakban egy olyan feladatsort konstruálok, amelyik a matematika egy nagyon fontos állítását dolgozza fel. Az állítás rengeteg fogalmat tartalmaz, megfogalmazom, de MOST még ezt nem kell megérteni. Állítás*

> *Kompakt tereken a folytonos függvények egy teljes metrikus teret alkotnak. Ezen belül a $C[a,b]$-n, azaz, a korlátos zárt intervallumokon folytonos függvények egy szeparábilis metrikus teret alkotnak.*

Most felejtsük el a fent megfogalmazott legáltalánosabb formát, csak az utolsó mondatra koncentrálunk.

Később mindezeket tanuljuk, és itt nem az a cél, hogy egy fontos témát korábbra hozzunk, hanem az, hogy azt feladatsorban dolgozva fel, technikát szerezzünk.

Néhány definicióra lesz szükségünk:

Definició 14 (Metrika a folytonos függvények terén)**.** *Legyen $K=[a,b]$. Ekkor*

$$\rho(f,g) := \max_{x\in K} |f(x)-g(x)|. \tag{4}$$

19.1. Feladat: Mutassuk meg, hogy $C[a,b]$ metrikus a (4) távolsággal. [102]

Definició 15 (Teljesség)**.** *Egy (M,ρ) metrikus tér akkor teljes ha teljesül rá a Cauchy féle konvergencia-kritérium: benne minden Cauchy sorozat konvergens.*

19.2. Feladat: Gondoljuk át, mit jelent a fenti feladat: mit jelent a Cauchy sorozat, és mit jelent a konvergencia egy metrikus térben. [103]

Definició 16 (Szeparabilitás)**.** *Egy (M,ρ) metrikus tér akkor szeparábilis, ha van benne egy (x_n) sorozat, amelyikre minden $a\in M$-re van (x_n)-nek a-hoz konvergáló részsorozata.*

---

20. Feladatsor: () $C[a,b]$-n, azaz, a korlátos zárt intervallumokon folytonos függvények egy szeparábilis metrikus teret alkotnak.

19.2. Hilbert terek

Definició 17 (Metrikus tér)**.** *Egy X halmaz párjain megadott $\rho(x,y)$ kétváltozós függvény metrika és az X halmaz ezzel a metrikával „metrikus tér", ha*
(a) Minden $x, y \in X$, esetén $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;
(b) minden $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén $\rho(x,y) > 0$, viszont $\rho(x,x) = 0$;
(c) minden $x, y, z \in X$-re teljesül a háromszög egyenlőtlenség:

$$\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

Az n-dimenziós euklideszi tér elemei a valós szám n-esek:

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \tag{5}$$

Távolság:

$$\rho(\mathbf{a},\mathbf{b})^2 := \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2. \tag{6}$$

20.1. Feladat: Mutassuk meg, hogy ez metrikus tér. [104] ⟸ Vizsga: 13

Az euklideszi terek természetes kiterjesztése ℓ_2: az ún. "kis-ℓ-kettő" tér: elemei a konvergens sorozatok közül azok, amelyeknek még a négyzetösszegei is konvergálnak:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty \tag{7}$$

Távolság:

$$\rho(\mathbf{a},\mathbf{b})^2 := \sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2. \tag{8}$$

20.2. Feladat: Mutassuk meg, hogy ez metrikus tér. [105] ⟸ Vizsga: 14

20.3. Feladat: Mutassuk meg, hogy ez a metrikus tér tartalmazza az összes véges dimenziós euklideszi teret. [106]

19.3. Síktopológia

Tétel 2 (Jordan görbetétel poligonokra)**.** *Ha a síkból elhagyunk egy zárt poligont, két tartomány keletkezik, melyek közül az egyik korlátos, egyszeresen összefüggő.*

---

21. Feladatsor: () Bizonyítsuk be Jordan görbetételét poligonokra.

Magyarázat 4. *A fenti állítás olyan egyszerű, hogy már azt is nehéz megérteni, miért kell bizonyítani. Az egyetem 3. évében természetes bizonyítani. Most feladatsorban dolgozzuk fel.*

