Valószínűségi mértékek gyenge konvergenciája metrikus terekben

Vizsgálni kívánjuk eloszlások konvergenciájának természetes általánosítását abban az esetben, amikor a valószínűségi mértékek általánosabb tereken vannak definiálva, és nemcsak az Euklideszi téren. Ehhez szükség van az Euklideszi téren értelmezett mértékek konvergenciájáról, kompaktságáról szóló eredmények általánosítására. Legyen adva $\xi_n = (\xi_n^{(1)}, \dots, \xi_n^{(k)})$, $n = 1, 2, \dots$, R^k értékű valószínűségi változóknak (vagy ezek $F_n(x_1, \dots, x_k) = P(\xi_n^{(1)} < x_1, \dots, \xi_n^{(k)} < x_k)$ eloszlásfüggvényeinek) egy sorozata. Azt mondjuk, hogy a ξ_n valószínűségi változók (illetve ezek F_n eloszlásfüggvényei) eloszlásban konvergálnak egy $F(x_1, \dots, x_k)$ eloszlású $\xi = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)})$ valószínűségi változóhoz (egy F eloszlásfüggvényhez), ha

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x_1, \dots, x_k) = F(x_1, \dots, x_k)$$

az $F(x_1, \dots, x_k)$ függvény minden folytonossági pontjában.

Feladatok:

1.) Az $F_n(x_1, \dots, x_k)$ eloszlásfüggvények akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban az $F(x_1, \dots, x_k)$ eloszlásfüggvényhez, ha tetszőleges $f(x_1, \dots, x_k)$ folytonos és korlátos függvényre

$$\int f(x_1, \dots, x_k)\, dF_n(x_1, \dots, x_k) \to \int f(x_1, \dots, x_k)\, dF(x_1, \dots, x_k)\,, \quad \text{ha } n \to \infty\,.$$

Ennek alapján definiáljuk valószínűségi mértékek konvergenciáját általánosabb teljes szeparábilis metrikus terekben a következő módon: Legyen (X, ρ) egy teljes szeparábilis metrikus tér. A ρ metrika meghatároz egy topológiát, és legyen $\mathcal{A}$ az e topológia szerinti nyílt halmazok által generált Borel σ-algebra. Legyen μ_n, $n = 1, 2, \dots$, az $(X, \mathcal{A})$ téren valószínűségi mértékek egy sorozata. Azt mondjuk, hogy a μ_n mértékek gyengén konvergálnak a μ valószínűségi mértékhez, ha tetszőleges az (X, ρ) téren értelmezett folytonos, korlátos f függvényre $\lim\limits_{n\to\infty} \int f\, d\mu_n \to \int f\, d\mu$. Az előző feladat szerint ez a fogalom általánosítása az Euklideszi téren definiált valószínűségi mértékek eloszlásbeli konvergenciájának. Azt mondjuk, hogy a μ_n valószínűségi mértékek sorozata kompakt, ha e sorozat tetszőleges μ_{n_k} részsorozatának van gyengén konvergens részsorozata. A következő néhány feladatban megmutatjuk, hogy az eloszlásban való konvergencia néhány tulajdonsága általánosabban is igaz a gyenge konvergenciára metrikus terekben. A következő tételben megfogalmazunk egy a mértékek gyenge konvergenciájáról szóló fontos eredményt.

Tétel. Legyen (X, ρ) teljes (szeparábilis), kompakt metrikus tér. Ekkor az $(X, \mathcal{A})$ téren értelmezett valószínűségi mértékeknek minden μ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozata kompakt.

Külön megfogalmazzuk ennek a tételnek egy speciális esetét, melyet egyszerűbb bizonyítani, és amelyikből le fogunk vezetni a feladatsorban egy a fenti tételnél általánosabb eredményt. Ezt az eredmény nem bizonyítjuk magában a feladatsorban, csak egy külön kiegészítésben.

Tétel A. Legyen a (Z,ρ) tér a $[0,1]$ intervallum önmagával vett végtelen direkt szorzata, azaz az $x=(x_1,x_2,\dots)$ $0\le x_j\le 1$, $j=1,2,\dots$, sorozatokból álló tér a következő metrikával: Ha $x=(x_1,x_2,\dots)\in Z$, $y=(y_1,y_2,\dots)\in Z$, akkor $\rho(x,y)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}2^{-j}|x_j-y_j|$. Ekkor a (Z,ρ) tér teljes, (szeparábilis) kompakt metrikus tér. Legyen $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebra a (Z,ρ) téren. A $(Z,\mathcal{B})$ téren értelmezett valószínűségi mértékeknek minden μ_n, $n=1,2,\dots$, sorozata kompakt.

Ugyancsak használni fogjuk a következő mértékelméleti eredményt:

Proposition. Legyen (X,ρ) teljes szeparábilis metrikus tér, és $(X,\mathcal{A})$ az általa generált mértéktér. Egy az $(X,\mathcal{A})$ téren definiált μ véges mérték segítségével definiáljuk az I_μ funkcionált az (X,ρ) téren értelmezett folytonos függvények terén az

$$I_\mu(f)=\int_X f(x)\mu(\,dx)$$

képlet segítségével. Az I_μ funkcionál egyértelműen meghatározza a μ mértéket. Speciálisan, egy gyengén konvergáló μ_n valószínűségi mértéksorozat μ határértéke egyértelműen meghatározott.

Kissé részletesebben: Az, hogy az $I(\mu)$ funkcionál egyértelműen meghatározza a μ mértéket következik a következő relációkból: $\mu(G)=\sup\limits_{f\in\mathcal{F}_G}I_\mu(f)$ minden nyílt $G\in\mathcal{A}$ halmazra, ahol $\mathcal{F}$ azon folytonos $f(x)$, $x\in X$, függvények halmaza, melyekre $0\le f(x)\le 1$ minden $x\in X$-re, és $f(x)=0$ minden $x\in X\backslash G$. Továbbá, $\mu(\mathbf{A})=\inf\limits_{G\colon\, G \text{ nyílt } \mathbf{A}\subset G}\mu(G)$ minden $\mathbf{A}\in\mathcal{A}$-ra.

Ebből az állításból adódik az alábbi következmény:

Következmény. Ha μ_1 és μ_2 két véges mérték az $(X,\mathcal{A})$ téren, melyekre $I_{\mu_1}(f)\le I_{\mu_2}(f)$ minden nem negatív folytonos függvényre az $(X,\mathcal{A})$ téren, akkor $\mu_1(\mathbf{A})\le\mu_2(\mathbf{A})$ minden $\mathbf{A}\in\mathcal{A}$ mérhető halmazra az $(X,\mathcal{A})$ téren.

Az alábbiakban megfogalmazott feladatokban többször kell egy teljes szeparábilis metrikus tér kompakt halmazaival dolgozni. Felidézzük azt a két ekvivalens jellemzését kompakt halmazoknak, melyeket használni fogunk.

Kompakt halmazok jellemzése: Legyen (X,ρ) teljes szeparábilis metrikus tér. Egy $\mathbf{K}\subset X$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha a következő két (ekvivalens) tulajdonság valamelyike teljesül.

a.) A $\mathbf{K}$ halmaz, zárt, és tetszőleges $x_1,x_2,\dots,\ x_j\in\mathbf{K}$, $j=1,2,\dots$, sorozatnak van konvergens részsorozata.

b.) A $\mathbf{K}$ halmaz tetszőleges nyílt fedéséből kiválasztható egy véges nyílt fedés, azaz, ha $\mathbf{K}\subset\bigcap\limits_{t\in T}G_t$, ahol a $G_t\subset X$ halmazok nyíltak, és a T indexhalmaz tetszőleges, akkor létezik olyan $\{t_1,\dots,t_n\}\subset T$ véges részhalmaza T-nek, melyre $\mathbf{K}\subset\bigcap\limits_{j=1}^{n}G_{t_j}$.

2.) Bizonyítsuk be a Propositiont és a következményét.

3.) Legyen (X, ρ) teljes szeparábilis metrikus tér, és μ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi mértékek sorozata az $(X, \mathcal{A})$ téren. Lássuk be, hogy a következő állítások ekvivalensek:

a.) A μ_n mértékek gyengén konvergálnak egy μ valószínűségi mértékhez.

b.) Minden zárt $F \subset X$ halmazra $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(F) \le \mu(F)$

c.) Minden nyílt $G \subset X$ halmazra $\liminf\limits_{n\to\infty} \mu_n(G) \ge \mu(G)$

d.) Jelölje $\partial\mathbf{A}$ egy mérhető $\mathbf{A}$ halmaz határát. Ha $\mu(\partial\mathbf{A}) = 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(\mathbf{A}) = \mu(\mathbf{A})$.

Mutassuk meg egy példán, hogy a b.) illetve c.) részben a $\limsup$ és $\liminf$ nem helyettesíthető limesszel.

4.) Legyen (X, ρ) teljes szeparábilis metrikus tér, és legyen adva valószínűségi mértékeknek egy μ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozata az $(X, \mathcal{A})$ téren. Tegyük fel továbbá, hogy létezik egy olyan $\mathbf{K} \subset X$ zárt halmaz, melyre $\mu_n(\mathbf{K}) = 1$ minden $n = 1, 2, \dots$-ra. Lássuk be, hogy a következő két állítás ekvivalens:

a.) A μ_n mértékek megszorításai a $\mathbf{K}$ halmaz mérhető részhalmazaira gyengén konvergálnak egy μ valószínűségi mértékhez a $(\mathbf{K}, \mathcal{A}_{\mathbf{K}})$ téren, ahol $\mathcal{A}_{\mathbf{K}}$ az $\mathcal{A}$ σ-algebra megszorítása a $\mathbf{K}$ halmaz részhalmazaira.

b.) A μ_n mértékek gyengén konvergálnak egy μ valószínűségi mértékhez $(X, \mathcal{A})$ téren.

A b.) esetben is teljesül a $\mu(\mathbf{K}) = 1$ tulajdonság.

5.) Legyen (X, ρ) teljes szeparábilis metrikus tér, és $x \in X$-re definiáljuk az x középpontú δ sugarú gömböt a következő formula segítségével: $S(x, \delta) = \{y \colon y \in X,\ \rho(x, y) < \delta\}$. Legyen μ valószínűségi mérték az $(X, \mathcal{A})$ téren. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$-ra megadható véges sok $x_1 \in X, \dots, x_n \in X$, $n = n(\varepsilon, \delta)$, pont úgy, hogy $\mu\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} S(x_j, \delta)\right) > 1 - \varepsilon$. Ennek az állításnak a segítségével lássuk be, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan kompakt $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\varepsilon) \subset X$ halmaz, melyre $\mu(\mathbf{K}) > 1 - \varepsilon$.

Megjegyzés: Érdemes megjegyezni, hogy e feladat állítása szerint egy az (X, ρ) metrikus téren definiált valószínűségi mérték nagyrésze a tér egy kis halmazára van koncentrálva. Míg véges dimenziós Euklideszi térben a kompakt halmazok megegyeznek a korlátos zárt halmazokkal, addig az általános esetben ez másképp van. Emlékeztetőül: Minden végtelen dimenziós Banach térben az egységgömb nem kompakt.

6.) Lássuk be az előző állítás következő élesítését: Ha μ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi mértékek kompakt sorozata az $(X, \mathcal{A})$ téren, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan kompakt $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\varepsilon) \subset X$ halmaz, melyre $\mu_n(\mathbf{K}) > 1 - \varepsilon$ minden n-re.

Be akarjuk látni ennak az állításnak a megfordítását a Tétel A segítségével. Először belátjuk a tételt abban a speciális esetben, amikor az X tér az Euklideszi tér kompakt részhalmaza (7. feladat). Ezt az eredményt felhasználjuk a kiegészítésben a a Tétel A bizonyításában. A Tétel A segítségével belátjuk a 6. feladat eredményének megfordítását, ami a kompakt tereken definiált valószínűségi mértékeknek (a gyenge konvergencia szerinti) kompaktságát kimondó Tétel általánosítása. (9. feladat). Ehhez előbb belátunk egy topológiai jellegű tételt (8. feladat).

7.) Lássuk be, hogy ha az X tér a k-dimenziós Euklideszi tér korlátos, zárt részhalmaza, $\mathcal{A}$ az ezen a téren értelmezett Borel σ-algebra, akkor tetszőleges az $(X, \mathcal{A})$ téren definiált μ_n valószínűségi mértékek sorozatának van gyengén konvergens részsorozata.

8.) Legyen (X, ρ) teljes szeparábilis metrikus tér. Lássuk be, hogy létezik olyan folytonos, injektív (= különböző pontok képe különböző), $\mathbf{T}$ leképezése az (X, ρ) térnek a a Tétel A-ban definiált (Z, ρ) tér $\mathbf{T}(X)$ részhalmazába, mely teljesíti a következő tulajdonságot is. Ha $\mathbf{K} \subset X$ az X tér kompakt részhalmaza, akkor a $\mathbf{T}$ leképezés megszorítása a $\mathbf{K}$ halmazra homeomorphizmus. (Azaz a $\mathbf{T}$ leképezés megszorítása a $\mathbf{K}$ kompakt halmazra folytonos, invertálható, és az inverz leképezés is folytonos.)

9.) Legyen μ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi mértékek sorozata egy (X, ρ) teljes szeparábilis metrikus tér által definiált $(X, \mathcal{A})$ mértéktéren, mely teljesíti a következő feltételt: Minden $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan kompakt $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\varepsilon) \subset X$ halmaz, melyre $\mu_n(\mathbf{K}) > 1 - \varepsilon$ minden n-re. Lássuk be, hogy a hogy a μ_n valószínűségi mértéksorozat kompakt.

A fenti feladatokban bizonyított eredményeket folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamatokra kívánjuk alkalmazni. Ennek érdekében jellemezzük a kompakt halmazokat a $C([0, 1])$ térben (11. feladat), majd egy egyszerű, de az általános metrikus terekben vett mértékek konvergenciájának az elméletében is fontos eredmény segítségével (12. feladat) megadjuk annak szükséges és elégséges feltételét, hogy $C([0, 1])$ térbeli mértékek gyengén konvergáljanak (13. feladat). A feladatsor néhány egyéb feladata ezen eredmények alkalmazhatóságát kívánja megmutatni. Ahhoz azonban, hogy a $C([0.1])$ térbeli konvergencia elméletét alkalmazhassuk tetszőleges folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamatra, tudni kell, hogy egy folytonos trajektóriájú a $[0.1]$ intervallum pontjaival paraméterezett sztochasztikus folyamat felfogható mint $C([0, 1])$ értékű valószínűségi változó. Ennek az állításnak a pontos megfogalmazása és bizonyítása a 10. feladat célja.

10.) Legyen $X(t) = X(t, \omega)$ folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamat az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Lássuk be, hogy $X(t, \omega)$ tekinthető egy $C([0, 1])$ értékű valószínűségi változónak is. Részletesebben megfogalmazva: Jelölje $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebrát R^1-en, és legyen $\mathcal{C}$ a Borel σ-algebra a $C([0, 1])$ téren, azaz legyen $\mathcal{C}$ a nyílt halmazok által generált legszűkebb σ-algebra a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények terén a szuprémum norma által generált topológiával. Lássuk be, hogy ha a $\mathbf{T}_t\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (R^1, \mathcal{B})$, $\mathbf{T}_t(\omega) = X_t(\omega)$, leképezés mérhető minden $t \in [0, 1]$-re, akkor a $\mathbf{T}\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (C([0, 1]), \mathcal{C})$, $\mathbf{T}(\omega) = X(\cdot, \omega)$ leképezés is mérhető.

Legyen $X(t)$, $0 \le t \le 1$, folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamat, és definiáljuk ennek $\mu_X$eloszlását a $C([0, 1])$ téren a következő módon: $\mu_X(\mathbf{K}) = P(X(\cdot, \omega) \in \mathbf{K})$ minden $\mathbf{K} \in \mathcal{C}$-re. Mutassuk meg, hogy a μ_X mértéket meghatározzák az $X(t)$

sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásai.

