Amenábilis csoportok

Lippner Gábor

December 11, 2009

Abstract

Jegyzet az amenábilis csoportok specihez. Források:

- Stan Wagon: The Banach-Tarski paradox (1985)
- Lyons, Peres: Probability on trees and networks
- Kechris, Miller: Topics in orbit equivalence theory

1 Paradox felbontások

1.1 Definíció (Külső mérték)**.** $\bar{\lambda} : P(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$, melyet egy H halmazra a

$$\bar{\lambda} = \inf\{\sum_j |I_j| : H \cup_j I_j \text{ ahol } I_j \text{ intervallumok}\}$$

formula definiál.

1.2 Definíció (Lebesgue mérték)**.** Ha a külső mértéket csak a Borel-halmazok $\mathcal{B}$ rendszerén tekintjük, akkor a $\lambda : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ eltolás-invariáns, megszámlálhatóan additív halmaz-függvényt kapjuk, amire $\lambda([0, 1]) = 1$.

1.3 Megjegyzés. A Borel-halmazok helyett vehettük volna az összes olyan halmazt, ami egy Borel-halmaztól csak nulla külső mértékűben tér el.

1.4 Tétel. *Nem létezik $P(\mathbb{R})$-en eltolás-invariáns és megszámlálhatóan additív nem-negatív halmaz-függvény, amire az egység intervallum mértéke 1.*

Bizonyítás. Legyen S^1 az egységkör, és vezzesük be rajta az alábbi ekvivalencia relációt: $x \sim y \in S^1$ ha racionális szögű forgatással egymásba vihetők. Jelöljön $M \subset S^1$ egy olyan halmazt, ami minden ekvivalencia osztályból pontosan egy elemet tartalmaz. Soroljuk fel a racionális szögeket: $r_1, r_2, \ldots$... és jelölje T_i az r_i szögű forgatást. M definíciója miatt az $M_i = T_i(M)$ halmazok páronként diszjunktak. De csak az M_{2i}-kkel és csak az M_{2i+1}-ekkel is kiparkettázható az S^1.

Tegyük most fel, hogy létezik a tételnek megfelelő μ mérték. Ekkor könnyen kapunk egy μ' mértéket a $P(S^1)$-en, ami forgatás invariáns és továbbra is megszámlálhatóan additiív, és $\mu'(S^1) = 1$. De ekkor

$$1 = \mu'(S^1) = \sum \mu'(M_i) = \sum \mu'(M_{2i}) + \sum \mu'(M_{2i+1}) = \mu'(S^1) + \mu'(S^1) = 2.$$

$\square$

Természetesen merül fel a kérdés, hogy mit mondhatunk akkor, ha lemondunk a megszámlálható additivitásról, és csak véges additivitást követelünk meg. Ez a kérdés lesz az egész téma fő mozgató rugója. A másik feltétel, nevezetesen hogy a mérték legyen eltolás invariáns, nagyon lényeges, enélkül szinte bármit meg lehet csinálni. Viszont ahhoz, hogy más alaphalmazokon is meg tudjuk vizsgálni a kérdést, az eltolás-invarianciát általánosabban kell értelmeznünk.

1.5 Definíció (Csoport hatás)**.** A G csoport (balról) hat az X téren, ha minden $g \in G$ elemhez tartozik egy $\varphi_g : X \to X$ bijekció, amire $\varphi_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}_X, \varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h$ és $\varphi_{g^{-1}} = {\varphi_g}^{-1}$.

1.6 Definíció (Invariáns mérték)**.** Hasson a G csoport az X téren. Egy μ halmaz-függvényt, mely X bizonyos részhalmazain van értelmezve G-invariánsnak (ha a csoporthatás egyértelmű, akkor röviden csak invariánsnak) nevezünk, ha bármely $H \subset X$-re, amin μ értelmezve van, és bármely $g \in G$ elemre μ értelmezve van $g \cdot H$-n, és $\mu(H) = \mu(g \cdot H)$.

Hogy tisztábban megértsük, min múlott a tétel bizonyítása, bevezetünk még két fogalmat.

1.7 Definíció (G-paradox halmaz)**.** Az X téren hasson a G csoport. Az $E \subset X$ halmazt G-paradoxnak nevezzük, ha valamely m, n egészekre vannak páronként diszjunkt $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n \subset E$ halmazok és $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_m \in G$ elemek, hogy $E = \cup g_i(A_i) = \cup h_i(B_i)$.