21.1. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy egy nyílt poligon nem vágja ketté a síkot. [107]

21.2. Feladat: Legyen P egy zárt poligon, és x egy rajta kívül levő pont. Jelölje $b(x, P)$ az x-en átmenő félegyenes P-vel való metszésszámának paritását (ahol feltesszük, hogy a félegyenes nem tartalmazza P egy szakaszát). Mutassuk meg, hogy ez a paritás nem függ a félegyenes választásától. [108]

20. Kis halmazok

20.1. Feladat: (Baire tétele) Mutassuk meg, hogy ha a [0,1] intervallumot lefedjük megszámlálható sok zárt halmazzal,

$$[0,1] \subseteq \bigcup F_i,$$

akkor valamelyik F_i tartalmaz egy kis nyílt (α, β) intervallumot. [109]

20.2. Feladat: (Baire tétele) Igaz marad-e az előző feladat állítása, ha a zártságot nem tesszük fel? [110]

21. Vegyes feladatok

21.1. Feladat: Jelölje $\{x\}$ x törtrészét $(x = x - [x])$. Mutassuk meg, hogy ⟸ Vizsga: 15
ha α irracionális, akkor a $\{n\alpha\}$ számok mindenütt sűrűn vannak a [0,1]-ben. [111]

---

22. Feladatsor: () Mutassuk meg, hogy a 15-ös számjátékban a helyzetek két olyan osztályba oszthatók, ahol az egyik csoportból korrekt tologatással nem juthatunk el a másikba. Megoldás: S27.1/M3

4	11	12	1
14	8	5	2
7	9	3	
10	15	6	13

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

22. Gráfelmélet

22.1. Feladat: Mutassuk meg, hogy hogy ha G-ben azt a kettévágást vesszük, amelyikre a legtöbb él megy keresztbe, akkor legalább az élek fele keresztbe megy. [112]

⟸ Vizsga: 16

---

23. Feladatsor: () Mutassuk meg, hogy hogy ha A egy d-reguláris gráf adjacencia-mátrixa, akkor a legnagyobb (abszolutértékű) sajátértéke d, és ez akkor és csak akkor egyszeres, ha a gráf összefüggő.

23.1. Feladat: Mutassuk meg, hogy ha A egy d-reguláris gráf adjacencia-mátrixa, akkor $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ sajátvektor. [113]

⟸ Vizsga: 17

23.2. Feladat: Mutassuk meg, hogy ha A egy d-reguláris gráf adjacencia-mátrixa, akkor a legnagyobb (abszolutértékű) sajátértéke d. [114]

23.3. Feladat: Mutassuk meg, hogy ha A egy d-reguláris G gráf adjacencia-mátrixa, akkor a legnagyobb (abszolutértékű) sajátértéke d, és ehhez sajátérték minden olyan 0-1 vektor, amelyik egyik értéke minden komponensen konstans. [115]

23.4. Feladat: Mutassuk meg, hogy ha A egy d-reguláris gráf adjacencia-mátrixa, akkor a d sajátérték multiplicitása megegyezik a komponensek számával. [116]

22.1. Extremális gráfelmélet

Definició 18. *Az alábbiakban G_n mindig egy n csúcsú egyszerű gráf: nincsenek benne hurok-élek és többszörös élek. Ha adott egy L gráf, akkor*

$$\mathbf{ex}(n, L) := \max\{e(G_n) \ : \ L \not\subseteq G_n, \}$$

azaz, az L-hez és n-hez tartozó extrém szám a lehető legnagyobb élszám egy L-et nem tartalmazó gráfban.

23.5. Feladat: Mutassuk meg, hogy

⟸ Vizsga: 18

$$\mathbf{ex}(n, P_4) \leq n.$$

Mutassuk meg, hogy ez (gyakran éles) [117]

23.6. Feladat: Találjunk egyszerű formulát

⟸ Vizsga: 19

$$\sum_{uv\in E(G)} (d(u)+d(v))$$

-re. [118]

Megjegyzés 17. *Ez a fokok négyzetösszege. Miért?*

23.7. Feladat: Az előző feladat alapján mutassuk meg, hogy G-ben van két olyan éllel összekötött csúcs, amelyek fokösszege az átlagfokszámnak legalább kétszerese. [119]

Definició 19. *Adott $\mathcal{L}$ gráfosztály esetén*

$$\mathbf{ex}(n,\mathcal{L}) := \max_{\substack{L\not\subseteq G_n \\ \text{ha } L\in\mathcal{L}}} e(G_n)$$

Nevezzünk egy kört egy átlóval teta-gráfnak (mert hasonlít a görög Θ-ra).