11.) Mutassuk meg, hogy a $C([0,1])$ tér, azaz a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények tere a szuprémum normával, teljes szeparábilis metrikus tér. Ezért az e téren értelmezett mértékekre alkalmazhatóak a fenti eredmények. Mutassuk meg, hogy a $C([0,1])$ térben egy zárt $\mathbf{K}$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha teljesíti a következő két feltételt:

(i) $\sup\limits_{f\in\mathbf{K}} |f(0)| < \infty$

(ii) A $\mathbf{K}$ halmazbeli függvények egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak, azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$\sup_{f\in\mathbf{K}} \sup_{\substack{0\le s,t\le 1\\ |t-s|<\delta}} |f(t)-f(s)| < \varepsilon$$

12.) Legyen adva két (X,ρ_1) és (Y,ρ_2) teljes szeparábilis metrikus tér, és legyenek $(X,\mathcal{A})$ illetve $(Y,\mathcal{B})$ az általuk generált mértékterek. Legyen $\mathbf{T}\colon (X,\mathcal{A}) \to (Y,\mathcal{B})$ mérhető leképezés. Definiáljuk egy az $(X,\mathcal{A})$ téren lévő μ mérték $\mathbf{T}\mu$ képét az $(Y,\mathcal{B})$ téren a következő módon: Egy mérhető $\mathbf{B}\subset Y$-ra legyen $\mathbf{T}\mu(\mathbf{B}) = \mu(\{x\colon x\in X,\ \mathbf{T}x \in \mathbf{B}\})$. Mutassuk meg, hogy ha a $\mathbf{T}$ leképezés folytonos minden $x\in X$-ben és a μ_n valószínűségi mértékek sorozata gyengén tart a μ mértékhez az $(X,\mathcal{A})$ térben $n\to\infty$ esetén, akkor a $\mathbf{T}\mu_n$ mértékek sorozata gyengén konvergál a $\mathbf{T}\mu$ mértékhez az $(Y,\mathcal{B})$ térben, ha $n\to\infty$.

13.) Legyenek $X_n(t)$, $n=1,2,\dots$, és $X(t)$ a $[0,1]$ intervallumon értelmezett, folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamatok. (Ez úgy is interpretálható, hogy X_n és X $C([0,1])$ értékű valószínűségi változók. Lásd ehhez pl. a normális eloszlás feladatsor 3. feladatát.) Legyen X_n (mint $C([0,1])$-beli valószínűségi változó) eloszlása μ_n, X eloszlása pedig μ a $C([0,1])$ térben. Lássuk be, hogy a μ_n valószínűségi mértékek sorozata akkor és csak akkor tart gyengén a μ valószínűségi mértékhez, ha a következő két feltétel teljesül:

(i) Tetszőleges $0\le t_1 < \dots < t_k \le 1$-re az $(X_n(t_1),\dots,X_n(t_k))$ valószínűségi vektorok eloszlásban konvergálnak az $(X(t_1),\dots,X(t_k))$ véletlen vektorhoz, ha $n\to\infty$.

(ii) Minden $\varepsilon>0$ és $\eta>0$-hoz létezik olyan $\delta=\delta(\varepsilon,\eta)>0$, hogy

$$\sup_{n\ge 1} P\left(\sup_{\substack{0\le s,t\le 1\\ |t-s|\le\delta}} |X_n(t)-X_n(s)| > \eta\right) < \varepsilon$$

Mutassuk meg, hogy a (ii) állításban a $\sup\limits_{n\ge 1}$ az $\sup\limits_{n\ge n_0}$-lal is helyettesíthető tetszőleges n_0-lal.

14.) Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{T}x = \sup\limits_{t\in[0,1]} x(t)$, $\mathbf{T}x = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$ és $\mathbf{T}x = \int_0^1 |x(t)|^p\,dt$, $p > 0$, leképezések folytonos leképezések a $C([0,1])$ térből a valós számegyenesre. Ha

$X_n(t)$ folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamatok eloszlásai $C([0,1])$ térben gyengén konvergálnak a Wiener folyamat eloszlásához, milyen határeloszlástételek következnek a fenti leképezések folytonosságából és a 11. feladatból?

15.) Lássuk be a 12. feladat következő élesítését: A feladat feltételeit gyengíthetjük a következő módon: Ha a $\mathbf{T}$ leképezés nem feltétlenül folytonos minden $x \in X$-re, de folytonos majdnem minden $x \in X$-re a μ mérték szerint, és a feladat többi feltétele érvényben marad, akkor is igaz, hogy $\mathbf{T}\mu_n \to \mathbf{T}\mu$, ha $n \to \infty$.

16.) Tekintsük a $\mathbf{T}x = \lambda\{t\colon x(t) > 0\}$ leképezést a $C([0,1])$ térből R^1-re, ahol $x = x(t)$, $0 \le t \le 1$, folytonos függvény, azaz $x \in C([0,1])$, és λ a Lebesgue mérték. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{T}x$ azon $x = x(t)$ pontokban folytonos, melyekre $\lambda\{t\colon t \in [0,1],\ x(t) = 0\} = 0$. Mutassuk meg, hogy ez a $\mathbf{T}$ transzformáció a Wiener mérték szerint egy valószínűséggel folytonos.

Megjegyzés: Mint egy másik feladatsorban feldolgozott eredmény mutatja, független valószínűségi változók részletösszegeiből természetes módon olyan véletlen töröttvonal függvény sorozatot lehet készíteni, amelyiknek az eloszlása a Wiener mértékhez tart. Láttuk, hogy ennek az eredménynek az a következménye, hogy e véletlen töröttvonal függvény sorozat sok leképezésének van határeloszlása, mely határeloszlás nem függ a véletlen töröttvonalat definiáló valószínűségi változók eloszlásától. Ezt a tényt szokták az irodalomban invariancia-elvnek hívni. Az utolsó két eredmény példát mutat olyan funkcionálra, amelyikre szintén alkalmazható az invariancia-elv, de ennek igazolása külön meggondolást igényel. Ennek a példának a vizsgálata fontos szerepet játszott az invariancia-elv vizsgálatában.

Megoldások

A megoldások leírása előtt leírjuk az eloszlásfüggvények tulajdonságait, melyek jellemzik is a többdimenziós eloszlásfüggvényeket.

(i) $F(x_1,\dots,x_k)$ minden változójának monoton függvénye.

(ii) $F(x_1,\dots,x_k)$ minden változójának balról folytonos függvénye.

iii) $\lim\limits_{\substack{x_j\to\infty\\ j=1,\dots,k}} F(x_1,\dots,x_k)=1$

(iv) $\lim\limits_{\substack{x_j\to-\infty\\ \text{valamely } 1\le j\le k\text{-ra}}} F(x_1,\dots,x_k)=0$

Végül definiáljuk egy adott F eloszlásfüggvényre és egy $\mathbf{K}=[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_k,b_k)$ téglatestre a

$$\mu(\mathbf{K})=\mu_F(\mathbf{K})=\sum_{\substack{u_j=\,a_j \text{ vagy } b_j\\ j=1,\dots,k}}(-1)^{\chi(u_1,\dots,u_k)}F(u_1,\dots,u_k)$$

mennyiséget, ahol $\chi(u_1,\dots,u_k)$ jelöli az a_j-k számát az $u_1,\dots,u_k$ sorozatban. Ekkor

(v) $\mu_F(\mathbf{K})\ge 0$ minden $\mathbf{K}$ téglatestre.

Egy k-változós $F(x_1,\dots,x_k)$ függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvénye egy k-dimenziós valószínűségi vektornak, ha teljesíti az (i)—(v) feltételeket. Megjegyezzük, hogy a $\mu_F(\mathbf{K})$ szám a $\mathbf{K}$ téglatest mértéke az F eloszlás által indukált mérték szerint. A fenti állítások bizonyítása megtalálható például *Rényi Alfréd: Valószínűségszámítás* című könyvében.

Megoldások:

1.)

a.) Eloszlásban való konvergencia $\Rightarrow$ integrálok konvergenciája:
Mivel $F(x_1,\dots,x_k)\to 1$, ha $x_j\to\infty$ minden $j=1,\dots,k$-ra, és $F(x_1,\dots,x_k)\to 0$, ha $x_j\to-\infty$ valamelyik $1\le j\le k$-ra, ezért tetszőleges $\varepsilon>0$-ra létezik olyan $\mathbf{K}$ téglatest, melyre $\mu_F(\mathbf{K})>1-\varepsilon$. Továbbá, mivel $F_n\to F$, ha $n\to\infty$, ezért elérhető, a $\mathbf{K}$ halmazt esetleg nagyobbra választva, hogy $\mu_{F_n}(\mathbf{K})>1-\varepsilon$ minden F_n, $n=1,2,\dots$, eloszlásfüggvényre. Azt is feltehetjük, hogy a $\mathbf{K}$ halmaz minden határpontja folytonossági pontja az F eloszlásfüggvénynek, mivel az F eloszlás vetülete a j-ik koordinátára olyan 1 dimenziós eloszlás, amelyiknek csak megszámlálható sok atomja van minden $j=1,\dots,k$-ra. Miért igaz ez az állítás, és miért következik belőle a megfogalmazott következény?

Az f függvény korlátossága miatt $|\int_{R^k\setminus\mathbf{K}} f(x_1,\dots,x_k)\,dF(x_1,\dots,x_k)|<\text{const.}\,\varepsilon$, és $|\int_{R^k\setminus\mathbf{K}} f(x_1,\dots,x_k)\,dF_n(x_1,\dots,x_k)|<\text{const.}\,\varepsilon$ minden $n=1,2,\dots$-ra. Továbbá, az f folytonos függvény egyenletesen folytonos a $\mathbf{K}$ téglatesten, ezért létezik olyan $\delta>0$, hogy $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, ha $|x-y|\le\delta$. A $\mathbf{K}$ téglatest felbontható véges sok, közös belső ponttal nem rendelkező, legfeljebb δ átmérőjű Δ_j, $j=1,\dots,p(\mathbf{K})$ téglatest uniójára, amelyeknek a határa 0 mértékű az F által indukált μ_F mérték szerint. Miért? Így $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{F_n}(\Delta_j) = \mu_F(\Delta_j)$ minden $j = 1, \dots, p(\mathbf{K})$-ra, és az f függvény egyenletes folytonossága miatt a $\mathbf{K}$ halmazon

$$\limsup \left| \int_{\mathbf{K}} f\, dF_n - \int_{\mathbf{K}} f\, dF \right| < \varepsilon\ .$$

A fenti egyenlőtlenségekből következik, hogy $\limsup \left| \int f\, dF_n - \int f\, dF \right| < \text{const.}\,\varepsilon$, ahol const. független az ε-tól. Mivel ez igaz minden $\varepsilon > 0$-ra, ebből következik a kivánt állítás.

b.) Integrálok konvergenciája $\Rightarrow$ eloszlásban való konvergencia:
Legyen $x = (x_1, \dots, x_k)$ az F eloszlásfüggvény folytonossági pontja. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy az $y = (y_1, \dots, y_k) = (x_1 - \delta, \dots, x_k - \delta)$ és $z = (z_1, \dots, z_k) = (x_1 + \delta, \dots, x_k + \delta)$ pontokra $F(y) > F(x) - \varepsilon$ és $F(z) < F(x) + \varepsilon$. Léteznek olyan $f_1(u)$ és $f_2(u)$ folytonos függvények az R^k-n, melyek teljesítik a következő feltételeket: $0 \le f_i(u) \le 1$ minden $u \in R^k$-ra, $i = 1, 2$; $f_1(u) = 1$, $u = (u_1, \dots, u_k)$-ra, ha $u_j \le y_j$, minden $j = 1, \dots, k$, $f_1(u) = 0$, ha $u_j \ge x_j$ valamely $1 \le j \le k$-re; $f_2(u) = 1$ ha $u_j \le x_j$ minden $j = 1, \dots, k$-ra, $f_2(u) = 0$, ha $u_j \ge z_j$ valamely $1 \le j \le k$-ra. Ekkor

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \ge \lim_{n\to\infty} \int f_1(u)\, dF_n(u) = \int f_1(u)\, dF(u) \ge F(x) - \varepsilon$$
$$\liminf_{n\to\infty} F_n(x) \le \lim_{n\to\infty} \int f_2(u)\, dF_n(u) = \int f_2(u)\, dF(u) \le F(x) + \varepsilon\ .$$

Mivel ezek az egyenlőtlenségek minden $\varepsilon > 0$-ra igazak, innen következik az állítás.

2.) A $\mu(G) \ge \sup\limits_{f \in \mathcal{F}_G} I_\mu(f)$ reláció nyílvánvaló. Belátjuk, hogy egy tetszőleges G nyílt halmazhoz és $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan folytonos f függvény az X téren, melyre $0 \le f(x) \le 1$ minden $x \in X$-re, $f(x) = 0$, ha $x \in X \setminus G$, és $f(x) = 1$ egy olyan zárt $F \subset G$ halmazon melyre $\mu(F) > \mu(G) - \varepsilon$. Innen következik, hogy a fenti relációban egyenlőséget is írhatunk. Minden $\delta > 0$-ra definiáljuk az $F_\delta = \{x\colon x \in X,\ \rho(x, X \setminus G) \le \delta\}$ halmazt. Ekkor F_δ zárt halmaz, és $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_{\frac{1}{n}} = G$. Ezért $F_\delta \subset G$ és elég kis $\delta > 0$-ra $\mu(F_\delta) > \mu(G) - \varepsilon$. Az $f(x) = 1 - \min(1, \delta^{-1}\rho(x, F_\delta))$ függvény teljesíti a kívánt feltételeket.
Jelölje $\mathcal{B}$ azon $\mathbf{A} \subset X$ mérhető halmazok osztályát, melyekre

$$\mu(\mathbf{A}) = \inf_{G\colon G \text{ nyílt},\ \mathbf{A} \subset G} \mu(G) \quad \text{és} \quad \mu(X \setminus \mathbf{A}) = \inf_{G\colon G \text{ nyílt},\ X \setminus \mathbf{A} \subset G} \mu(G)$$

Minden nyílt halmaz eleme $\mathcal{B}$-nek mert egy nyílt G halmaz fedései között szerepel sajátmaga, a komplementere $F = X \setminus G$ zárt, így $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_{\frac{1}{n}}$, ahol $G_u = \{x\colon x \in X,\ \rho(x, F) < u\}$ $u > 0$-ra. Ezért $\mu(F) = \inf\limits_n \mu(G_{\frac{1}{n}})$, és a nyílt G halmaz mind a két kívánt relációt teljesíti. A $\mathcal{B}$ halmazrendszer σ-algebra. Ha ugyanis $\mathbf{A}_n \in$

$\mathcal{B}$, $n = 1, 2, \dots$, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan nyílt $G_n \supset \mathbf{A}_n$, melyre $\mu(G_n) \le \mu(\mathbf{A}_n) + 2^{-(n+1)}$. Ezért $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}_n\right) \ge \mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n\right) - \varepsilon$, és elég nagy N-re $\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}_n\right) \ge \mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{N} \mathbf{A}_n\right) - \varepsilon \ge \mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{N} G_n\right) - 2\varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy mind az uniónak mind a metszetnek van alkalmas nyílt fedése, melynek mértéke alig haladja meg az unió illetve metszet mértékét. Hasonló állítás érvényes az $\mathbf{A}_n$ halmazok komplementeire is. Mivel a fenti becslések tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra igazak, ezért a $\mathcal{B}$ osztály megszámlálható metszetre, unióra és komplementerképzésre zárt. Mivel $\mathcal{B}$ tartalmazza a nyílt halmazokat, ezért tartalmazza a $\mathcal{A}$ σ-algebrát is.

A bebizonyított relációkból következik, hogy ha $I_{\mu_1}(f) \le I_{\mu_2}(f)$ minden folytonos f függvényre, akkor az első reláció szerint a nyílt, majd a második reláció szerint a mérhető halmazoknak a μ_1 mértéke kisebb, mint azok μ_2 mértéke. Speciálisan, az I_μ funkcionál meghatározza a μ mértéket.