Az E halmaz megszámlálhatóan paradox, ha m, n lehetnek esetleg megszámlálhatóan végtelenek is.

1.8 Definíció (Paradox csoport)**.** A G csoport (megszámlálhatóan) paradox, ha az egész G (megszámlálhatóan) paradox a saját magán balról szorzással való hatásra.

Ebben a megfogalmazásban igazából azt láttuk be az előbb, hogy S^1 megszámlálhatóan paradox a forgatások csoportjára nézve. A háttérben az húzódik meg, hogy maga a forgatások csoportja paradox, és ez tükröződik az S^1-en való hatáson is. Ez a megfigyelés igaz általában is:

1.9 Tétel. *Ha a G (megszámlálhatóan) paradox csoport az X téren fixpontmentesen hat, akkor maga az X egy (megszámlálhatóan) G-paradox halmaz.*

Bizonyítás. Megint jelöljön $M \subset X$ egy olyan halmazt, ami minden G-orbitból pontosan egy elemet tartalmaz. Ekkor $\{gM : g \in G\}$ egy partíciója X-nek. Másrészt ha $A_i, B_j \subset G, g_i, h_j \in G$ bizonyítják G paradoxságát, akkor az $A_i^* = \{gM : g \in A_i\}$ valamint a $B_j^* = \{gM : g \in B_j\}$ páronként diszjunktak, viszont $X = \cup g_i A_i^* = \cup h_j B_j^*$ nyilvánvaló. $\square$

1.10 Állítás. F_2, a 2 rangú szabadcsoport paradox.

Bizonyítás. Legyen a, b a két generátor. Ha $x \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}$ akkor jelölje $W(x)$ az x-el kezdődő szavakat F_2-ben. Ekkor $F_2 = \{1\} \cup W(a) \cup W(b) \cup W(a^{-1}) \cup W(b^{-1})$. Másrészt $F_2 = W(a) \cup a \cdot W(a^{-1}) = W(b) \cup b \cdot W(b^{-1}$, ami bizonyítja a paradoxságot. □

1.11 Következmény. *Ha egy G csoportnak van paradox részcsoportja, akkor G paradox, hiszen a részcsoport a balról szorzással fixpontmentesen hat az egész csoporton, és így a 1.9 tétel alkalmazható. Speciálisan ha G-ben van 2 rangú szabad részcsoport, akkor G paradox.*

Meglepő, de még véges sok darabbal is lehet egybevágóságokkal paradox halmazokat kapni.

1.12 Tétel (Sierpiński - Mazurkiewicz)**.** *Létezik $E \subset \mathbb{R}^2$ nem-üres paradox halmaz a sík egybevágóságaira nézve.*

Bizonyítás. Jelölje G_2 a sík egybevágóság-csoportját. Először is mutatunk két konkrét elemet G_2-ben: legyen $t \in \mathbb{R}$ olyan szám, hogy $u = e^{it}$ transzcendens. (Ilyen van, hiszen csak megszámlálhatóan sok algebrai szám van, az egységkörnek meg kontinuum sok pontja.) A két G_2-beli elem legyen $\tau(z) = z+1$ és $\rho(z) = uz$. Legyen $w_1 = \tau^{j_1}\rho^{j_2}\dots\tau^{j_m}$ és $w_2 = \rho^{k_1}\tau^{k_2}\dots\tau^{k_l}$ ahol $m, l \geq 0$ és minden kitevő pozitív egész. Azt állítjuk, hogy ekkor $w_1(0) \neq w_2(0)$. Ugyanis

$$w_1(0) = j_1 + j_3u^{j_2} + j_5u^{j_2+j_4} + \dots + j_m u^{j_2+j_4+\dots+j_{m-1}},$$

és

$$w_2(0) = k_2u^{k_1} + k_4u^{k_1+k_3} + \dots + k_l u^{k_1+k_3+\dots k_{l-1}}.$$

Ha $w_1(0) = w_2(0)$ akkor a két kifejezést egymásból kivonva egy egész együtthatós nem-konstans polinomot kapunk, ami az u helyen eltűnik, ellentmondva u transzcendenciájának.

Legyen végül $S \subset G$ a τ és ρ által generált félcsoport, és legyen $E = \{g(0) : g \in S\}$. Ekkor $E \subset \tau(E), \rho(E)$, és az imént látottak miatt $\tau(E) \cap \rho(E) = \emptyset$. Viszont $\tau^{-1}(\tau(E)) = E = \rho^{-1}(\rho(E))$, tehát E paradox.