23.8. Feladat: Legyen $\mathcal{L}_T$ a teta-gráfok halmaza: ezek a körök egy átlóval. Bizonyítandó, hogy $\Longleftarrow$ Vizsga: 20

$$\mathbf{ex}(n,\mathcal{L}_T) \le \frac{3}{2}(n-1).$$

[120]

23. Véletlen gráfok

23.1. Feladat: Minden G_n gráfhoz hozzárendelhetjük az $\Longleftarrow$ Vizsga: 21

$$\frac{e(G_n)}{\binom{n}{2}}$$

élsűrűséget. Mutassuk meg, hogy a G_n k-szögpontú részgráfjai élsűrűségeinek átlaga éppen G_n. [121]

23.2. Feladat: Legyen n páros. Mutassuk meg, hogy van G_n-nek olyan páros részgráfja, amelyik az éleknek legalább a felét tartalmazza és két $n/2$ méretű szinosztállyal rendelkezik. [122] $\Longleftarrow$ Vizsga: 22

23.3. Feladat: Majdnem minden gráfban a legnagyobb teljes részgráf kisebb $(2+\varepsilon)\log_2 n$-nél. És persze, a legnagyobb üres részgráf is kisebb $(2+\varepsilon)\log_2 n$-nél. [123]

23.4. Feladat: Mutassuk meg, hogy majdnem minden G_n-ben $n\log n$ éllel van C_7. Hogyan élesíthető és általánosítható. [124]

23.1. A Ramsey probléma

24. Kombinatorika

24.1. Mikor és miért használunk generátorfűggvényt?

23.5. Feladat: Számítsuk ki a Generátorfüggvény/Generátorpolinom segítségével a $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$-et. [125]

25. Vegyes megjegyzések

Mi az a "The Scottish Book?

Nehéz megfogalmazni, miért, de érdemes kicsit beleolvasni az alábbi feljegyzésbe, a Skót könyvről. Lvovban, (vagy ami ugyanaz, Lembergben) volt egy Skót kávéház, és a ma már nagyon híres matematikusok gyakran itt találkoztak. Gyakran adtak fel egymásnak érdekes kérdéseket, és a megoldásokra kisebb (alkohol) jutalmat is kitűztek.

Hogy miért érdekes ebbe a Skót Problémakönyvbe ma is beleolvasni? Mert jól tükrözi, hogy akkor mivel foglalkoztak a Funkcionálanalízis és topológia bizonyos vezető alakjai.

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Scottish_Book.html`

`http://en.wikipedia.org/wiki/Scottish_Café`

St Andrews Matematika-történeti feljegyzések

Ha az interneten matematika-történeti adatokra vadászunk, gyakran botlunk egy angol egyetem, a St Andrews home-page-ere, az itt található érdekes matematikatörténeti cikkekre.

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/$\mathaccent"707E\relax{~}$history/Indexes/HistoryTopics.html`

Riemann féle ζ fv.

- Hol olvashatunk róla?
  http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function

- Miért vettük elő? Mert az egyik legfontosabb nyitott kérdés rá vonatkozik: a Riemann sejtés, amelyik azt mondja ki, hogy a $\zeta(s)$ „nem-triviális" gyökei a $\Re e\ s = \frac{1}{2}$ egyenesen vannak.

26. Feladatsor: () Mutassuk meg, hogy

$$\zeta(s) := \sum \frac{1}{n^s}$$

konvergens, ha $\Re e\ s > 1$.