3.) A b.) és c.) állítások ekvivalenciája nyílvánvaló.

a.) $\Rightarrow$ b.) Jelölje G_δ az F zárt halmaz δ sugarú környezetét, azaz legyen $G_\delta = \{x \colon x \in X;\ \rho(x, F) \le \delta\}$. Mivel $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_{\frac{1}{n}}$, ezért minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $\mu(G_\delta) < \mu(F) + \varepsilon$. Létezik az (X, ρ) téren olyan folytonos f függvény, mely teljesíti a következő feltételeket: $0 \le f(x) \le 1$ minden $x \in X$-re, $f(x) = 1$, ha $x \in F$, és $f(x) = 0$, ha $x \in X \setminus G_\delta$. Például a következőképp konstruálhatunk ilyen f függvényt: $f(x) = 1 - g(x)$, $g(x) = \min\{1, \delta^{-1}\rho(x, F)\}$. Ekkor az a.) tulajdonság teljesülése esetén a következőt írhatjuk:

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \le \lim_{n\to\infty} \int_X f(x)\mu_n(\,dx) = \int_X f(x)\mu(\,dx) \le \mu(G_\delta) \le \mu(F) + \varepsilon\ .$$

Mivel ez az egyenlőtlenség igaz minden $\varepsilon > 0$-ra, innen következik az állítás.

b.) $\Rightarrow$ a.) Mivel az $f(x) \equiv 1$ függvény integrálja minden μ_n és μ valószínűségi mérték szerint 1-gyel egyenlő, és az $I(\mu) \colon f \to \int_X f(x)\mu(\,dx)$ leképezés a folytonos függvények teréről a számegyenesre egy lineáris funkcionál tetszőleges μ mértékre, ezért az állítást elegendő olyan folytonos f függvényekre belátni, melyekre $0 \le f(x) \le 1$ minden $x \in X$-re. Továbbá elég azt belátni, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f(x)\mu_n(\,dx) \le \int_X f(x)\mu(\,dx)\ ,$$

mivel ezt az egyenlőtlenséget az $1 - f(x)$ függvényre alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f(x)\mu_n(\,dx) \ge \int_X f(x)\mu(\,dx)\ .$$

Minden $\varepsilon > 0$-ra definiáljuk a következő összegeket:

$$K(f, \mu, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{j=1}^{\frac{1}{\varepsilon}} \mu(\{x \colon x \in X,\ f(x) \ge j\varepsilon\})\ .$$

Mivel $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} K(f,\mu_n,\varepsilon)=\int_X f(x)\mu_n(\,dx)$, továbbá a konvergencia ebben a relációban egyenletes n-ben, és az analóg állítás igaz a μ mértékre is, elég azt belátni, hogy $\limsup\limits_{n\to\infty} K(f,\mu_n,\varepsilon)\le K(f,\mu,\varepsilon)$ minden $\varepsilon>0$-ra. Viszont az $\{x\colon x\in X,\ f(x)\le j\varepsilon\}$ halmazok zártak, ezért a feltétel alapján $\limsup\limits_{n\to\infty}\mu_n(\{x\colon x\in X,\ f(x)\le j\varepsilon\})\le \mu(\{x\colon x\in X,\ f(x)\le j\varepsilon\})$ minden j-re és ε-ra. Ezekből az egyenlőtlenségekből következik az állítás.

b.) és c.)$\Rightarrow$d.) Nyílvánvalóan, $\operatorname{Int}\mathbf{A}\subset\mathbf{A}\subset\bar{\mathbf{A}}$, ahol $\operatorname{Int}\mathbf{A}$ az $\mathbf{A}$ halmaz belsejét, $\bar{\mathbf{A}}$ pedig $\mathbf{A}$ lezártját jelöli. Alkalmazva ezekre a b.) és c.) állítást, megkapjuk a d.) állítást.

d.)$\Rightarrow$b.) Egy F zárt halmazra és $\delta>0$-ra definiáljuk az F halmaz $G_\delta=\{x\colon x\in X,\ \rho(x,F)\le\delta\}$ sugarú (zárt) környezetét. Mivel $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_{\frac1n}=F$, ezért minden $\varepsilon>0$-hoz létezik olyan $\delta_0>0$, hogy $\mu(G_\delta)\le\mu(F)+\varepsilon$ minden $\delta<\delta_0$-ra. Másrészt, mivel $(\partial G_\delta)=\{x: x\in X,\ \rho(x,F)=\delta\}$, ezért ezek a halmazok diszjunktak különböző δ-kra, és létezik olyan $\delta<\delta_0$ melyre $(\partial G_\delta)=0$. Egy ilyen δ-t választva kapjuk, hogy $\mu(F)\ge\mu(G_\delta)-\varepsilon=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(G_\delta)-\varepsilon\ge\limsup\limits_{n\to\infty}\mu_n(F)-\varepsilon$. Mivel ez az egyenlőtlenség igaz minden $\varepsilon>0$-ra, innen következik az állítás.

Tekintsük például a következő példát: $X=R^1$, a μ_n mérték az $\dfrac1n$ pontba van koncentrálva, a μ mérték pedig a 0 pontba. Ekkor μ_n gyengén konvergál a μ mértékhez, és $F=\{0\}$, $G=R^1\setminus F$ választás mutatja, hogy a $\limsup$ és $\liminf$ nem helyettesíthető limesszel a b.) és c.) részben.

4.) Az állítás következik a gyenge konvergenciának az előző feladat b.) pontbeli jellemzéséből. Az a.)$\Rightarrow$b.) igaz, mert az a.) feltétel teljesülése esetén

$$\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F)=\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F\cap\mathbf{K})\le\mu(F\cap\mathbf{K})=\mu(F)$$

minden zárt $F\subset X$ halmazra. Az utolsó azonosság igaz, mert $\mu(\mathbf{K})=1$, az $1=\limsup\limits_{n\to\infty}\mu_n(\mathbf{K})\le\mu(\mathbf{K})$ összefüggés miatt. A b.)$\Rightarrow$a.) állítás igaz, mivel a $\mathbf{K}$ halmaz zárt részhalmazai zárt részhalmazok az eredeti térben is.

A bizonyítás során láttuk, hogy a $\mu(\mathbf{K})=1$ állítás igaz a b.) feltétel teljesülése esetén is.

Megjegyzés: Az állítás bizonyítható közvetlenül a gyenge konvergencia eredeti definiciója segítségével is. De ekkor szükség van a következő nem triviális topológiai eredményre is: Egy az X tér valamely zárt részhalmazán értelmezett folytonos függvény kiterjeszthető egy az egész X téren folytonos függvénnyé. (Urison lemma.)

5.) Mivel az X tér szeparábilis, létezik rajta egy mindenütt sűrű x_n, $n=1,2,\dots$, sorozat. Ezért tetszőleges $\delta>0$-ra $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}S(x_n,\delta)=X$, ahonnan a $Q(\varepsilon,\delta)=\bigcup\limits_{n=1}^{K}S(x_n,\delta)$ halmazra $\mu(Q(\varepsilon,\delta))\ge 1-\varepsilon$, ha $K=K(\varepsilon,\delta)$ elég nagy. Ezért

$\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{Q}\,(\varepsilon 2^{-n}, \varepsilon 2^{-n})\right) \geq 1-\varepsilon$, ahol $\bar{Q}\,(\varepsilon 2^{-n}, \varepsilon 2^{-n})$, a $Q\,(\varepsilon 2^{-n}, \varepsilon 2^{-n})$ halmaz lezártját jelöli. Viszont a $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{Q}\,(\varepsilon 2^{-n}, \varepsilon 2^{-n})$ halmaz kompakt. (Például átlós eljárással belátható, hogy tetszőleges az e halmaz elemeiből álló sorozatnak van konvergens részsorozata. Ez azért igaz, mert alkalmas részsorozatnak véges sok pont kivételével az összes eleme valamelyik $S(x_{n(j,\varepsilon)}, \varepsilon 2^{-j})$ gömbben van minden $j=1,2,\dots$-ra.) Innen következik az állítás.

6.) Az elöző feladat konstrukcióját alkalmazhatjuk, ha belátjuk, hogy minden $\varepsilon>0$ és $\delta>0$-ra létezik olyan n-től független $K=K(\delta,\varepsilon)$ küszöbindex, melyre a $Q(\varepsilon,\delta)=\bigcup\limits_{n=1}^{K} S(x_n,\delta)$ halmaz teljesíti a $\mu_n(Q(\varepsilon,\delta))\geq 1-\varepsilon$ egyenlőtlenséget minden n-re. Definiáljuk a $K(n)=K(n,\varepsilon,\delta)$ küszöbindexet, mint a legkisebb olyan számot, melyre $\mu_n\left(\bigcup\limits_{l=1}^{K(n)} S(x_l,\delta)\right)>1-\varepsilon$. A feladat bizonyításához elég belátni azt, hogy a $K(n)=K(n,\varepsilon,\delta)$ sorozat bármely rögzített $\varepsilon>0$ és $\delta>0$ számra korlátos. Tegyük fel indirekt módon, hogy létezik olyan n_k sorozat, melyre $K(n_k)\to\infty$. Ennek a sorozatnak, kompaktsági feltevésünk szerint, létezik olyan n'_k részsorozata, melyre $\mu_{n'_k}$ gyengén konvergál egy μ valószínűségi mértékhez. Belátjuk, hogy ez nem lehetséges. Valóban, a μ mértékre létezik olyan N index, hogy $\mu(G)=\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{N} S(x_n,\delta)\right)\geq 1-\varepsilon/2$, és G nyílt halmaz. Ezért a $\mu_{n'_k}$ mértékek gyenge konvergenciájából a μ mértékhez és a 3c.) feladat állításából következik, hogy $\liminf\limits_{k\to\infty}\mu_{n'_k}(G)\geq\mu(G)\geq 1-\varepsilon/2$. Ez azonban nem lehetséges, mert a G halmaz definiciójából és az $K(n'_k)\to\infty$ tulajdonságból következik, hogy $\liminf\limits_{k\to\infty}\mu_{n'_k}(G)\leq 1-\varepsilon$. Ezért igaz a feladat állítása.

7.) Ágyazzuk be az X teret az R^k térbe, és jelölje $F_n(x)$ a μ_n mértékhez tartozó eloszlásfüggvényt. Válassszunk egy mindenütt sűrű megszámlálható $x^{(p)}$, $p=1,2,\dots$, sorozatot az R^k téren. Legyen $\mathcal{P}=\{x^{(p)},\ p=1,2,\dots\}$. Be lehet látni az átlós eljárás segítségével, hogy az F_n eloszlásfüggvényeknek van egy olyan F_{n_j} részsorozata, melyre az $F_{n_j}(x^{(p)})$ sorozat konvergál egy $\tilde{F}(x^{(p)})$ számhoz minden $x_p\in\mathcal{P}$ pontra, ha $j\to\infty$. Továbbá, mivel az összes mérték egy korlátos zárt halmazba van koncentrálva, ezért létezik olyan $L>0$ szám, hogy minden $n=1,2,\dots$-ra $F_n(x_1,\dots,x_k)=1$, ha $x_j\geq L$ minden $j=1,\dots,k$-ra, és $F_n(x_1,\dots,x_k)=0$, ha $x_j\leq -L$ valamilyen $1\leq j\leq k$-ra. Ugyanez a tulajdonság érvényes az F függvényre is, melyet a következő mø'don definiálunk. Legyen $F(x_1,\dots,x_k)=\lim\limits_{\substack{y_l\to x_l-0\\ l=1,\dots,k\\ (y_1,\dots,y_k)\in\mathcal{P}}}\tilde{F}(y_1,\dots,y_k)$ függvényt, ahol $y_l\to x_l-0$ azt jelenti, hogy az y_l sorozat szigorúan monoton növekvő módon tart az x_l számhoz. Lehet ellenőrizni, hogy az így konstruált $F(x_1,\dots,x_k)$ függvény teljesíti az (i)—(v) feltételeket, és

$$\lim_{j\to\infty} F_{n_j}(x_1,\dots,x_k)=F(x_1,\dots,x_k)$$

az F függvény minden folytonossági pontjában. Ezért az μ_{n_l} mértékek konvergálnak az F eloszlás által indukált μ mértékhez. Az előző feladat szerint a μ_n mértékek nemcsak az R^k-n konvergálnak gyengén a μ mértékhez, hanem annak korlátos zárt X részhalmazán is.

8.) A beágyazás elvégzéséhez jegyezzük meg, hogy a ρ metrika az (X,ρ) téren helyettesíthető olyan ρ_1 metrikával, mely ugyanazt a topológiát, ezért ugyanazt az $\mathcal{A}$ σ-algebrát definiálja, az (X,ρ_1) tér ezzel az új metrikával is teljes szeparábilis metrikus tér, és $\rho_1(x,y)\le 1$ minden $x\in X$ és $y\in X$ pontra. Valóban, a $\rho_1(x,y)=\min\{1,\rho(x,y)\}$ metrika teljesíti a kívánt feltételeket. Legyen $x_1,x_2,\dots$ egy mindenütt sűrű halmaz az (X,ρ) téren, és definiáljuk a $\mathbf{T}\colon X\to Z$ leképezést a következő módon: (A $(Z,\mathcal{B})$ teret a Tétel A-ban definiáltuk.)

$$\mathbf{T}(x)=(\rho_1(x,x_n),\ n=1,2,\dots),\quad \text{ha } x\in X\ .$$

Ez a leképezés folytonos, mert

$$\rho(\mathbf{T}x,\mathbf{T}y)\le\sum_{n=1}^\infty 2^{-n}|\rho_1(x,x_n)-\rho_1(y,x_n)|\le\sum_{n=1}^\infty 2^{-n}|\rho_1(x,y)|=\rho_1(x,y)\ .$$

Továbbá, ez a leképezés kölcsönösen egyértelmű, mert ha $x\neq y$, $x\in X$, $y\in X$, akkor $\rho_1(x,y)>2\delta$ alkalmas $\delta>0$ pozitív számra, és a $\mathbf{T}$ transzformáció definicójában kijelölt mindenütt sűrű x_n halmaznak létezik olyan x_m eleme, melyre $\rho_1(x,x_m)<\delta$. Ekkor $\rho_1(y,x_m)\ge\rho_1(y,x)-\rho_1(x,x_m)>\delta$, ezért $\rho_1(x,x_m)\neq\rho_1(y,x_m)$, és $\mathbf{T}x\neq\mathbf{T}y$. Ha $\mathbf{K}\subset X$ kompakt halmaz, akkor ennek $\mathbf{T}(\mathbf{K})$ képe a Z térnek kompakt részhalmaza. (Ez az állítás azért igaz, mert tetszőleges $\mathbf{T}x_n$, $x_n\in\mathbf{K}$, $n=1,2,\dots$, sorozatnak van konvergens részsorozata, mely eleme a $\mathbf{T}(\mathbf{K})$ halmaznak. Ugyanis, ha kiválasztjuk az x_n sorozatnak egy konvergens $x_{n_k}\to x\in\mathbf{K}$ részsorozatát, akkor $\mathbf{T}x_{n_k}\to\mathbf{T}x\in\mathbf{K}$.) A $\mathbf{T}$ leképezés megszorítása a kompakt $\mathbf{K}$ halmazra homeomorphizmus. Ehhez a már bebizonyított folytonosságon és inverálhatóságon kívül azt kell még belátni, hogy a $\mathbf{T}^{-1}$ leképezés folytonos a kompakt $\mathbf{T}(\mathbf{K})$ halmazon. Azt kell megmutatni, hogy minden $\mathbf{T}x_n\to\mathbf{T}x$, $x_n\in\mathbf{K}$, $n=1,2,\dots$, $x\in\mathbf{K}$ konvergens sorozatra $x_n\to x\in\mathbf{K}$. Ehhez elég belátni, hogy ha $x_{n_k}\to z$ az x_n, $x_n\in K$, $n=1,2,\dots$,sorozatnak valamely konvergens részsorozata, akkor létezik az $y=\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{T}x_{n_k}$ limesz, és $y=\mathbf{T}x$. Ekkor ugyanis a $\mathbf{T}$ leképezés folytonossága miatt $\mathbf{T}z=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{T}x_{n_k}=\mathbf{T}x$, ahonnan a $\mathbf{T}$ leképezés invertálhatósága miatt $z=x$. Viszont a $\mathbf{T}x_{n_k}$ sorozatnak mint a $\mathbf{T}x_n$ sorozat részsorozatának létezik az $y=\mathbf{T}x$ limesze.