□

Egy ilyen halmaz létezését nem érezzük feltétlenül ellentmondásosnak, hiszen a konstruált E maga null-mértékű, így létezéséből "csak" a $2 \cdot 0 = 0$ állítás következik. Ahhoz, hogy "nagy" paradox halmazokat találjunk, ki kell lépni a síkból. Az $SO(3)$ csoport természetes módon hat a 3-dimenziós tér egységgömbjén, S^2-n.

1.13 Tétel (Hausdorff paradoxon)**.** *Létezik egy megszámlálható $D \subset S^2$ halmaz, hogy $S^2 \setminus D$ paradox a természetes $SO(3)$ hatásra nézve.*

Bizonyítás. A tétel (nem meglepő módon) azon múlik, hogy $SO(3)$ paradox. Ennek belátásához a 1.11 következmény szerint elég, ha mutatunk két elemet $SO(3)$-ban, melyek szabadcsoportot generálnak.

Ezek az elemek legyenek az x illetve z-tengely körüli $\arccos 1/3$-szögű forgatások. Azaz mátrix alakban írva legyen

$$A^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Meg akarjuk mutatni, hogy az $A^{\pm 1}, B^{\pm 1}$ betűkből képzett redukált szavak sosem egyenlőek az identitással. Feltehetjük (esetleg A-val konjugálva), hogy a vizsgált w szó $A^{\pm 1}$-el végződik. Azt fogjuk megmutatni, hogy $w(1,0,0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k$, ahol a, b, c egészek és b nem osztható 3-mal. Ekkor persze $w(1,0,0) \neq (1,0,0)$ és így w nem az identitás. A w hosszára vonatkozó indukciót alkalmazunk. Ha $w = A^{\pm 1}$, akkor $w(1,0,0) = (1, \pm 2\sqrt{2}, 0)/3$. Tegyük fel, hogy $w = A^{\pm 1}w'$ vagy $w = B^{\pm 1}w'$, ahol $w'(1,0,0) = (a', b'\sqrt{2}, c')/3^{k-1}$. Ekkor a fenti mátrixokkal szorozva látható, hogy $w(1,0,0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k$, ahol $a = a' \mp 4b', b = b' \pm 2a', c = 3c'$ vagy $a = 3a', b = b' \mp 2c', c = c' \pm 4b'$, attól függően, hogy a w szó $A^{\pm 1}$-el vagy $B^{\pm 1}$-el kezdődik. Így indukcióval kapjuk, hogy a, b, c mindig egészek.

Már csak azt kell belátni, hogy b nem osztható 3-mal. Indukció miatt tudjuk, hogy b' nem osztható 3-mal. Ha $w = A^{\pm 1}w' = A^{\pm 1}B^{\pm 1}w''$, akkor $b = b' \pm 2a' = b' \pm 6a''$ tehát b sem osztható 3-mal. Ha $w = B^{\pm 1}w' = B^{\pm 1}A^{\pm 1}w''$ akkor $b = b' \pm 2c' = b' \pm 6c''$ tehát ismét b sem osztható 3-mal. Ha pedig $w = A^{\pm 2}w''$ vagy $w = B^{\pm 2}w''$ akkor számolás mutatja, hogy $b = 2b' - 9b''$, tehát akkor sem lesz b osztható 3-mal. Tehát A, B szabad részcsoportot generálnak $SO(3)$-ban.

Sajnos $SO(3)$ nem hat fixpontmentesen S^2-n, sőt még az imént definiált A és B elemek által generált szabad részcsoport sem, hiszen minden transzformáció tengely körüli forgatás, és így a tengely két végpontja fix. Ezt a problémát úgy kerüljük meg, hogy kidobjuk S^2-ből a fixpontok halmazát. Legyen $G = \langle A, B \rangle \subset SO(3)$. Ez a részcsoport megszámlálható (hiszen F_2-vel izomorf), ezért ha $D \subset S^2$ a G elemeinek összes fixpontjából álló halmaz, akkor D is megszámlálható.

