Mérhető csoportelmélet

Házi feladatok

Feladat 1. Jelölje F_2 az $\{a, b\}$ elemek által generált szabad csoportot, és legyen $H \leq F_2$ azon (redukált) szavak halmaza, melyek páros sok betűből állnak. Bizonyítsuk be, hogy H egy három elem által generált szabad csoport.

Feladat 2 (Ping-pong lemma)**.** Legyen $G \curvearrowright X$ csoporthatás, $a, b \in G$ csoportelemek, és $A, B \subseteq X$ olyan diszjunkt részhalmazok, melyekre teljesül, hogy

- $a^n(B) \subseteq A, \ \forall n \neq 0$;
- $b^n(A) \subseteq B, \ \forall n \neq 0$.

Bizonyítsuk be, hogy $\langle a, b \rangle \leq G$ szabad részcsoport, $\{a, b\}$ szabad generátorokkal.

Feladat 3. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Mutassuk meg, hogy a mátrixszorzásszorzás műveletére nézve A és B szabad csoportot generálnak.

Feladat 4. Mutassuk meg, hogy

a) a $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ polinom mint növekedési függvény ekvivalens x^n-nel, azaz $p(x) \sim x^n$;

b) ha $\alpha < \beta$ pozitív valós számok, akkor $x^\alpha \preccurlyeq x^\beta$, de $x^\beta \not\preccurlyeq x^\alpha$.

Feladat 5. Bizonyítsuk be, hogy egy csoport végeinek a száma nem függ a generátorrendszer választásától.

Feladat 6. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}$ rekurrens a következő ötlet alapján. Jelölje p_i annak a valószínűségét, hogy az i pontból indulva valamikor eljutunk a 0 pontba. Hogyan fejezhető ki p_i a p_{i-1} és p_{i+1} segítségével?

Feladat 7. Jelölje T_d a (végtelen) d-reguláris fát. Mutassuk meg, hogy T_d tranziens, ha $d \geq 3$. (Azaz a véletlen séta pozitív valószínűséggel soha sem tér vissza a kiindulási pontba.)

Feladat 8. Legyen G egy összefüggő végtelen gráf, és jelölje $p_{x,y,k}$ annak a valószínűségét, hogy az x csúcsból indított véletlen séta k lépésben y-ba ér. Bizonyítsuk be, hogy

a) a $\rho_o = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{p_{o,o,2n}}$ limesz létezik minden $o \in V(G)$ csúcsra, és

b) független az o választásától, azaz $\rho_o = \rho_{o'}$ minden $o, o' \in V(G)$ esetén.

(Hint: az a) részhez használjuk a Fekete lemmát!)