9.) Tekintsünk minden $m=1,2,\dots$ számra egy olyan $\mathbf{K}_m$ kompakt halmazt, melyre $\mu_n(\mathbf{K}_m)\ge 1-\dfrac{1}{m}$. Feltehetjük, hogy ezek a $\mathbf{K}_m$ halmazok egymásba ágyazottak, mert ha ez a feltétel nem teljesült az eredeti $\mathbf{K}_m$ halmazokra, akkor e halmazokat helyettesíthetjük a $\bigcup\limits_{j=1}^m\mathbf{K}_j$ halmazokkal. Definiáljuk a $\bar\mu_n$ valószínűségi mértékeket a $(Z,\mathcal{B})$ téren a következő módon. Ha $\mathbf{B}\in\mathcal{B}$ a Z halmaz mérhető részhalmaza, akkor $\bar{\mu}_n(\mathbf{B}) = \mu_n(\{x\colon \mathbf{T}x \in \mathbf{B}\})$, ahol $\mathbf{T}$ az $(X, \mathcal{A})$ tér elöző feladatban definiált beágyazása a $(Z, \mathcal{B})$ térbe. A Tétel A miatt létezik a $\bar{\mu}_n$ sorozatnak konvergens $\bar{\mu}_{n_k}$ konvergens részsorozata, mely gyengén konvergál egy $\bar{\mu}$ valószínűségi mértékhez a $(Z, \mathcal{B})$ térben.

Definiáljuk a $\mathbf{K}_\infty = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \mathbf{K}_m$ halmazt. Ekkor $\mu_n(\mathbf{K}_\infty) = 1$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra, mert $\mu_n(\mathbf{K}_\infty) \ge \mu_n(\mathbf{K}_m) \ge 1 - \dfrac{1}{m}$ minden m-re. Továbbá, tetszőleges mérhető $\mathbf{A} \subset \mathbf{K}_\infty$ halmazra a $\mathbf{T}(\mathbf{A}) \subset Z$ mérhető részhalmaza a $(Z, \mathcal{B})$ térnek, és $\mu_n(\mathbf{A}) = \bar{\mu}_n(\mathbf{T}(\mathbf{A}))$. Ugyanis, $\mathbf{T}(\mathbf{A}) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \mathbf{T}(\mathbf{A} \cap \mathbf{K}_m) \in \mathcal{A}$, és $\bar{\mu}_n(\mathbf{T}(\mathbf{A})) = \lim\limits_{m\to\infty} \bar{\mu}_n(\mathbf{T}(\mathbf{A} \cap \mathbf{K}_m)) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu_n(\mathbf{A} \cap \mathbf{K}_m) = \mu(\mathbf{A})$. Ebben az érvelésben kihasználtuk, hogy a $\mathbf{T}$ leképezés injektiv (különböző pontok képe különböző), és homeomorphizmus a kompakt $\mathbf{K}_m$ halmazokon. Definiáljuk a μ mértéket mint a $\bar{\mu}$ mérték ősképét az $(X, \mathcal{A})$ téren. Pontosabban, ha $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$, akkor legyen $\mu(\mathbf{A}) = \mu(\mathbf{A} \cap \mathbf{K}_\infty) = \bar{\mu}(\mathbf{T}(\mathbf{A} \cap \mathbf{K}_\infty))$, ahol $\bar{\mu}$ a $\bar{\mu}_{n_k}$ mértékek gyenge limesze a $(Z, \mathcal{B})$ téren. Ekkor μ valószínűségi mérték az $(X, \mathcal{A})$ téren, és azt állítjuk, hogy a μ_{n_k} mértékek gyengén konvergálnak a μ mértékhez. Valóban, tetszőleges zárt $F \subset X$ halmazra és $\mathbf{K}_m$ halmazra a $\mathbf{T}(\mathbf{K}_m \cap F)$ halmaz is zárt (kompakt). Ezért a $\bar{\mu}_{n_k}$ mértékek gyenge konvergenciája, a 3.c) feladat eredménye és a $\mathbf{K}_m$ halmaz tulajdonsága alapján

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty} \mu_{n_k}(F) &\le \limsup_{k\to\infty} \mu_{n_k}(F \cap \mathbf{K}_m) + \frac{1}{m} = \limsup_{k\to\infty} \bar{\mu}_{n_k}(\mathbf{T}(F \cap \mathbf{K}_m)) + \frac{1}{m} \\ &\le \bar{\mu}(\mathbf{T}(F \cap \mathbf{K}_m)) + \frac{1}{m} = \mu(F \cap \mathbf{K}_m) + \frac{1}{m} \le \mu(F) + \frac{1}{m}\end{aligned}$$

minden $m \ge 1$-re. Ezért minden zárt $F \subset X$ halmazra $\limsup\limits_{k\to\infty} \mu_{n_k}(F) \le \mu(F)$, így a 3.c) feladat állítása alapján a μ_{n_k} mértékek gyengén tartanak a μ mértékhez.

10.) Azt kell belátni, hogy tetszőleges mérhető $C \in \mathcal{C}$ halmazra $\mathbf{T}^{-1}(C)$ mérhető halmaz, azaz eleme a $\mathcal{A}$ σ-algebrának. Elég ezt az állítást nyílt halmazokra belátni, mert ebből következik, hogy az állítás igaz a nyílt halmazok által generált σ-algebrára is. Miért? Tovább lehet redukálni az álltást a következő tipusú halmazokra: Ha $x = x(t) \in C([0,1])$, $\varepsilon > 0$, akkor legyen $S(x, \varepsilon) = \{y\colon y \in C([0,1]),\ \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)| < \varepsilon\}$. Elég belátni, hogy az $S(x, \varepsilon)$ tipusú halmazok ősképei mérhetőek minden $x \in C([0,1])$ és $\varepsilon > 0$-ra, mert tetszőleges nyílt halmaz előállítható megszámlálható sok ilyen halmaz uniójaként, és egy nyílt halmaz ősképe megegyezik az őt előállító unióban résztvevő halmazok ősképének az uniójával. A következő meggondolás mutatja, hogy $S(x, \varepsilon)$ mérhető halmaz. Jelölje Q a racionális számok halmazát a $[01, 1]$ intervallumban. Ekkor

$$\mathbf{T}^{-1} S(x, \varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{r\in Q} \left\{ \omega\colon |X(r, \omega) - x(r)| < \left(1 - \frac{1}{n}\right) \varepsilon \right\} \right)$$

(Miért?) Ebből a reprezentációból látszik, hogy $\mathbf{T}^{-1}S(x,\varepsilon)$ mérhető halmaz.

Az előző érvelés megmutatta, hogy az $\{X(t_1)\in\mathbf{A}_1,\dots,X(t_k)\in\mathbf{A}_k\}$ alakú halmazok, ahol $t_1,\dots,t_k$ tetszőleges pontok a $[0,1]$ intervallumban, $\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_k$ tetszőleges mérhető halmazok R^1-en, olyan algebrát alkotnak, amelyik generálja a $\mathcal{C}$ σ-algebrát. Mivel ezeknek a halmazoknak a mértéket meghatározzák az $X(t)$ folyamat véges dimenziós eloszlásai. Egy mérték kiterjesztése egy algebráról az általa generált σ-algebrára egyértelmű, ezért a véges dimenziós eloszlások meghatározzák a $\mathcal{C}$ σ-algebra halmazainak a mértékét is.

11.) Tekintsük rögzített pozitiv egész n-re azon függvények halmazát, melyek a $\dfrac{k}{n}$ pontokban valamilyen racionális értéket vesznek fel, ezen osztópontok között pedig lineárisak. E függvényhalmazok uniója $n=1,2,\dots$-ra egy a $C([0,1])$ térben mindenütt sűrű megszámlálható halmazt alkot, ezért a $C([0,1])$ tér szeparábilis. Mivel folytonos függvények limesze az egyenletes konvergencia szerint folytonos, ezért ez a tér teljes is.

a.) A $\mathbf{K}$ halmaz teljesíti (i)-et és (ii)-t $\Rightarrow$ a $\mathbf{K}$ halmaz kompakt. Mivel

$$|f(t)|\le|f(0)|+\frac{1}{\delta}\sup_{0\le u,v\le 1,\ |u-v|<\delta}|f(u)-f(v)|\,,$$

ezért, ha $\mathbf{K}$ teljesíti (i)-t és (ii)-t, akkor létezik olyan $C=C(\mathbf{K})>0$ konstans, hogy minden $f\in\mathbf{K}$-ra és $0\le t\le 1$-re $|f(t)|\le C$. Azt kell belátni, hogy tetszőleges f_n, $f_n\in\mathbf{K}$, $n=1,2,\dots$, függvénysorozatnak van egyenletesen konvergens részsorozata. Rögzítsünk egy mindenütt sűrű t_n, $n=1,2,\dots$ sorozatot, a $[0,1]$ intervallumban. Az f_n-nek van egy részsorozata, mely konvergens a t_1 pontban, ennek egy részsorozata, mely konvergens a t_2 pontban, ennek egy részsorozata, mely konvergens a t_3 pontban és így tovább. Végül átlós módszerrel kiválaszthatunk egy olyan $f_{n_k}(t)$ részsorozatot, mely mindegyik t_n pontban konvergál egy $f(t_n)$ számhoz. Azt állítjuk, hogy ez az $f_{n_k}(t)$ részsorozat (a (ii) tulajdonság teljesülése miatt) egyenletesen konvergál a $[0,1]$ intervallumban. Valóban, adott $\varepsilon>0$-hoz válasszunk olyan $\delta>0$-t, melyre $|f(u)-f(v)|\le\dfrac{\varepsilon}{3}$, ha $f\in\mathbf{K}$ és $|u-v|\le\delta$. Válasszuk ki a $t_1,t_2,\dots$ sorozatnak egy olyan véges $\{y_1=t_{j_1},y_2=t_{j_2},\dots,y_l=t_{j_l}\}$, $l=l(\delta)$, véges részhalmazát, melyre igaz az, hogy (e számokat monoton sorrendbe rakva) $0\le y_1\le\delta$, $0\le y_{j+1}-y_j\le\delta$, $j=1,\dots,l-1$, $y_l>1-\delta$. Válasszunk egy olyan k_0 számot, melyre igaz, hogy $|f_{n_k}(y_j)-f_{n_{\bar k}}(y_j)|\le\dfrac{\varepsilon}{3}$ minden $1\le j\le l$, ha $k\ge k_0$, $\bar k\ge k_0$. Ekkor tetszőleges $0\le u\le 1$ számhoz létezik olyan y_j, $1\le j\le l$ melyre $|u-y_j|\le\delta$. Ezért tetszőleges $k\ge k_0$, $\bar k\ge k_0$-ra

$$|f_{n_k}(u)-f_{n_{\bar k}}(u)|\le|f_{n_k}(u)-f_{n_k}(y_j)|+|f_{n_k}(y_j)-f_{n_{\bar k}}(y_j)|+|f_{n_{\bar k}}(y_j)-f_{n_{\bar k}}(u)|\le\varepsilon\,.$$

Mivel ez az állítás minden $\varepsilon>0$-ra $0\le 0\le 1$ számra és elég nagy $k_0=k_0(\varepsilon)$-ra igaz, ezért az f_{n_k} sorozat (a szuprémum norma szerint) Cauchy sorozatot alkot, amiből következik, hogy egyenletesen konvergens. (A fenti érvelésben tulajdonképpen az analízisben jól ismert Arzela–Ascoli tételt bizonyítottuk be.)

b.) A $\mathbf{K}$ halmaz kompakt $\Rightarrow$ $\mathbf{K}$ halmaz teljesíti (i)-et és (ii)-t. Definiáljuk a $\mathcal{G}_n = \{f\colon f \in C([0,1]),\ |f(0)| \le 1\}$, $n = 1, 2, \dots$, egymásba skatulyázott nyílt halmazokat a $C([0,1])$ térben. Mivel ezek uniója az egész tér, minden kompakt $\mathbf{K}$ halmazt lefed egy $\mathcal{G}_n$, halmaz. Ebből következik, hogy a $\mathbf{K}$ halmaz teljesíti az (i) tulajdonságot.

Rögzített $\varepsilon > 0$-ra definiáljuk a

$$\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n,\varepsilon} = \left\{ f\colon f \in C([0,1]),\ \sup_{\substack{0 \le u,v \le 1 \\ |u-v| \le \frac{1}{n}}} |f(u) - f(v)| < \varepsilon \right\}$$

halmazokat, $n = 1, 2, \dots$. Ezek a halmazok nyíltak, egymásba skatulyázottak, továbbá, mivel a $[0,1]$ intervallumon folytonos függvények egyenletesen folytonosak, ezért a $\mathcal{H}_n$ halmazok uniója, $n = 1, 2, \dots$-re (rögzített ε-nal) lefedi az egész $C([0,1])$ teret. Ezért egy kompakt $\mathbf{K}$ halmaz benne van egy $\mathcal{H}_{n,\varepsilon}$ halmazban elég nagy $n = n(\varepsilon)$-ra. Ezért $\mathbf{K}$ teljesíti a (ii) tulajdonságot is.

12.) *Első megoldás:* Azt kell belátni, hogy tetszőleges az $(Y, \mathcal{B})$ téren folytonos, korlátos $f(y)$ függvényre $\lim\limits_{n\to\infty} \int_Y f(y)\mathbf{T}\mu_n(\,dy) = \int_Y f(y)\mathbf{T}\mu(dy)$. Mivel $\int_Y f(y)\mathbf{T}\mu_n(\,dy) = \int_X f(\mathbf{T}x)\mu_n(\,dx)$, és az analóg állítás érvényes a μ mértékre, a bizonyítandó állítás ekvivalens a $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f(\mathbf{T}x)\mu_n(\,dx) = \int_X f(\mathbf{T}x)\mu(dx)$ azonossággal. Ez viszont azonnal következik a μ_n mértékek gyenge konvergenciájából, és abból a tényből, hogy a $g(x) = f(\mathbf{T}x)$ függvény folytonos és korlátos.

Második megoldás: Lássuk be az állítást a következő formában: Ha $F \subset Y$ zárt halmaz, akkor $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbf{T}\mu_n(F) \le \mathbf{T}\mu(F)$. Ez viszont ekvivalens a $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(\mathbf{T}^{-1}F) \le \mu(\mathbf{T}^{-1}F)$ állítással, ami azért igaz, mert folytonos T transzformáció esetén a $\mathbf{T}^{-1}F$ halmaz is zárt, és a μ_n mértékek gyengén konvergálnak a μ mértékhez.

13.) a.) (i) és (ii) teljesül $\Rightarrow$ igaz a gyenge konvergencia.

Elég belátni, hogy ha $X_n(t)$ teljesíti az (i) és (ii) feltételeket, akkor az $X_n(t)$ sorozat μ_n eloszlása kompakt sorozat, és μ_n tetszőleges konvergens részsorozatának a limesze megegyezik az $X(t)$ sztochasztikus folyamat eloszlásával. Az az állítás, hogy a μ_n mértéksorozat kompakt, azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan kompakt $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\varepsilon)$ halmaz a $C([0,1])$ térben, melyre $\mu_n(\mathbf{K}(\varepsilon)) > 1 - \varepsilon$. (Lásd a 6. és 9. feladatot.) A $C([0,1])$ tér kompakt halmazait pedig 11. feladatban írtuk le. Így elég belátni, hogy a feladat feltételeinek teljesülése esetén tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra megadható két olyan $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1(\varepsilon)$ és $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_2(\varepsilon)$ halmaz a $C([0,1])$ térben, melyeknek a μ_n mértéke nagyobb, mint $1 - \varepsilon$ minden $n \ge 1$-re, és a $\mathbf{K}_1$ halmazban levő függvények teljesítik a 11. feladat (i), a $\mathbf{K}_2$ halmazban levő függvények pedig a 11. feladat (ii) feltételét. Ekkor ugyanis $\mu_n(\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2) > 1 - 2\varepsilon$ minden $n \ge 1$-re, és $\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2$ kompakt halmaz. Az (i) tulajdonságot alkalmazva $t = 0$ választással kapjuk, hogy létezik olyan $K = K(\varepsilon)$ szám, melyre $\sup\limits_n P(|X_n(0)| < K) > 1 - \varepsilon$. Ezért elég nagy $K = K(\varepsilon)$-ra a $\mathbf{K}_1 = \{f\colon f \in C([0,1]),\ |f(0)| \le K\}$ teljesíti a 11. feladat (i) feltételét, és $\mu_n(\mathbf{K}_1) \ge 1 - \varepsilon$ minden $n \ge 1$-re.