Vegyük észre, hogy G hat $S^2 \setminus D$-n. Ugyanis ha $x \in S^2 \setminus D$, de $g \cdot x \in D$ valamely g elemre, akkor vegyük azt a $h \in G$ elemet, aminek $g \cdot x$ fixpontja, és tekintsük $s = g^{-1}hg \in G$-t. Világos, hogy $s \cdot x = x$, azaz $x \in D$, ami ellentmondás. Tehát G tényleg hat $S^2 \setminus D$-n, rádásul nyilván fixpontmenetesen, hiszen minden potenciális fixpontot kidobtunk. Másrészt G paradox, tehát $S^2 \setminus D$ is az (persze nem csak G-re, hanem a bővebb $SO(3)$-ra nézve is). $\square$

S^2-nek egy megszámlálható része nyugodtan lehet sűrű, és így az iménti tétel paradox jellege nem látszik azonnal. Később meg fogjuk mutatni, hogy a D halmaz elhagyása nélkül is paradox az S^2, előbb azonban megmutatjuk, hogy már a Hausdorff paradoxonnak is komoly mértékelméleti következményei vannak.

1.14 Definíció (G-elhanyagolható halmaz)**.** Ha G hat X-en, akkor egy $E \subset X$ halmazt G-elhanyagolhatónak nevezünk, ha bármely $\mu : P(X) \to [0, \infty]$ végesen additív, G-invariáns mérték esetén $\mu(E) = 0$ vagy $\mu(E) = \infty$.

1.15 Állítás. Minden G-paradox halmaz G-elhanyagolható.

Bizonyítás. Legyen E egy G-paradox halmaz, és szokás szerint az A_i, B_j, g_i, h_j legyenek egy paradox felbontás kellékei. Ekkor $\mu(E) \geq \sum \mu(A_i) + \sum \mu(B_j) = \sum \mu(g_i A_i) + \sum \mu(h_j B_j) = 2\mu(E)$. Ebből az állítás nyilvánvaló. □

1.16 Tétel. *S^2 teljes egészében $SO(3)$-elhanyagolható, tehát nem létezik végesen additív forgatás invariáns mérték S^2 összes részhalmazán, melynél a teljes S^2 mértéke 1.*

Bizonyítás. Legyen $\mu : P(S^2) \to [0, \infty]$ végesen additív forgatás invariáns mérték. A Hausdorff paradoxon szerint $S^2 \setminus D$ paradox, tehát elhanyagolható, azaz $\mu(S^2 \setminus D) = 0$. Így már csak azt kell belátni, hogy $\mu(D) = 0$.

Vegyük észre, hogy bármely $H \subset S^2$ megszámlálható halmazhoz létezik olyan $g \in SO(3)$, hogy $H \cap g \cdot H = \emptyset$. Ugyanis rögzítsünk egy olyan l tengelyt, ami diszjunkt H-tól (ilyen van, mert H megszámlálható), és nézzük azon l-körüli forgatásokat, amik egy H-beli elemet egy másik H-beli elembe visznek. Mivel összesen csak megszámlálható sok elem-párt vehetünk H-ból, ezért csak megszámlálható sok ilyen forgatás lehetséges. Mivel kontinuum sok szög közül választhatunk, így biztos van olyan l-körüli forgatás, ami nem visz H-beli elemet H-beli elembe. Ez viszont pont olyan forgatás, amilyet kerestünk.

Legyen most $D_0 = D$, és vegyünk egy $g_0 \in SO(3)$ elemet, amire $gD_0 \cap D_0 = \emptyset$. Legyen $D_1 = D_0 \cup g_0 \cdot D_0$, ez még mindig megszámlálható. Most vegyünk egy $g_1 \in SO(3)$-at, amire $D_1 \cap g_1 \cdot D_1 = \emptyset$ és legyen $D_2 = D_1 \cup g_1 \cdot D_1$. Hasonlóan kaphatjuk a $D_3, D_4, \ldots$ halmazokat. Nyilvánvalóan $\mu(D_{i+1}) = 2\mu(D_i)$. Ha $\mu(D) > 0$ lenne, akkor elég sokszor duplázva kapnánk egy D_n-et, amire $\mu(D_n) > 1$, ez viszont nem lehet, hiszen $\mu(S^2) = 1$ feltétel volt. Tehát S^2 tényleg elhanyagolható. □

1.17 Következmény. *$n \geq 3$ esetén nincsen $P(\mathbb{R}^n)$-en végesen additív egybevágóság-invariáns mérték, amire az egységkocka mértéke 1.*

Bizonyítás. Ha valamely $n > 3$-ra van ilyen μ mérték, akkor $n = 3$-ra is van, hiszen a $\mu'(H) = \mu(H \times [0,1]^{n-3})$ képlet könnyen láthatóan ilyet definiál. Elég tehát az $n = 3$ esettel foglalkozni.