26.1. Feladat: Mutassuk meg, hogy ha $a_n \searrow 0$ és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n b_n$ is konvergens. [126]

26.2. Feladat: Mutassuk meg, hogy

$$f(x) := \sum \frac{1}{n^x}$$

konvergens, ha $x > 1$. [127]

(Valóban, alkalmazható az előző feladat.)

26. Megoldások

26.1. Vázlatok az új feladatokhoz

Javaslat a ... feladathoz:

Legyen $s_n := \sum_{i\le n} b_i$. Ekkor $s_n \to s$. Az egyszerűség kedvéért a korrekciós tagokból az elejét elhagyjuk, a végén majd fellép az

$$M_n := a_{n+1}s_n - a_n s_{n-1} \to 0.$$

Tegyük fel, hogy $|M_n| < M$ és $|s_n| < S^*$. Abel átrendezéssel:

$$\sum_{m<i\le n} a_i b_i = \sum_{i\le n} a_i(s_i - s_{i-1}) = M_n + \sum_{i\le n} s_i(a_i - a_{i+1}) =$$

$$M_n - M_m(?) + \sum_{m<i\le n} s(a_i - a_{i+1}) + \sum_{m<i\le n} (s_i - s)(a_i - a_{i+1}) \to 0.$$

Ugyanis a végén levő tagok: $a_n s_n - a_n s_{n-1}$ illetve $a_n s_n - a_{n+1}s_n$, tehát itt $M_n := a_{n+1}s_n - a_n s_{n-1}$.

26.2. Aszimptotikák

Megoldás 1.

Szükségünk lenne a következőre: Ha $x > 0$, akkor

$$\left|\log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\right| < \frac{x^4}{4}.$$

Logaritmizáljunk

$$\begin{aligned} b_n : &= \log h_n = (n+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{n}) \approx \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + ... \approx 1 + \frac{1}{12n^2}. \end{aligned}$$

26.3. Geometria

Megoldás 2.

Vegyünk ki 3 pontot, melyek nincsenek egy egyenesen: A, B, C-t. Az összes többi az AB tengelyű véges sok hiperbolaíven van és véges sok AC tengelyűn is. Í gy csak véges sok ilyen pont lehet.

27. Függvények

27.1. Vegyes feladatok

Megoldás 3 (15)**.**

Terítsük ki a 4×4-es táblát:

14	**1**	**2**	**16**	**3**	**4**	**8**	**12**	**10**	**5**	**6**	**15**	**9**	**7**	**11**	**13**

Ha az üres helyre beírjuk a 16-ot, egy permutáció minden pozició. Minden permutációra jellemző az **inverziószáma**: Hányszor van két elem fordított sorrendben, mint kellene. Ezen inverziószám paritása a pozíció paritása.

Mutassuk meg, hogy a paritás a játék alatt nem változik: **INVARIÁNS**

Irodalom

[1] Gelbaum-Olmsted: Counterexamples in analysis (angol/orosz)

[2] N. M. Gjunter R. O. Kuzmin. Felsőbb matematikai példatár, Tankönyvkiadó Vállalat. 1951.

[3] Gyemidovics: Matematikai analízis. Feladatgyűjtemény, Budapest, 1971. Tankönyvkiadó

[4] Laczkovich Miklós-T. Sós Vera: Analízis I-II.

[5] L. Lovász: Combinatorial Lovász, László: Combinatorial problems and exercises. Corrected reprint of the 1993 second edition. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2007. 642 pp. ISBN: 978-0-8218-4262-1 05-01

[6] Lovász László: Kombinatorikai problémák és feladatok Typotex

[7] Pólya-Szegő: (német/angol/orosz/magyar, megjelenési idejük sorrendjében) Két kötet Magyarul: Pólya György és Szegő Gábor: Feladatok és tételek az analízis köréből, I-II. Tankönyvkiadó, 1980.

[8] Hugo Steinhaus: Matematikai Kaleidoszkop (Angolul: Mathematical Snapshots, de a magyar kiadás jobb.)

[9] Szőkefalvi Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok

Internet:

- A homepage-em: `www.renyi.hu/~miki`
- Wikipedia
- Wolfram
- MathSciNet

Vizsgafeladatok száma: 22