Definiáljuk a

$$\mathbf{K}_2=\bigcap_{l=1}^{\infty}\mathbf{K}_2^{(l)}=\bigcap_{l=1}^{\infty}\left\{f\colon f\in C([0,1]),\ \sup_{\substack{0\le s,t\le 1\\|t-s|<\delta_l}}|f(t)-f(s)|<\frac{1}{l}\right\}$$

halmazt egy alkalmas $\delta_l\to 0$, $l=1,2,\dots$, sorozat segítségével. A 11. feladat (ii) feltétele teljesül ezen a $\mathbf{K}_2$ halmazon. Ugyanis, ha ez a feltétel teljesül minden $\eta=1/l$, $l=1,2,\dots$ számra, akkor teljesül minden $\eta>0$-ra is. Másrészt, a (ii) feltétel biztosítja azt, hogy $\mu_n(\mathbf{K}_2)>1-\varepsilon$ minden $n=1,2,\dots$-ra ha a $\delta_l>0$ számokat elég kicsinek választjuk. Ekkor ugyanis elérhető az, hogy $\mu_n(\mathbf{K}_2^{(l)})>1-\varepsilon 2^{-(l+1)}$ minden $n=1,2,\dots$ és $l=1,2,\dots$ számra, ahonnan következik a kívánt egyenlőtlenség. Így beláttuk, hogy a μ_n mértékek kompaktak.

Tekintsük az $X_n(t)$ sztochasztikus folyamatok egy gyengén konvergens $X_{n_j}(t)$ részsorozatát. Mivel a $\mathbf{T}\colon C([0,1])\to R^k$, $\mathbf{T}f=(f(t_1),\dots,f(t_k))$ leképezés folytonos tetszőleges $k=1,2,\dots$, és $0\le t_1<\dots<t_k\le 1$ számokra, ezért az előző feladat szerint az $X_{n_j}(t)$ sorozat gyenge limesze egy olyan sztochasztikus folyamat, melynek a $0\le t_1<\dots<t_k\le 1$ időpontokban vett együttes eloszlása megegyezik az $(X(t_1),\dots,X(t_k))$ véletlen vektor eloszlásával. Mivel ezek a véges dimenziós eloszlások meghatározzák a folyamat eloszlását, ezért az $X_{n_j}(t)$ folyamat eloszlása gyengén konvergál az $X(t)$ folyamat eloszlásához. Végül jegyezzük meg, hogy minden rögzített n-re, ha $X_n(t)$ folytonos trajektóriájú sorozat, akkor tetszőleges $\eta>0$-ra

$$P\left(\lim_{\delta\to 0}\sup_{\substack{0\le s,t\le 1\\|t-s|<\delta}}|X_n(t)-X_n(s)|>\eta\right)\to 0\,.$$

Ezért, ha a (ii) feltétel teljesül $\sup\limits_{n\ge n_0}$ módosítással, akkor a δ paraméter alkalmas kicsinyítésével elérhető, hogy ez a feltétel $\sup\limits_{n\ge 1}$ választással is teljesüljön.

b.) ha igaz a gyenge konvergencia $\Rightarrow$ (i) és (ii) teljesül.

Ha az $X_n(t)$ sorozat gyengén konvergál az $X(t)$ folyamathoz, akkor az előző feladat szerint a véges dimenziós eloszlásai is konvergálnak az $X(t)$ folyamat véges dimenziós eloszlásaihoz, ezért az (i) feltétel teljesül. Mivel az $X(t)$ folyamat trajektóriái folytonos függvények a $[0,1])$ intervallumon, ezért tetszőleges $\eta>0$-ra és $\varepsilon>0$-ra $P(X(\cdot)\in G(\eta,\delta))<\varepsilon$ elég kis $\delta>0$-ra, ahol

$$G(\eta,\delta)=\left\{x\colon x\in C([0,1]),\ \sup_{\substack{0\le s,t\le 1\\|s-t|\le\delta}}|x(t)-x(s)|\ge\eta\right\}\,.$$

Mivel a $G(\eta,\delta)$ halmaz zárt, és az $X_n(t)$ folyamatok eloszlásai gyengén konvergálnak az $X(t)$ folyamat eloszlásához, ezért $\limsup\limits_{n\to\infty} P(X_n(\cdot)\in G(\eta,\delta))<\varepsilon$. A δ paramétert esetleg kisebbnek választva, elérhető, hogy $\sup\limits_{1\le n<\infty} P(X_n(\cdot)\in G(\eta,\delta))<\varepsilon$. Ez viszont azt jelenti, hogy a (ii) feltétel is teljesül.

14.) A megadott leképezések folytonos transzformációk a $C([0,1])$ térből a számegyenesre. Valóban, a $\mathbf{T}x=\sup\limits_{t\in[0,1]} x(t)$ és $\mathbf{T}x=\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$ leképezésekre $|\mathbf{T}x-\mathbf{T}y|\le\sup\limits_{0\le t\le1}|x(t)-y(t)|=\rho(x,y)$, és a $\mathbf{T}x=\int_0^1|x(t)|^p\,dt$ leképezés teljesíti a $|\mathbf{T}x-\mathbf{T}y|\le p\sup\limits_{0\le t\le1}|x(t)|^{(p-1)}\rho(x,y)$, ha $p\ge1$ és $|\mathbf{T}x-\mathbf{T}y|\le\rho(x,y)^p$, ha $0<p\le1$. A 12. feladatból következik, hogy amennyiben az $X_n(t)$ folyamatok eloszlása gyengén konvergál a Wiener mértékhez, akkor a fenti $\mathbf{T}$ transzformációk (és tetszőleges a $C([0,1])$ térnek a számegyenesre való folytonos leképezése) esetében a $\mathbf{T}X_n(t)$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a $\mathbf{T}W(t)$ valószínűségi változó eloszlásához, ahol $W(t)$ Wiener folyamat.

15.) Az állítás bizonyításához elegendő belátni, hogy amennyiben a μ_n valószínűségi mértékek gyengén konvergálnak egy μ valószínűségi mértékhez, a $g(x)$ függvény korlátos és a μ mérték szerint majdnem minden pontban folytonos, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\int g(x)\mu_n(\,dx)=\int g(x)\mu(\,dx)$$

Felírva ugyanis, hogy mit jelent a $\mathbf{T}\mu_n$ mértékek gyenge konvergenciája a $\mathbf{T}\mu$ mértékhez, és a felírt formulát integráltranszformáció segítségével átírva az $(X,\mathcal{A})$ térbe, amint azt a 12. feladat 1. megoldásában tettük, a fenti formulát kell belátni tetszőleges $g(x)=f(\mathbf{T}x)$ függvényre, ha f folytonos és korlátos függvény az $(X,\mathcal{A})$ téren. Ekkor viszont a feladat feltételei teljesülése esetén a g függvény korlátos és majdnem minden x-re folytonos. Tovább redukálhatjuk a bizonyítandó állítást olyan a μ mérték szerint majdnem mindenütt folytonos g függvényekre, melyekre $0\le g(x)\le1$. Sőt, elegendő belátni azt, hogy $\liminf\limits_{n\to\infty}\int g(x)\mu_n(\,dx)\ge\int g(x)\mu(\,dx)$, mivel alkalmazva az utolsó állítást a $g(x)$ és $1-g(x)$ függvényre, megkapjuk, hogy abban $\liminf$ helyett $\lim$ és $\ge$ helyett $=$ írható. (Ugyanezt az érvelést használtuk a 3. feladat b.) $\Rightarrow$ a.) állításának a bizonyításában is. Ennek a bizonyításnak az érvelését használjuk a bizonyítás folytatásában is.) Rögzítsünk egy $\varepsilon>0$ számot, és definiáljuk a

$$K(g,\mu,\varepsilon)=\varepsilon\sum_{j=1}^{\frac1\varepsilon}\mu(\{x\colon x\in X,\ g(x)>j\varepsilon\})\,.$$

kifejezést. Mivel $\lim\limits_{\varepsilon\to0}K(g,\mu_n,\varepsilon)=\int_X g(x)\mu_n(\,dx)$, továbbá a konvergencia ebben a relációban egyenletes n-ben, és az analóg állítás igaz a μ mértékre is, elég azt belátni, hogy $\liminf_{n\to\infty} K(g,\mu_n,\varepsilon) \ge K(g,\mu,\varepsilon)$ minden $\varepsilon > 0$-ra. Ehhez elegendő megmutatni, hogy tetszőleges $u \in R^1$ és $\varepsilon > 0$-ra

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n\{x\colon g(x) > u-\varepsilon\} \ge \mu\{x\colon g(x) > u\} .$$

Vezessük be a következő jelöléseket: Legyen $\mathbf{A}$ azon $x \in X$ pontok halmaza, melyekben $g(x)$ folytonos. Egy $x \in \mathbf{A}$ ponthoz és $\varepsilon > 0$-hoz rendeljünk hozzá egy $\delta = \delta(x,\varepsilon) > 0$ számot úgy, hogy $|g(x)-g(y)| < \varepsilon$, ha $\rho(x,y) < \delta$, és legyen $U(x,\varepsilon) = \{y\colon \rho(x,y) < \delta\}$. Definiáljuk a

$$\mathbf{B}(u,\varepsilon) = \bigcup_{x\colon x\in\mathbf{A},\ \text{és}\ g(x)>u} U(x,\varepsilon)$$

halmazt. Ekkor $\{x\colon x\in X,\ g(x) > u-\varepsilon\} \supset \mathbf{B}(u,\varepsilon)$, a $\mathbf{B}(u,\varepsilon)$ halmaz nyílt, ezért a gyenge konvergencia 3. feladat c.) pontjában adott jellemzése miatt

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(\{x\colon g(x) > u-\varepsilon\}) \ge \liminf_{n\to\infty} \mu_n(\mathbf{B}(u,\varepsilon)) \ge \mu(\mathbf{B}(u,\varepsilon)) .$$

Másrészt, $\mu(\{x\colon g(x) > u\}) \le \mu(\mathbf{B},\varepsilon)$, mivel $\{g(x) > u\} \subset (\{g(x) > u\} \cap \mathbf{A}) \cup (X \setminus \mathbf{A}) \subset \mathbf{B}(u,\varepsilon) \cup (X\setminus\mathbf{A})$, és $\mu(X\setminus\mathbf{A}) = 0$. E relációkból következik a feladat állítása.

16.) a.) A $\mathbf{T}$ operátor folytonossági pontjainak leírása.

Ha $x \in C([0,1])$, $y \in C([0,1])$, és $\rho(x,y) < \varepsilon$ valamilyen $\varepsilon > 0$-val, akkor

$$\lambda\{t\colon x(t) > \varepsilon\} \le \mathbf{T}y \le \lambda\{t\colon x(t) > -\varepsilon\} ,$$

és $\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda\{t\colon x(t) > \varepsilon\} = \lambda\{t\colon x(t) > 0\}$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda\{t\colon x(t) > -\varepsilon\} = \lambda\{t\colon x(t) \ge 0\}$. Innen $\lambda\{t\colon x(t) \ge 0\} = \lambda\{t\colon x(t) > 0\}$, ha $\lambda\{t\colon x(t) = 0\} = 0$. Ezért $\varepsilon \to 0$ határátmenettel kapjuk a fenti formulában, hogy e feltétel mellett $\mathbf{T}y_n \to \mathbf{T}x$ ha $\rho(y_n,x) \to 0$, azaz a $\mathbf{T}$ leképezés ebben az x pontban folytonos. Ha $\lambda\{t\colon x(t) = 0\} > 0$, akkor az $y_n(t) = x(t) - \frac{1}{n}$ függvénysorozatra, $y_n \to x$, és $\mathbf{T}y_n \to \lambda\{t\colon x(t) \ge 0\} > \lambda\{t\colon x(t) > 0\} = \mathbf{T}x$, ezért a $\mathbf{T}$ leképezés ebben a pontban nem folytonos.

b.) A $\mathbf{T}$ operátor a μ_w Wiener mérték szerint egy valószínűséggel folytonos.

Definiáljuk a $\chi(x) = \lambda\{t\colon \chi(x) = 0\}$, $x \in C([0,1])$, függvényt. Elég belátni, hogy $\int \chi(x)\mu_w(\,dx) = 0$. E reláció bizonyítása érdekében tekintsük a $C([0,1]) \times [0,1]$ szorzatteret a szorzat σ-algebrával és a $\mu_w \times \lambda$ szorzatmértékkel. Definiáljuk a

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x(t) = 0 \\ 0 & \text{ha } x(t) \ne 0 \end{cases}$$

függvényt a szorzattéren, és számoljuk ki az I=$\int_{C([0,1])\times[0,1]} \varphi(x,t)d\mu_w(\,x)\,dt$ integrált a Fubini tétel segítségével két különböző módon. Először az x változó szerint integrálva kapjuk, hogy $I = 0$, mert rögzített t-re $\mu_w\{x\colon X(t) = 0\} = 0$. Először a t változó szerint integrálva $I = \int \chi(x)\mu_w(\,dx)$. A két azonosságot összehasonlítva megkapjuk a kívánt állítást.

Kiegészítés

A Tétel A bizonyítása. Definiáljuk egy a $(Z,\mathcal{B})$ téren értelmezett μ mértéknek a $\mu^{(k)}$ projekcióját az első k koordinátára a következő módon. Ha $\mathbf{A}\subset[0,1]^k$ mérhető halmaz, ahol $[0,1]^k$ jelöli a $[0,1]$ intervallum k-szoros direkt szorzatát önmagával, akkor legyen $\mu^{(k)}(\mathbf{A})=\mu(\{x\colon x=(x_1,x_2,\dots)\in Z,\ (x_1,\dots,x_k)\in A\})$.

Legyen μ_n valószínűségi mértékek tetszőleges sorozata a $(Z,\mathcal{B})$ téren. Alkalmazva a 7. feladat eredményét az $X=[0,1]^k\subset R^k$ egységkocka választással, kapjuk, hogy a μ_n sorozatnak van olyan $\mu_{n_k,1}$ részsorozata, melyre $\mu^{(1)}_{n_k,1}$ gyengén konvergál egy $\bar\mu^{(1)}$ valószínűségi mértékhez a $[0,1]$ intervallumon, ennek egy $\mu_{n_k,2}$ részsorozata, melyre $\mu^{(2)}_{n_k,2}$ gyengén konvergál egy $\bar\mu^{(2)}$ mértékhez a $[0,1]^2$ egységnégyzeten, és így tovább szukcesszive minden $p=1,2,\dots$-ra a $\mu_{n_k,p}$ sorozatnak, melyre $\mu^{(p)}_{n_k,p}$ gyengén konvergál egy $\bar\mu^{(p)}$ mértékhez a $[0,1]^p$ egységkockán, létezik olyan $\mu_{n_k,p+1}$ részsorozata, melyre $\mu^{(p+1)}_{n_k,p+1}$ gyengén konvergál egy $\bar\mu^{(p+1)}$ valószínűségi mértékhez a $[0,1]^{p+1}$ egységkockán. Végül átlós eljárással e sorozatok segítségével kapunk egy olyan μ_{n_k} részsorozatot, melyre igaz, hogy a $\mu^{(p)}_{n_k}$ mértéksorozat minden $p=1,2,\dots$-ra gyengén konvergál egy $\bar\mu^{(p)}$ mértékhez a $[0,1]^p$ egységkockán. A konstrukcióból következik, hogy a $\bar\mu^{(p)}$ mértékek konzisztensek, azaz tetszőleges $p\ge1$ és $s\ge0$-ra és $\mathbf{A}\subset[0,1]^p$ mérhető halmazra, $\bar\mu^{(p)}(\mathbf{A})=\bar\mu^{(p+s)}(\mathbf{A}\times\underbrace{[0,1]\times\cdots\times[0,1]}_{s})$. Miért? (Például a $\mu^{(p)}_{n_k}$ és $\mu^{(p+s)}_{n_k}$ mértékek gyenge konvergenciájából következik, hogy a $\mu^{(p)}$ mértéknek és a $\mu^{(p+s)}$ mérték vetületének az első p koordinátára olyanok az eloszlásfüggvényei, hogy ezek értékei megegyeznek azokban a pontokban, melyek mind a két eloszlásfüggvény folytonossági pontjai. Innen következik, hogy a két mérték is megegyezik.)