Legyen indirekten $\mu : P(\mathbb{R}^3) \to [0, \infty]$ egy végesen additív invariáns mérték, mely az egységkockán 1-et vesz fel. Eltolásokkal látható, hogy ekkor bármely kockának véges, pozitív mértéke van, és így a tömör egységgömbnek, B^3-nak is. Továbbá bármely pont (azaz egy pontú halmaz) mértéke 0, hiszen egyrészt bármely két pont mértéke azonos, és egy kockába tetszőlegesen sok diszjunkt pont található.

Legyen $\nu : P(S^2) \to [0, \infty]$ a következő formulával definiálva:

$$\nu(H) = \mu\left(\bigcup_{0<\alpha\leq 1} \alpha \cdot H\right).$$

Világos, hogy ez forgatás-invariáns, végesen additív, és mivel $\nu(\{0\}) = 0$, így $\mu(S^2) = \nu(B^3)$, ami ellentmond az előző tételnek. □

2 Átdarabolások

Már a görögök használtál azt a módszert, hogy egy alakzatot felvágnak szép darabokra, és azokat másképp összeillesztik. Így lehet többek között a parallelogramma területét meghatározni. Ilyen átdarabolásnál az alakzatok határát nem vesszük figyelembe. Érdekes és nehéz kérdés, hogy mikor lehet két alakzatot így egymásba átdarabolni.

2.1 Tétel (Bolyai - Gerwien)**.** *Két sokszög pontosan akkor darabolható egymásba sokszög-részekkel, ha a területük egyenlő.*

Bizonyítás. Első lépés: az átdarabolhatóság tranzitív reláció: vegyük a közös finomítást.

Második lépés: bármely háromszög téglalapba darabolható.

Harmadik lépés: bármely téglalap kövér téglalapba darabolható.

Negyedik lépés: bármely kövér téglalap négyzetbe darabolható.

Ötödik lépés: Pitagorasz tétel: ha $a^2 + b^2 = c^2$, akkor az a és a b oldalú négyzet egy c oldalúba darabolható.

Befejezés: a sokszöget háromszögeljük, a háromszögeket téglalapba majd négyzetbe daraboljuk, végül a négyzeteket egyesével összeöntjük. $\square$

A tétel térbeli analógja nem igaz (ez Dehn eredménye 1900-ból), de nem ismert, hogy két poliéder pontosan mikor darabolható egymásba poliéder-darabokkal.

Egy másik lehetőség az, hogy az átdarabolást halmazelméleti értelemben nézzük. Ilyenkor a darabok lehetnek csúnyák, de minden pont egyenrangú, nincsenek elhanyagolt pontok. Az előző fejezetben már láttunk olyan halmazokat, amik két diszjunkt részhalmazukba is átdarabolhatóak.

2.2 Definíció (G-átdarabolás)**.** Ha G hat X-en és $A, B \subset X$, akkor az A a B-be G-átdarabolható (jelölésben $A \sim_G B$ vagy csak $A \sim B$, ha a csoporthatás egyértelmű), ha van egy véges n szám és páronként diszjunkt $A_1, \dots, A_n$ illetve páronként diszjunkt $B_1, \dots, B_n$ halmazok és $g_1, \dots g_n \in G$ elemek, hogy

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

és $g_i(A_i) = B_i (1 \leq i \leq n)$.

Azt mondjuk, hogy A beledarabolható B-be (jelölésben $A \preceq B$, ha van olyan $C \subset B$, hogy $A \sim B$.

2.3 Megjegyzés. Világos, hogy $\sim_G$ ekvivalencia reláció: a tranzitivitás a közös finomításból látható. Hasonlóan világos, hogy $\preceq$ is tranzitív. Az viszont egy meglepő eredmény, hogy $\preceq$ részbenrendezés a $\sim$-ekvivalencia osztályok halmazán.