Ezért a Kolmogorov alaptétel alapján létezik olyan μ mérték a $(Z,\mathcal{B})$ téren, melyre $\mu^{(p)}=\bar\mu^{(p)}$ minden $p=1,2,\dots$-ra. Állítjuk, hogy a μ_{n_k} mértéksorozat gyengén konvergál a μ mértékhez. Innen következik a Tétel A állítása.

Azt kell belátni, hogy tetszőleges a $(Z,\mathcal{B})$ téren folytonos f függvényre, (amelyik szükségképpen korlátos is a Z tér kompaktsága miatt)

$$\lim_{k\to\infty}\int f(x)\mu_{n_k}(\,dx)=\int f(x)\mu(\,dx)\,.$$

Lássuk be az állítást először abban a speciális esetben, amikor $f(x)$ csak az $x\in Z$ első p koordinátájától függ, azaz $f(x)=f(y)$, ha $x=(x_1,\dots,x_p,x_{p+1},\dots)$ és $y=(x_1,\dots,x_p,y_{p+1},\dots)$. Ekkor definiáljuk az $\bar f(x_1,\dots,x_p)=\bar f(x_1,\dots,x_p,0,0,\dots)$ p változós, folytonos függvényt. Az f függvény és a $\mu^{(p)}_{n_k}$ mértékek tulajdonságai alapján a $\lim\limits_{k\to\infty}\int\bar f(x)\mu^{(p)}_{n_k}(\,dx)=\int\bar f(x)\bar\mu^{(p)}(\,dx)$, amiből következik, hogy

$$\lim_{k\to\infty}\int f(x)\mu_{n_k}(\,dx)=\int f(x)\mu(\,dx)\ ,$$

ha az $f(x)$ függvény az $x=(x_1,x_2,\dots)$ pontnak csak az első p koordinátájától függ. Ha $f(x)$ tetszőleges folytonos függvény a $(Z,\mathcal{B})$ téren, akkor $f(x)$ egyenletesen folytonos, mivel $f(x)$ kompakt téren értelmezett folytonos függvény. A Z téren definiált ρ metrika olyan, hogy $\rho(x,y) \le 2^{-p}$, ha az x és y pontok első p koordinátája megegyezik. Így tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra és Z-n értelmezett folytonos függvényre létezik olyan $p = p(\varepsilon, f)$ szám, melyre az $f_0(x_1, x_2, \dots) = f_{0,p}(x_1, x_2, \dots) = f(x_1, \dots, x_p, 0, 0, \dots)$ függvény teljesíti a $\sup\limits_{x\in Z} |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon$ feltételt. Innen következik, hogy $|\int f_0(x)\mu_{n_k}(\,dx) - \int f(x)\mu_{n_k}(\,dx)| \le \varepsilon$ és $|\int f_0(x)\mu(\,dx) - \int f(x)\mu(\,dx)| \le \varepsilon$. Továbbá, mivel $f_0(x)$ csak x első p koordinátájától függ, ezért $\lim\limits_{n_k\to\infty} \int f_0(x)\mu_{n_k}(dx) = \int f_0(x)\mu(\,dx)$. Ezekből a relációkból következik, hogy

$$\left|\limsup_{n_k\to\infty} \int f(x)\mu_{n_k}(dx) - \int f(x)\mu(\,dx)\right| \le 2\varepsilon\ .$$

Mivel ez az állítás igaz tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra, innen következik Tétel A.

Funkcionális határeloszlástétel

A következő feladatsor célja a centrális határeloszlástétel élesítése. Ebben felhasználjuk a *Valószínűségi mértékek gyenge konvergenciája metrikus terekben* feladatsor eredményeit. Belátjuk, hogy a centrális határeloszlástétel feltételeinek teljesülése esetén a valószínűségi változók részletösszegeiből természetes módon definiált véletlen töröttvonal függvény sorozat eloszlásai, mint $C([0,1])$ térbe képező valószínűségi változók eloszlásai, gyengén tartanak a Wiener mértékhez. Ennek és az említett feladatsor eredményeinek fontos következménye a következő állítás: Tekintsük a valószínűségi változók első n részletösszegét, $n = 1, 2, \dots$, és ennek az n részletösszegnek valamilyen függvényét. Függvények nagyon tág osztályára az így definiált véletlen függvényeknek van határeloszlása, ha $n \to \infty$. Ráadásul ez a határeloszlás univerzális abban az értelemben, hogy minden a tétel feltételeinek eleget tevő valószínűségi változók részletösszegeiből így elkészített valószínűségi változó sorozatnak ugyanaz a határeloszlása. Ezenkívül bebizonyítunk egy a statisztikai alkalmazásokban fontos eredményt arról, hogy egy statisztikai mintából elkészített empirikus eloszlásfüggvényre hasonló eredmény érvényes.

A független valószínűségi változók részletösszegeiről szóló centrális határeloszlástétel legáltalánosabb alakja a következő:

Centrális határeloszlástétel. Legyen adva minden $k = 1, 2, \dots$-ra valószínűségi változók egy $\xi_{k,1}, \dots, \xi_{k,n_k}$ sorozata, $n_k \to \infty$, ha $k \to \infty$, mely teljesíti a következő feltételeket:

(i) Rögzített k-ra a $\xi_{k,1}, \dots, \xi_{k,n_k}$ valószínűségi változók függetlenek.

(ii) $E\xi_{k,l} = 0$, $E\xi_{k,l}^2 = \sigma_{k,l}^2$ minden $k = 1, 2, \dots$, és $1 \le l \le n_k$-ra, $\sum\limits_{l=1}^{n_k} \sigma_{k,l}^2 = 1$.

(iii) Teljesül a következő, úgynevezett Lindeberg feltétel:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{n_k} E\xi_{k,l}^2 I(|\xi_{k,l}| > \varepsilon) \to 0 \quad \text{minden } \varepsilon > 0\text{-ra.}$$

Ekkor az $S_k = \sum\limits_{l=1}^{n_k} \xi_{k,l}$ valószínűségi változók $k \to \infty$ esetén eloszlásban konvergálnak a standard normális eloszláshoz.

Megfogalmazzuk, majd néhány feladat segítségével bebizonyítjuk a centrális határeloszlástétel funkcionális határeloszlástétel alakját. Tegyük fel a centrális határeloszlástétel feltételeit. Legyen $s_{k,0} = 0$, $S_k^{(0)} = 0$, és $s_{k,l} = \sum\limits_{p=1}^{l} \sigma_{k,p}^2$, $S_k^{(l)} = \sum\limits_{p=1}^{l} \xi_{k,p}$, $1 \le l \le n_k$. Definiáljuk a következő véletlen $S_k(t)$, $0 \le t \le 1$, $k = 1, 2, \dots$, töröttvonal függvényeket. $S_k(s_{k,l}) = S_k^{(l)}$, $l = 0, \dots, n_k$ (speciálisan $S_k(1) = S_k(s_{k,n_k}) = S_k$), és terjesszük ki az $S_k(\cdot)$ függvényeket ezen osztópontok között lineáris módon, azaz legyen $s_{k,l-1} \le t \le s_{k,l}$

esetén $S_k(t)=\left[\dfrac{1}{s_{k,l}-s_{k.l-1}}(t-s_{k,l-1})S_k^{(l)}+(s_{k,l}-t)S_k^{(l-1)}\right]$, $1\le l\le n_k$. Ekkor rögzített k-ra az $S_k(t)$ véletlen függvény felfogható mint egy $C([0,1])$ térbeli értékeket felvevő valószínűségi változó. Igaz a következő funkcionális határeloszlástétel.

Funkcionális centrális határeloszlástétel. A centrális határeloszlás fent megfogalmazott feltételeinek teljesülése esetén az előbb definiált $S_k(t)$ folyamatok eloszlásai a $C([0,1])$ térben gyengén konvergálnak a Wiener mértékhez, azaz a Wiener folyamatnak mint $C([0,1])$ térbeli valószínűségi változónak az eloszlásához.

A *Valószínűségi mértékek gyenge konvergenciája metrikus terekben* feladatsor 13. feladata megmutatja, hogy milyen állításokat kell bizonyítani e tétel igazolásához. Először bebizonyítunk két egyszerűbb állítást. Ezek közül az elsőt általánosabban fogalmazzuk meg, mint ahogy szükségünk van rá.

1.) Legyen X_n és Y_n, $n=1,2,\dots$, valószínűségi változóknak két sorozata, melyek értéküket egy $(X,\mathcal{A})$ téren veszik fel, ahol (X,ρ) teljes szeparábilis metrikus tér, és $\mathcal{A}$ a Borel σ-algebra ezen a téren. Tegyük fel, hogy az X_n és Y_n sorozat közel van egymáshoz a következő értelemben: $\rho(X_n,Y_n)\Rightarrow 0$, ha $n\to\infty$, ahol $\Rightarrow$ a sztochasztikus konvergenciát jelöli. Mutassuk meg, hogy ha az X_n, $n\to\infty$, sorozat eloszlása gyengén konvergál egy μ valószínűségi mértékhez az $(X,\mathcal{A})$ téren, akkor az Y_n, $n\to\infty$, sorozat eloszlása is gyengén konvergál ugyanahhoz a μ mértékhez.

   Megjegyzés: A fenti állítás legfontosabb speciális esete a következő: Ha $(X,\mathcal{A})=(R^k,\mathcal{B}^k)$ (a k dimenziós Euklideszi tér), és $X_n-Y_n\Rightarrow 0$ (ahol $\Rightarrow$ eloszlásban vagy, ami az adott esetben ekvivalens, sztochasztikus konvergenciát jelöl), akkor ha az X_n sorozatnak van határeloszlása, akkor az Y_n sorozatnak is van határeloszlása, amelyik megegyezik az X_n sorozat határeloszlásával.

   Mutassuk meg speciálisan, hogy a centrális határeloszlástétel (ii) feltétele gyengíthető a következő módon: Elég megkövetelni azt, hogy $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{l=1}^{n_k}\sigma_{k,l}^2\to 1$ a pontos azonosság helyett.

2.) Mutassuk meg, hogy a centrális határeloszlástétel feltételeiből következik, hogy $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{1\le l\le n_k}\sigma_{k,l}^2=0$.

3.) Mutassuk meg (a centrális határeloszlástétel felhasználásával) azt, hogy a centrális határeloszlástétel feltételeinek teljesülése esetén tetszőleges $0<t_1<t_2<\cdots<t_p\le 1$ számokra az $(S_k(t_1),\dots,S_k(t_p))$ vektorok eloszlásban konvergálnak $k\to\infty$ esetében a $(W(t_1),\dots,W(t_p))$ vektorhoz, ahol $W(t)$ a Wiener folyamat a $[0.1]$ intervallumon.

A *Valószínűségi mértékek gyenge konvergenciája metrikus terekben* feladatsor 13. feladatában szereplő másik feltétel teljesülésének az igazolásához meg kell mutatnunk azt, hogy bizonyos független valószínűségi változók részletösszegeinek a maximuma csak kis valószínűséggel vesz fel viszonylag nagy (= sokszor nagyobb, mint az összes valószínűségi változó összegének a szórása) értéket. Ebben a becslésben célszerű megszabadulni a maximumtól. Ez lehetséges alkalmas egyenlőtlenségek segítségével. Több olyan egyenlőtlenség ismeretes a valószínűségszámításban, melyek azt fejezik ki szemléletesen, hogy a részletösszegek maximuma nem sokkal nagyobb, mint az összes valószínűségi változó összege. Mi a következő nem túl nehéz, de e feladatsornak csak a kiegészítésében bizonyított lemmát fogjuk használni.

Lemma. Legyenek $X_1, \dots, X_n$ független valószínűségi változók, $EX_j = 0$, $EX_j^2 = \sigma_j^2$, $j = 1, \dots, n$, $s_n^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_j^2$. Ekkor minden $x > 0$-ra

$$P\left(\sup_{1\le j\le n} \sum_{p=1}^{j} X_p > x\right) \le \frac{4}{3} P\left(\sum_{p=1}^{n} X_p > x - 2s_n\right).$$

Először megmutatjuk, hogy e lemma segítségével a centrális határeloszlástétel feltételeinek teljesülése esetén a *Valószínűségi mértékek gyenge konvergenciája metrikus terekben* feladatsor 13. feladata (ii.) állításának a bizonyítását egyszerűbb állítás bizonyítására lehet visszavezetni.

4.) Lássuk be, hogy a centrális határeloszlástétel feltételeinek teljesülése esetén minden $\delta > 0$-ra és $k \ge k_0$-ra, ahol $k_0 = k_0(\delta)$ alkalmas küszöbindex, létezik olyan $0 = t_{k,0} < t_{k,1} < t_{k,2} < \cdots < t_{k,p} = 1$, $p = p(k, \delta)$, partíciója a $[0, 1]$ intervallumnak, melyre teljesülnek a következő feltételek: $t_{k,r} = s_{k,L(k,r)}$ alkalmas $1 \le L(k, r) \le n_k$-val, és $3\delta \le t_{k,r} - t_{k,r-1} \le 7\delta$, $1 \le r \le p$. Legyen $t_{k,0} = L(k, 0) = 0$. (Az $s_{k,l}$ számokat a funkcionális határeloszlástételben szereplő $S_k(t)$ töröttvonal konstrukciójában definiáltuk.) Minden elég nagy k-ra és $0 < \delta < 1$-re rögzítsünk egy ilyen particiót és az e particiót meghatározó $L(k, r)$, $0 \le r \le p(k, \delta)$ számokat. A kimondott lemma segítségével mutassuk meg, hogy a *Valószínűségi mértékek gyenge konvergenciája metrikus terekben* feladatsor 13. feladatában szereplő (ii) tulajdonság teljesül, ha minden $\eta > 0$-ra létezik olyan $\delta = \delta(\eta)$, hogy minden $0 < \delta \le \delta(\eta)$-ra az ehhez a δ-hoz tartozó partició teljesíti a

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{r=1}^{p(k,\delta)} P\left(\left|S_k^{(L(k,r))} - S_k^{(L(k,r-1))}\right| > \eta\right) = 0 \tag{a}$$

relációt, ahol az $S_k^{(l)}$ összeget az $S_k(t)$ véletlen töröttvonal konstrukciójában definiáltuk.

A következő feladat célja az, hogy megmutassuk: Az (a) relációban az $S_k^{(L(k,r))}$ összegekben szereplő $\xi_{k,l}$ valószínűségi változókat helyettesíthetjük ezek alkalmas csonkítottjával, illetve azokhoz még egy konstanst hozzáadhatunk, amitől az összeadandók nulla várható értékűek lesznek. Így a 4. feladat (a) állítása helyett egy egyszerűbb becslést is elég bizonyítani. Ebben a feladatban használjuk ki a Lindeberg feltételt. E feltétel biztosítja azt, hogy a $\xi_{k,l}$ valószínűségi változók nagy értékeinek a hatása elhanyagolható. (A $\xi_{k,l}$ változó nagy, ha nagyobb mint ε, azaz ε-szor az összeg szórásnégyzete. Tehát informális módon megfogalmazva, a $\xi_{k,l}$

értékét akkor tekintjük nagynak, ha ennek az egyetlen összeadandónak az értéke összemérhető a teljes S_k összeg tipikus értékeivel.)