2.4 Tétel (Banach-Schröder-Bernstein)**.** *Hasson G az X-en és legyen $A, BsubsetX$. Ha $A \preceq B$ és $B \preceq A$, akkor $A \sim_G B$.*

Bizonyítás. A bizonyítás a $\sim_G$ reláció alábbi két nyilvánvaló tulajdonságán múlik:

1. Ha $A \sim B$, akkor van egy olyan $f : A \to B$ bijekció, melyre bármely $C \subset A$ esetén $C \sim f(C)$.

2. Ha $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$ és $A_i \sim B_i (i = 1, 2)$, akkor $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

Innentől csak azt használjuk $\sim$-ről, hogy ekvivalencia reláció, mely teljesíti (1)-et és (2)-t.

Legyen $f : A \to B_1$ és $g : B \to A_1$ az (1) szerinti bijekciók, ahol $A_1 \subset A$ és $B_1 \subset B$. Legyen $C_0 = A \setminus A_1$, és rekurzívan definiáljuk a $C_{n+1} = g^{-1} f(C_n)$ halmazokat. Legyen $C = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$. Ekkor könnyen látható, hogy $g(A \setminus C) = B \setminus f(C)$, így $A \setminus C \sim B \setminus f(C)$, valamint f mutatja, hogy $C \sim f(C)$. Tehát $A \sim B$. □

Ez a tétel jelentősen megkönnyíti az átdarabolhatóság leellenőrzését. Első alkalmazásként tegyük fel, hogy $E \subset X$ paradox, azaz vannak diszjunkt $A, B \subset E$ halmazok, hogy $A \sim E \sim B$. De ekkor $E \sim B \subset E \setminus A \subset E$, azaz $E \preceq E \setminus A \preceq E$, tehát $E \sim E \setminus A$.

2.5 Következmény. *$E \subset X$ pontosan akkor G-paradox, ha vannak diszjunkt $A, B \subset E$ halmazok, melyekre $A \cup B = E$ és $A \sim E \sim B$. Azaz a paradoxságot bizonyító A_i, B_j halmazokról feltehető, hogy kitöltik a teljes E halmazt.*

Egy másik egyszerű, de annál meglepőbb következménye a fenti tételnek (pontosabban a tétel bizonyításának) kilép az egybevágóságok köréből.

2.6 Következmény. *Ha $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ korlátosak és a belsejük nem üres, akkor felbonthatók $X = X_1 \cup X_2, Y = Y_1 \cup Y_2$ diszjunkt részekre úgy, hogy X_i hasonló Y_i-hez ($i = 1, 2$). Itt a hasonlót a valódi geometriai értelmében használjuk. Ráadásul ha X és Y Borelek, akkor X_1, X_2, Y_1, Y_2 is választható annak.*

Bizonyítás. Az egybevágóságok csoportja helyett a hasonlósági transzformációk G csoportját kell tekinteni. Ez a csoport hat $\mathbb{R}^n$-en, így értelmes a $\sim_G$ reláció is, ami nyilván teljesíti a Banach-Schröder-Bernstein tétel bizonyításában használt két egyszerű tulajdonságot. A feltételek pedig biztosítják, hogy $X \preceq Y$ és $Y \preceq X$, hiszen ha X korlátos és Y tartalmaz egy kis körlapot, akkor X nyilván belekicsinyíthető Y-ba. □

A geometriai és a halmazelméleti átdarabolás két teljesen különböző jellegű fogalom. Elsőre nem világos, hogy bármi közük lenne egymáshoz, hiszen ha geometrialiag át tudunk darabolni, a határpontok eltüntetése nem látszik megoldhatónak. Mégis, a Banach-Schröder-Bernstein tétel alkalmazásaként meg fogjuk mutatni, hogy a határ "elég kicsi" ahhoz, hogy elbánjunk vele.

2.7 Tétel. *Ha a P_1 és a P_2 sokszögek geometrialiag egymásba darabolhatók, akkor G_2-átdarabolhatók is (a halmazelméleti értelemben, ahol G_2 megint a sík egybevágóságainak a csoportja).*

Bizonyítás. Legyenek Q_1, Q_2 azok a nyílt halmazok, amik az átdaraboláshoz használt sokszögek belsejeinek az uniói. Ekkor nyilván $Q_1 \sim Q_2$, tehát elég belátni, hogy $P_i \sim Q_i$. Ehelyett egy kicsit általánosabb állítást igazolunk: ha A belseje nem üres, és T pedig véges sok, A-tól diszjunkt (korlátos) szakszból áll, akkor $A \sim A \cup T$. Ezt is elég egyetlen szakaszra belátni, hiszen ha T több szakaszból áll akkor egyesével beleaprítjuk őket A-ba. Az egyetlen szakaszról is feltehetjük, hogy rövidebb, mint egy A-ban található D körlap sugara (különben kis szakaszokra vágjuk).

Legyen θ a D körlap középpontja körüli irracionális szögű forgatás, és R legyen a D-nek egy konkrét sugara. Legyen $\bar{R} = R \cup \theta(R) \cup \theta^2(R) \cup \dots$. Ekkor $\theta(\bar{R}) = \bar{R} \setminus R$. Így $D \cup T \preceq D \subset D \cup T$, hiszen az $\bar{R}$ darabot θ-val mozgatva helyet csinálunk T-nek. Ekkor persze $D \sim D \cup T$, amiből mindkét oldalhoz $A \setminus D$-t adva kapjuk, hogy $A \sim A \cup T$, és ezt akartuk belátni. $\square$

Ez a bizonyítás tipikus esete az ún beolvasztós bizonyításoknak. A problémás halmaz elég kicsi volt ahhoz, hogy beolvaszthassuk a nagy halmazba. Hasonló módon lehet elbánni a Hausdorff paradoxonban szereplő megszámlálható D halmazzal.

2.8 Állítás. Ha $D \subset S^2$ megszámlálható, akkor S^2 és $S^2 \setminus D$ átdarabolhatóak $SO(3)$ segítségével.

Bizonyítás. Olyan ρ forgatást kell keresni, amelyre $D, \rho(D), \rho^2(D), \dots$ páronként diszjunktak. Hiszen ekkor $\bar{D} = D \cup \rho(D) \cup \rho^2(D) \cup \dots$ jelöléssel $S^2 = \bar{D} \cup (S^2 \setminus \bar{D}) \sim \rho(\bar{D}) \cup (S^2 \setminus \bar{D}) = S^2 \setminus D$.

A ρ-t a 1.16 tételhez hasonlóan találhatjuk: veszünk egy l tengelyt, ami diszjunkt D-től. Az l-körüli forgatások kontinuum sokan vannak, de csak megszámlálható sok van közülük, amire $\rho^m(D) \cap \rho^n(D)$ nem üres valamely m, n-re. Ha viszont ezen metszetek mindegyike üres, az pont azt jelenti, hogy a $\rho^n(D)$ halmazok páronként diszjunktak. $\square$

Innen már csak egy apró lépés, hogy megkapjuk a nevezetes Banach-Tarski paradoxont.

2.9 Tétel (Banach-Tarski paradoxon)**.** *A térben bármely origó középpontú gömbfelszín $SO(3)$-paradox. Továbbá $\mathbb{R}^3$-ban bármely tömör gömb paradox, sőt maga R^3 is paradox.*

Bizonyítás. A Hausdorff paradoxon szerint $S^2 \setminus D$ paradox. Viszont az előző állítás szerint $S^2 \sim S^2 \setminus D$, tehát maga S^2 is paradox. A gömb sugarát soha nem használtuk ki, ezért bármilyen sugarú gömb szintén paradox.

S^2 paradoxságából megvastagítással könnyen látszik, hogy $B^3 \setminus \{0\}$ illetve $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ paradoxak. Így már csak azt kell belátni, hogy $B^3 \sim B^3 \setminus \{0\}$. Ez pedig a már ismert beolvasztással történik: keresünk egy az origón át nem menő, de hozzá közeli tengelyt, és e tengely körül egy irracionális szögű forgatást, legyen ez ρ. Ekkor a $D = \{0\} \cup \rho(\{0\}) \cup \rho^2(\{0\}) \cup \dots$ jelöléssel $\rho(D) = D \setminus \{0\}$, így $B^3 \sim B^3 \setminus \{0\}$. $\square$

2.10 Következmény (Banach-Tarski paradoxon erős változata)**.** *Ha $A, B \subset \mathbb{R}^3$ korlátos, nem üres belsejű halmazok, akkor $A \sim B$.*

Bizonyítás. A Banach-Schröder-Bernstein tétel miatt elég $A \preceq B$-t igazolni. Legyen $A \subset K$ és $L \subset B$ tömör gömbök. Fedjük le K-t az L néhány (n) példányával (átfedések lehetnek), ez a fedő halmaz legyen S. Ekkor $A \subset S$. Másrészt az előző tétel többszöri alkalmazásával kapjuk, hogy $L \sim L$-nek n diszjunkt példánya. Viszont nyilván $S \preceq L$-nek n diszjunkt példánya. Teh
'at $A \preceq L \subset B$, és készen is vagyunk. □

3 Az átdarabolhatósági típusok félcsoportja

Mint láttuk, az hogy $E \subset X$ paradox, intuitíven azt jeletni, hogy meg lehet duplázni. Amikor X egy Euklideszi tér, ennek van is értelme, de az általános esetben nem feltétlenül tudunk E-ből két diszjunkt (és "egybevágó) példányt elhelyezni X-ben. Ezért most mesterségesen csinálunk neki helyet.