5.) Legyen $\xi_{k,l}$, $k=1,2,\dots$, $1\le r\le n_k$ valószínűségi változóknak egy a centrális határeloszlástétel feltételeit kielégítő rendszere. Tetszőleges $\tau>0$-ra definiáljuk a $\bar\xi_{k,r}(\tau)=\xi_{k,r}I(|\xi_{k,r}|<\tau)$, $\bar\xi'_{k,r}(\tau)=\xi_{k,r}I(|\xi_{k,r}|\ge\tau)$ valószínűségi változókat. Legyen $m_{k,r}(\tau)=E\bar\xi_{k,r}(\tau)=-E\bar\xi'_{k,r}(\tau)$, és legyenek $\xi_{k,r}(\tau)=\bar\xi_{k,r}(\tau)-m_{k,r}(\tau)$, $\xi'_{k,r}(\tau)=\bar\xi'_{k,r}(\tau)+m_{k,r}(\tau)$. Definiáljuk továbbá az

$$S_k^{(r)}(\tau)=\sum_{p=1}^r \xi_{k,p}(\tau) \quad \text{és} \quad \bar S_k^{(r)}(\tau)=\sum_{p=1}^r \xi'_{k,p}(\tau), \quad 1\le r\le n_k$$

valószínűségi változókat. Mutassuk meg, hogy a centrális határeloszlástétel feltételeiből (a Lindeberg feltételből) következik, hogy

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{r=1}^{n_k} E|\bar\xi'_{k,r}(\tau)|=0\ ,$$

és

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{r=1}^{p} P\left(\left|\bar S_k^{(M(k,r))}(\tau)-\bar S_k^{(M(k,r-1))}(\tau)\right|>\eta\right)=0$$

minden $\eta>0$, $\tau>0$ valós, $p>0$ egész számokra és a $[0,n_k]$ intervallum tetszőleges $0=M(k,0)<M(k,1)<\dots<M(k,p)=n_k$ felosztására $M(k,r)$ egész számokkal. Ezért a 4. feladatban szereplő (a) reláció következik a következő állításból:

$$\limsup_{k\to\infty}\sum_{r=1}^{p(k,\delta)} P\left(\left|S_k^{(L(k,r))}(\tau)-S_k^{(L(k,r-1))}(\tau)\right|>\eta\right)\le \text{const.}\,(\eta)(\tau^2+\delta) \qquad \text{(b)}$$

minden $\eta>0$, $\tau>0$ és $0<\delta<\delta(\eta)$-ra, ahol az $L(k,r)$ számok megegyeznek a 4. feladatban szereplő (δ-tól függő), a $[0,1]$ intervallum particióját definiáló számokkal. (Valójában elég lenne a (b) becslés jobboldalán tetszőleges olyan $f(\eta,\delta,\tau)$ függvény, melyre $\lim\limits_{\substack{\delta\to0\\ \tau\to0}} f(\eta,\delta,\tau)=0$ minden $\eta>0$-ra.)

6.) Bizonyítsuk be az előző feladat (b) állítását, és így a funkcionális centrális határeloszlástételt.

A következő egyszerű feladat célja az, hogy egy példával megmutassuk: Sztochasztikus folyamatok véges dimenziós eloszlásainak a konvergenciája egy sztochasztikus folyamathoz a $C([0,1])$ térben nem elegendő ahhoz, hogy e folyamatok minden folytonos funkcionáljának legyen határeloszlása, amelyik a határfolyamat funkcionáljának az eloszlásához tart.

7.) Legyen $f_0(t)\equiv0$, $0\le t\le1$, $f_n(t)=nt$, ha $0\le t\le\dfrac1n$, $f_n(t)=2-nt$, ha $\dfrac1n\le t\le\dfrac2n$ és $f_n(t)=0$, ha $\dfrac2n\le t\le1$, $n=2,3,\dots$. Legyen az X_0 $C([0,1])$ értékű (elfajult) valószínűségi változó 1 valószínűséggel $f_0(t)$ függvény, az X_n valószínűségi változó pedig 1 valószínűséggel az $f_n(t)$ függvény, $n = 2, 3, \dots$. Mutassuk meg, hogy az X_n valószínűségi változók véges dimenziós eloszlásai konvergálnak az X_0 valószínűségi változó véges dimenziós eloszlásaihoz, de az X_n valószínűségi változók μ_n eloszlása nem konvergál gyengén az X_0 μ_0 eloszlásához a $C([0,1])$ téren, ha $n \to \infty$. Adjunk meg olyan $\mathbf{T}$ folytonos leképezést a $C([0,1])$ térből R^1-re, amelyikre $\mathbf{T}(X_n)$ nem konvergál eloszlásban $\mathbf{T}(X_0)$-hoz, ha $n \to \infty$.

Egy másik (különösen statisztikai alkalmazásokban) fontos $C([0.1])$ térbeli határeloszlástétel az empirikus eloszlásfüggvény alkalmas normáltjának a gyenge konvergenciája a Brown bridge-hez. Ennek megfogalmazásához először vezessünk be néhány fogalmat. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Definiáljuk a $\xi_1^{*(n)} \le \xi_2^{*(n)} \le \dots \le \xi_n^{*(n)}$ rendezett mintát, ami a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók nagyság szerinti rendezése. (Megjegyezzük, hogy mivel a ξ_j, $1 \le j \le n$, valószínűségi változók 1 valószínűséggel különbözőek, ezért a nagyság szerinti rendezés 1 valószínűséggel egyértelmű.) Definiáljuk az $F_n(t) = F_n(t,\omega)$, $n = 1, 2, \dots$, $0 \le t \le 1$, empirikus eloszlásfüggvényt a következő módon: $F_n(t) = F_n(t,\omega) = \dfrac{k}{n}$, ha $\xi_k^{*(n)}(\omega) \le t < \xi_{k+1}^{*(n)}(\omega)$, $k = 1, \dots, n-1$, ($\xi_0^{*(n)} = 0$ jelöléssel) és $F_n(t) = F_n(t,\omega) = 1$, ha $\xi_n^{*(n)}(\omega) \le t \le 1$. Mivel az $F_n(t)$ empirikus eloszlásfüggvény nem folytonos függvény, annak érdekében, hogy a $C([0,1])$ térben dolgozhassunk, bevezetjük az $\tilde{F}_n(t) = \tilde{F}_n(t,\omega)$ módosított eloszlásfüggvényt, melyben az $F_n(t)$ empirikus eloszlásfüggvénynek a $\xi_n^{*(k)}$ ugrópontokban felvett értékeit lineáris szakasszal kötjük össze. Formálisan felírva

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_n(t,\omega) &= \frac{k}{n}\frac{\xi_{k+1}^{*(n)} - t}{\xi_{k+1}^{*(n)} - \xi_k^{*(n)}} + \frac{k+1}{n}\frac{t - \xi_k^{*(n)}}{\xi_{k+1}^{*(n)} - \xi_k^{*(n)}} \quad \text{ha } \xi_k^{*(n)} \le t \le \xi_{k+1}^{*(n)} \\
\tilde{F}_n(t,\omega) &= 1 - \frac{1}{n}\frac{1-t}{1-\xi_n^{*(n)}} \quad \text{ha } \xi_n^{*(n)} \le t \le 1\,.
\end{aligned}
$$

Bebizonyítjuk a következő tételt:

Tétel. *Funkcionális határeloszlástétel az empirikus eloszlásfüggvényre.* Minden $n = 1, 2, \dots$ egész számra legyen adva független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változoknak egy $\xi_1, \dots, \xi_n$ sorozata. Tekintsük az ezen valószínűségi változók által a fent leírt módon definiált $\tilde{F}_n(t) = \tilde{F}_n(t,\omega)$ módosított empirikus eloszlásfüggvényeket és az $X_n(t) = X_n(t,\omega) = \sqrt{n}(\tilde{F}_n(t,\omega) - t)$ folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamatokat, $n = 1, 2, \dots$. Az $X_n(t)$ sztochasztikus folyamatok $C([0,1])$ térbeli eloszlásai gyengén konvergálnak a $B_0(t) = W(t) - tW(1)$ Brown bridge eloszlásához a $C([0,1])$ térben, ahol $W(t)$ a Wiener folyamatot jelöli.

Felmerülhet a kérdés, hogy amennyiben minket az $F_n(t)$ empirikus eloszlásfüggvény aszimptotikus viselkedése érdekel, nem lehet-e a fenti tételhez hasonló eredményt bizonyítani az $Y_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t)$ sztochasztikus folyamatokra. Ez lehetséges, de mivel az $Y_n(t)$ sztochasztikus folyamat nem folytonos trajektóriájú, ezért ennek az eredménynek a bizonyításához ki kell dolgozni a gyenge konvergencia elméletét általánosabb terekben. Ez megtalálható például *Patrick Billingsley: Convergence of Probability Measures* című könyvében. Mi ennek az elméletnek finomabb kérdéseit ebben a feladatsorban nem tárgyaljuk. Viszont megmutatjuk, hogy mivel $\sup\limits_{0\le t\le 1} |X_n(t)-Y_n(t)| = n^{-1/2}$ (a szuprémum a $t=\xi_k^{*(n)}-0$ pontokban vétetik fel, ahol $F_n(t)=\dfrac{k-1}{n}$ és $\tilde F_n(t)=\dfrac{k}{n}$) és az $X_n(t)$ sztochasztikus folyamatok eloszlásai gyengén konvergálnak egy $C([0,1])$ térbeli mértékhez, ezért az $X_n(t)$ folyamatok gyenge konvergenciája egyenértékű eredmény az $Y_n(t)$ folyamatok gyenge konvergenciájával. (A Billingsley könyvben kidolgozott elmélet akkor hasznos, ha sztochasztikus folyamatok gyenge konvergenciáját akarjuk belátni nem folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamathoz. Ilyen nem folytonos trajektóriájú határfolyamat lehet például a Poisson folyamat. E feladatsorban viszont ilyen tipusú eredményeket nem tárgyalunk.)

Megoldások

1.) Tudjuk, hogy ha $f(x)$ folytonos, korlátos függvény, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} f(X_n)$ létezik. Be akarjuk látni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f(Y_n)$ szintén létezik, és ez a két határérték megegyezik. Ehhez elég megmutatni azt, hogy $E[f(X_n)-f(Y_n)]\to 0$, ha $n\to\infty$. Ez az állítás következik a Lebesgue tételből, mivel a feladat feltételeinek teljesülése esetén

$$\sup_{1\le n\le\infty} |f(X_n)-f(Y_n)| < \text{const.}\,, \quad \text{és} \quad f(X_n)-f(Y_n)\Rightarrow 0\,,$$

ha $n\to\infty$. Az utolsó állítás igazolásánál használjuk ki, hogy mivel az X_n sorozat eloszlása gyengén konvergál, ezért tetszőleges $\varepsilon>0$-ra létezik olyan kompakt $\mathbf{K}=\mathbf{K}(\varepsilon)\subset X$ halmaz, melyre $P(X_n\in\mathbf{K})>1-\varepsilon$ minden $n=1,2,\dots$-ra (lásd *Valószínűségi mértékek gyenge konvergenciája metrikus terekben* feladatsor 6. feladatát), és egy folytonos $f(x)$ függvény a kompakt $\mathbf{K}$ halmazon egyenletesen folytonos.

Bevezetve az $s_k=\sum\limits_{l=1}^{n_k}\sigma_{k,l}^2$ jelölést, a centrális határeloszlástétel gyengített feltételeinek teljesülése esetén az $\dfrac{S_k}{s_k}$ sorozat eloszlásban konvergál a standard normális eloszláshoz. Mivel $E\left(S_k-\dfrac{S_k}{s_k}\right)^2\to 0$, ezért $S_k-\dfrac{S_k}{s_k}\Rightarrow 0$, ezért az S_k és $\dfrac{S_k}{s_k}$ sorozatnak ugyanaz a határeloszlása.

2.) Tetszőleges $\varepsilon>0$-ra

$$\sigma_{k,l}^2\le E\xi_{k,l}^2\le\varepsilon^2+E\xi_{k,l}^2 I(|\xi_{k,l}|>\varepsilon)\le\varepsilon+\sum_{l=1}^{n_k}E\xi_{k,l}^2 I(|\xi_{k,l}|>\varepsilon)\,.$$

Ebből az egyenlőtlenségből és a Lindeberg feltételből következik, hogy

$$\limsup_{k\to\infty}\sup_{1\le k\le n_k}\sigma_{k,l}^2\le\varepsilon\,.$$

Mivel ez az egyenlőtlenség minden $\varepsilon>0$-ra igaz, innen adódik az állítás.

3.) A feladat állítása ekvivalens a következő állítással: Az $\{S_k(t_j)-S_k(t_{j-1}),\ 1\le j\le p\}$ vektor eloszlása, $t_0=0$ és $S(t_0)=0$ jelöléssel, eloszlásban konvergál egy normális eloszlású $(Z_1,\dots,Z_p)$ vektorhoz, ahol $EZ_j=0$, $EZ_j^2=t_j-t_{j-1}$, $1\le j\le p$, és a $Z_1,\dots,Z_p$ valószínűségi változók függetlenek. Definiáljuk a $v_{k,j}=\sup\limits_{\substack{1\le l\le n_k\\ s_{k,l}\le t_j}} s_{k,l}$, és $u_{k,j}=\inf\limits_{\substack{1\le l\le n_k\\ s_{k,l}\ge t_{j-1}}} s_{k,l}$, $1\le j\le p$ számokat, és az $Y_{k,j}=S(v_{k,j})-S(u_{k,j})$ valószínűségi változókat, $1\le j\le p$. Azaz $v_{k,j}$ az utolsó t_j előtti, $u_{k,j}$ az első t_{j-1} utáni $s_{k,l}$ osztópont. A 2. feladat alapján $v_{k,j}\to t_j$ és $u_{k,j}\to t_{j-1}$, minden $1\le j\le p$-re, ha $k\to\infty$. Ezért $Y_{k,j}-[S_k(t_j)-S_k(t_{j-1})]\Rightarrow 0$ és $EY_{k,j}^2\to t_j-t_{j-1}$, $EY_{k,j}=0$

minden $1 \le j \le p$-re, ha $k \to \infty$. Továbbá rögzített k-ra az $Y_{k,1}, \dots, Y_{k,p}$ valószínűségi változók függetlenek, mivel ezek bizonyos $\xi_{k,l}$ egymástól független valószínűségi változók összegei, és az egyes $Y_{k,j}$ valószínűségi változókat definiáló összegekben különböző $\xi_{k,l}$ valószínűségi változók vesznek részt. Az 1. feladat alapján a bizonyítandó állítás ekvivalens azzal az állítással, hogy az $(Y_{k,1},\dots,Y_{k,p})$ véletlen vektor eloszlásban konvergál a $(Z_1,\dots,Z_k)$ vektorhoz. Ehhez viszont az $Y_{k,j}$ valószínűségi változók függetlensége miatt elég belátni azt, hogy az $Y_{k,j}$ valószínűségi változók rögzített $1 \le j \le p$-re konvergálnak egy 0 várható értékű, $t_j - t_{j-1}$ szórásnégyzetű normális valószínűségi változóhoz, ha $k \to \infty$. Miért? Ez az állítás következik a centrális határeloszlástételből, mivel az $Y_{k,j}$ valószínűségi változók felírhatók mint független valószínűségi változók összegei, melyek teljesítik a centrális határeloszlátétel átskálázott változatát.

4.) Válasszuk k_0-t olyan nagynak, hogy $k > k_0$-ra $\sigma^2_{k,r} < \delta$ minden $1 \le r \le n_k$-ra. (Ez lehetséges, lásd a 2. feladatot.) Legyen $s_{k,0} = L_{k,0} = 0$, és ha $t_{k,r}$ és $L(k,r)$ már definiálva van, akkor legyen $L(k,r+1) = \min\{l\colon s_{k,l} \ge t_{k,r} + 3\delta\}$, ha $t_{k,r} \le 1 - 7\delta$, $L(k,r+1) = n_k$, ha $1 - 7\delta < t_{k,r} < 1$, és $p(q,\delta) = r$, ha $t_{k,r} = 1$. Legyen $s_{k,r+1} = s_{k,L(k,r+1)}$. Ez a partició nyílván teljesíti a feladatban megkívánt tulajdonságokat. Mivel $\min(S_k^{(l)}, S_k^{(l+1)}) \le S_k(t) \le \max(S_k^{(l)}, S_k^{(l+1)})$, ha $s_{k,l} \le t \le s_{k,l+1}$, és $s_{k,l+1} - s_{k,l} \le \delta$ ha $k > k_0$, ezért

$$\sup_{\substack{0\le s,t\le 1\\ |t-s|<\delta}} |S_k(t) - S_k(s)| \le 4 \sup_{\substack{0\le p,q\le n_k\\ |s_{k,p})-s_{k,q}|<3\delta}} |S_k(s_{k,p}) - S_k(s_{k,q})|$$

$$\le 3 \sup_{0\le r<p(k,\delta)} \sup_{L(k,r)\le l\le L(k,r+1)} \left| S_k^{(l)} - S_k^{(L_{k,r})} \right| .$$

Legyen $\delta < \delta_0 < \dfrac{\eta^2}{7\cdot 36}$. Ekkor $E\left(S_k^{(L_{k,r+1})} - S_k^{(L_{k,r})}\right)^2 \le 7\delta < \left(\dfrac{\eta}{6}\right)^2$. Ezért az előző egyenlőtlenségből és a lemmából következik, hogy

$$P\left(\sup_{\substack{0\le s,t\le 1\\ |t-s|<\delta}} |S_k(t) - S_k(s)| > \eta \right)$$

$$\le \sum_{r=0}^{p(k,\delta)-1} P\left(\sup_{L(k,r)\le l\le L(k,r+1)} \left| S_k^{(l)} - S_k^{(L_{k,r})} \right| > \frac{\eta}{3} \right)$$

$$\le \frac{4}{3} \sum_{r=0}^{p(k,\delta)-1} P\left(\left| S_k^{(L_{k,r+1})} - S_k^{(L_{k,r})} \right| > \frac{\eta}{6} \right) ,$$

ha $k > k_0$ és $\delta < \delta_0$. Ezért a feladatban megfogalmazott (a) relációból, (η helyett $\eta/6$ választással) következik a *Valószínűségi mértékek gyenge konvergenciája metrikus terekben* feladatsor 13. feladatának (ii.) feltétele az $S_k(t)$ sorozatra.

5.)

$$\sum_{r=1}^{n_k} E|\bar{\xi}_{k,r}(\tau)| \le \frac{1}{\tau} \sum_{r=1}^{n_k} E\xi^2_{k,r} I(\xi_{k,r} > \tau) \to 0$$

rögzített $\tau > 0$-ra,ahol a konvergencia teljesül $k \to \infty$ esetén a Lindeberg feltétel alapján. Ez a feladat első állítása. Másrészt,

$$\begin{aligned}\bar{S}_k^{(M(k,r))}(\tau) - \bar{S}_k^{(M(k,r-1))}(\tau) &= \sum_{p=M(k,r-1)+1}^{M(k,r)} \xi'_{k,p}(\tau) \\ &= \sum_{p=M(k,r-1)+1}^{M(k,r)} \bar{\xi}'_{k,p}(\tau) + \sum_{p=M(k,r-1)+1}^{M(k,r)} m_{k,p}(\tau)\end{aligned}$$

és a feladat már bizonyított állítása szerint

$$\sum_{p=M(k,r-1)+1}^{M(k,r)} m_{k,p}(\tau) \le \sum_{p=1}^{n_k} E|\bar{\xi}_{k,p}(\tau)| \le \frac{\eta}{2} \,,$$

ha $k > k_0$, $k_0 = k_0(\eta, \tau)$. Továbbá, esetleg k_0-t τ-tól függően nagyobbnak választva azt is feltehetjük, hogy $|m_{k,p}| \le \tau/2$ $k > k_0$-ra, és $p = 1, \dots, n_k$-ra. Ezért $|\xi_{k,p}| > \tau/2$, ha $|\bar{\xi}_{k,p}| > \tau$, és $E\bar{\xi}'_{k,p}(\tau)^2 < E\xi^2_{k,p} I(|\xi_{k,p}| > \frac{\tau}{2})$. Ezért a Csebisev egyenlőtlenséget alkalmazva a $\bar{\xi}'_{k,p}(\tau)$ független 0 várható értékű valószínűségi változók összegére kapjuk, hogy $k > k_0$-ra

$$\begin{aligned}P\left(\left|\bar{S}_k^{(M(k,r))}(\tau) - \bar{S}_k^{(M(k,r-1))}(\tau)\right| > \eta\right) &\le P\left(\sum_{p=M(k,r-1)+1}^{M(k,r)} \bar{\xi}'_{k,p}(\tau) > \frac{\eta}{2}\right) \\ &\le \frac{4}{\eta^2} \sum_{p=M(k,r-1)+1}^{M(k,r)} E\bar{\xi}'_{k,p}(\tau)^2 \le \frac{4}{\eta^2} \sum_{p=M(k,r-1)+1}^{M(k,r)} E\xi^2_{k,p} I\left(|\xi_{k,p}| > \frac{\tau}{2}\right)\end{aligned}$$

és

$$\sum_{r=1}^{p} P\left(\left|\bar{S}_k^{(M(k,r))}(\tau) - \bar{S}_k^{(M(k,r-1))}(\tau)\right| > \eta\right) \le \frac{4}{\eta^2} \sum_{p=1}^{n_k} E\xi^2_{k,p} I\left(|\xi_{k,p}| > \frac{\tau}{2}\right) \,.$$

Az utolsó kifejezés jobboldala nullához tart a Lindeberg feltétel miatt. Ezzel a feladat második állítását beláttuk. Mivel az (a) állításban szereplő összeg tagjaira igaz, hogy

$$\left|S_k^{L(k,r)} - S_k^{L(k-1,r)}\right| \le \left|(\bar{S}_k^{L(k,r)}(\tau) - \bar{S}_k^{L(k-1,r)}(\tau))\right| + \left|(S_k^{L(k,r)}(\tau) - S_k^{L(k-1,r)}(\tau))\right|$$

ezért a (b) tulajdonság teljesülése esetén alkalmazva az 5. feladat második becslését $p = p(k, \delta)$, $M(k,r) = L(k,r,\delta)$ szereposztással és η helyett $\eta/2$-t választva mind ebben a becslésben mind a (b) állításban, kapjuk, hogy

$$\limsup_{k\to\infty}\sum_{r=1}^{p(k,\delta)} P\left(\left|S_k^{(L(k,r))}-S_k^{(L(k,r-1))}\right|>\eta\right)$$
$$\le \lim_{k\to\infty}\sum_{r=1}^{p(k,\delta)} P\left(\left|\bar S_k^{(L(k,r))}(\tau)-\bar S_k^{(L(k,r-1))}(\tau)\right|>\frac{\eta}{2}\right)$$
$$+\limsup_{k\to\infty}\sum_{r=1}^{p(k,\delta)} P\left(\left|S_k^{(L(k,r))}(\tau)-S_k^{(L(k,r-1))}(\tau)\right|>\frac{\eta}{2}\right)\le \text{const.}\,(\eta)(\tau^2+\delta).$$

Mivel ezt az egyenlőtlenséget alkalmazhatjuk tetszőleges $\tau>0$, $\delta>0$ és $\eta>0$ számokra, $\delta\to 0$ és $\tau\to 0$ határátmenettel kapjuk, hogy az (a) állítás bizonyításához (a centrális határeloszlástétel feltételeinek a teljesülése esetén) elég belátni a (b) állítást.

6.) Természetes próbálkozás lenne a

$$\sum_{r=1}^{p(k,\delta)} P\left(\left|S_k^{(L(k,r))}(\tau)-S_k^{(L(k,r-1))}(\tau)\right|>\eta\right)$$
$$\le \frac{1}{\eta^2}\sum_{r=1}^{p(k,\delta)} E\left(S_k^{(L(k,r))}(\tau)-S_k^{(L(k,r-1))}(\tau)\right)^2 \quad \left(=\frac{1}{\eta^2}\right)$$

egyenlőtlenség segítségével megpróbálni a (b) állítás becslését bizonyítani. Ez a becslés azonban túl durva. A becslés durvaságának az az oka, hogy a második momentum becslésében nem tudjuk kihasználni azt, hogy az egyes $\xi_{k,p}$ valószínűségi változókat csonkítottuk egy kis τ szinten. Viszont ezt a módszert finomítva, felhasználjuk a

$$\sum_{r=1}^{p(k,\delta)} P\left(\left|S_k^{(L(k,r))}(\tau)-S_k^{(L(k,r-1))}(\tau)\right|>\eta\right)$$
$$\le \frac{1}{\eta^4}\sum_{r=1}^{p(k,\delta)} E\left(S_k^{(L(k,r))}(\tau)-S_k^{(L(k,r-1))}(\tau)\right)^4$$

egyenlőtlenséget, és azt állítjuk, hogy

$$\sum_{r=1}^{p(k,\delta)} E\left(S_k^{(L(k,r))}(\tau)-S_k^{(L(k,r-1))}(\tau)\right)^4\le \text{const.}\,(\tau^2+\delta)\,.$$

A két utolsó egyenlőtlenségből következik a (b) egyenlőtlenség is.

Mivel a $\xi_{k,p}(\tau)$ valószínűségi változók függetlenek és nulla várható értékűek,

$$E\left(S_k^{(L(k,r))}(\tau)-S_k^{(L(k,r-1))}(\tau)\right)^4=\sum_{p=L(k,r-1)+1}^{L(k,r)}E\xi_{k,p}(\tau)^4 + \sum_{\substack{L(k,r-1)<p,q\le L(k,r)\\ p\neq q}}E\xi_{k,p}(\tau)^2E\xi_{k,q}(\tau)^2\ .$$

Mivel $|\xi_{k,p}(\tau)|\le\tau+|m_{k,p}(\tau)|<2\tau$ elég nagy k-ra, (az $|m_{k,p}(\tau)|\le\tau$ egyenlőtlenség következik az 5. feladat első egyenlőtlenségéből), ezért

$$\sum_{p=L(k,r-1)+1}^{L(k,r)}E\xi_{k,p}(\tau)^4\le 4\tau^2E\sum_{p=L(k,r-1)+1}^{L(k,r)}E\xi_{k,p}(\tau)^2\le 4\tau^2E\sum_{p=L(k,r-1)+1}^{L(k,r)}E\xi_{k,p}^2$$

minden $1\le r\le p(k,\delta)$-ra, ha $k\ge k_0=k_0(\tau)$. Másrészt,

$$\sum_{\substack{L(k,r-1)<p,q\le L(k,r)\\ p\neq q}}E\xi_{k,p}(\tau)^2E\xi_{k,q}(\tau)^2\le\left(\sum_{p=L(k,r-1)+1}^{L(k,r)}E\xi_{k,p}(\tau)^2\right)^2\le 7\delta\sum_{p=L(k,r-1)+1}^{L(k,r)}E\xi_{k,p}^2$$

minden $1\le r\le p(k,\delta)$-ra, az $E\xi_{k,p}(\tau)^2\le E\xi_{k,p}^2$ egyenlőtlenség és az $L(k,r)=L(k,r,\delta)$ sorozat definiciója miatt. Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva minden $p=1,\dots,p(k,\delta)$-ra, kapjuk, hogy

$$\sum_{r=1}^{p(k,\delta)}E\left(S_k^{(L(k,r))}(\tau)-S_k^{(L(k,r-1))}(\tau)\right)^4\le(4\tau^2+7\delta)\sum_{p=1}^{n_k}E\xi_{k,p}^2\le\text{const.}\,(\tau^2+\delta)\ ,$$

és ezzel bebizonyítottuk a (b) egyenlőtlenséget $k>k_0(\delta,\tau)$ esetén. A fenti feladatsor eredményeiből következik, hogy a funkcionális határeloszlástétel megfogalmazásában szereplő $S_k(t)$ sztochasztikus folyamatok eloszlásai a $C([0,1])$ térben és a Wiener mérték a centrális határeloszlástétel megfogalmazott feltételeinek teljesülése esetén teljesítik a *Valószínűségi mértékek gyenge konvergenciája metrikus terekben* feladatsor 13. feladatában előírt feltételeket. Ezért igaz a funkcionális határeloszlástétel.

7.) Rögzítve bizonyos $0=t_0<t_1<\cdots<t_k\le1$ számokat az $f_n(t_j)$, $0\le j\le k$, (elfajult) valószínűségi változók együttes eloszlása megegyezik az (elfajult) $f_0(t_j)$, $0\le j\le k$, valószínűségi változók együttes eloszlásával, ha $n\ge\dfrac{1}{t_0}$. Ezért az

f_n valószínűségi változók véges dimenziós eloszlásai konvergálnak az f_0 véges dimenziós eloszlásaihoz. Viszont a gyenge konvergencia másik feltétele nem teljesül, mivel $\sup_{0 \le |t-s| \le \delta} |f_n(t) - f_n(s)| = 1$ egy valószínűséggel, ha $n \ge \frac{1}{\delta}$. Alkalmazva a $\mathbf{T}x = \sup_{0 \le t \le 1} x(t)$ folytonos funkcionált a $C([0,1])$ téren kapjuk, hogy $\mathbf{T}f_n = 1$, ha $n \ge 1$ és $\mathbf{T}f_0 = 0$ 1 valószínűséggel. Ezért $\mathbf{T}f_n$ valószínűségi változók nem konvergálnak eloszlásban $\mathbf{T}f_0$ valószínűségi változóhoz.

Kiegészítés

A Lemma bizonyítása: Definiáljuk az

$$\mathbf{A}_p = \left\{ \sum_{j=1}^{p} X_j > x \ , \quad \sum_{j=1}^{l} X_j \leq x \ , \quad l = 1, \dots, p-1 \right\}$$

halmazokat, $p = 1, \dots, n$. Az $\mathbf{A}_1, \ \dots \ , \mathbf{A}_n$ halmazok diszjunktak, és

$$\left\{ \sup_{1 \leq p \leq n} \sum_{j=1}^{p} X_j > x \right\} = \bigcup_{p=1}^{n} \mathbf{A}_p \ .$$

Ezért

$$P\left(\sup_{1 \leq p \leq n} \sum_{j=1}^{p} X_j > x \right) = \sum_{p=1}^{n} P(\mathbf{A}_p) \ .$$

Legyen $\mathbf{B}_p = \left\{ \sum\limits_{j=p+1}^{n} X_j > -2s_n \right\}$, $p = 1, \dots, n-1$, $\mathbf{B}_n = \Omega$. Az $\mathbf{A}_p$ és $\mathbf{B}_p$ események függetlenek, és a Csebisev egyenlőtlenség alapján

$$1 - P(\mathbf{B}_p) = P\left(\sum_{j=p+1}^{n} X_j < -2s_n \right) \leq \frac{\sum\limits_{j=p+1}^{n} \sigma_j^2}{4s_n^2} \leq \frac{1}{4} \ .$$

Innen következik, hogy $P(\mathbf{B}_p) \geq \dfrac{3}{4}$, és ezért $P(\mathbf{B}_p) \geq \dfrac{3}{4}$ minden $p = 1, \dots, n$-re. Továbbá az $\mathbf{A}_p \cap \mathbf{B}_p$, $p = 1, \dots, n$ halmazok diszjunktak, és

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} X_j > x - 2s_n \right\} \supset \bigcup_{p=1}^{n} (\mathbf{A}_p \cap \mathbf{B}_p) \ ,$$

mivel $\omega \in \mathbf{A}_p \cap \mathbf{B}_p$-re $\sum\limits_{j=1}^{n} X_j = \sum\limits_{j=1}^{p} X_j + \sum\limits_{j=p+1}^{n} X_j > x - 2s_n$. Ezért

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{p=1}^{n} X_p > x - 2s_n \right) &\geq \sum_{p=1}^{n} P(\mathbf{A}_p \cap \mathbf{B}_p) = \sum_{p=1}^{n} P(\mathbf{A}_p) P(\mathbf{B}_p) \\ &\geq \frac{3}{4} \sum_{p=1}^{n} P(\mathbf{A}_p) = \frac{3}{4} P\left(\sup_{1 \leq j \leq p} \sum_{j=1}^{p} X_j > x \right) \ , \end{aligned}$$

és ez a bizonyítandó állítás.