3.1 Definíció. Hasson a G csoport az X téren. Legyen $X^* = X \times \mathbb{N}$ és $G^* = G \times S_\mathbb{N}$, ahol $S_\mathbb{N}$ az $\mathbb{N}$ halmaz permutációit jelöli. A G^* csoport természetes módon hat X^*-on: ha $g \in G$ és $\pi \in S_\mathbb{N}$ akkor $(g, \pi)(x, n) = (g(x), \pi(n))$.

Ha $A \subset X^*$, akkor A szintjeinek nevezzük azon $n \in \mathbb{N}$ számokat, amikre $A \cap X \times \{n\}$ nem üres. A-t korlátosnak mondjuk, ha csak véges sok szintje van.

A $\sim_G$ és a $\sim_{G^*}$ relációk között szoros a kapcsolat: $E_1, E_2 \subset X$ esetén $E_1 \sim_G E_2$ ekvivalens azzal, hogy $E_1 \times \{m\} \sim_{G^*} E_2 \times \{n\}$ valamely (sőt bármely) m, n párra. Másrészt ez a kiterjesztett hatás megoldja azt a problémát, hogy esetleg nem fér el E két példánya X-ben. Nevezetesen $E \times \{0, 1\}$ pontosan megfelel a $2E$-ről alkotott intuitív képünknek. Ezt precízzé lehet tenni úgy, hogy bevezetünk X^* korlátos részhalmazain egy összeadás műveletet.

3.2 Definíció (Típus-félcsoport)**.** Legyen X, X^*, G, G^* mint eddig.

1. A korlátos $A \subset X^*$ halmaz $\sim_{G^*}$-ekvivalencia osztályát A típusának nevezzük, és $[A]$-val jelöljük. A korlátos részhalmazok típusainak a halmazát jelöljük $\mathcal{S}$-el.

2. Ha $[A], [B] \in \mathcal{S}$, akkor legyen $B' \subset X^*$ a B-nek olyan feltoltja, amelynek szintjei diszjunktak A szintjeitől, azaz $B' = \{(b, m+k) : (b, m) \in B\}$ egy kellően nagy k-ra. Legyen végül $[A] + [B] = [A \cup B']$.

Könnyen meggondolható, hogy ez az összeadás művelet jóldefiniált, és $(\mathcal{S}, +)$ egy kommutatív, asszociatív félcsoport. Továbbá $[\emptyset] = \mathbf{0}$ egységelem. Ha $E \subset X$, akkor vezessük be az $[E] = [E \times \{0\}]$ jelölést.

Bármely egységelemes kommutatív félcsoport esetén van értelme természetes számokkal szorozni csoportelemeket: $n\alpha = \alpha + \dots + \alpha$ (n tagú összeg), és van egy természetesen adódó reláció: $\alpha \leq \beta$ pontosan akkor, ha van egy γ, amire $\alpha + \gamma = \beta$. Nem nehéz meggondolni, hogy jelen esetben a $\leq$ és a $\preceq_{G^*}$ relációk megegyeznek, azaz $A, B \subset X^*$ korlátos halmazok esetén $[A] \leq [B]$ akkor és csak akkor, ha $A \preceq B$. Teljesülnek az alábbi természetesen elvárható tulajdonságok is: $n(m(\alpha)) = (nm)\alpha, (n+m)\alpha = n\alpha + m\alpha, n(\alpha+\beta) = n\alpha + n\beta, n\alpha \leq n\beta$ ha $al \leq \beta$, és $\alpha \leq \beta$-ból következik, hogy $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

3.3 Állítás. $[A] + [B] \geq [A \cup B]$, és ha $A \cap B = \emptyset$ akkor egyenlőség van.

Bizonyítás. Ha A és B diszjunktak, akkor B-nek bármely B' feltoltjára $B \sim B'$, és így $[A \cup B] = [A \cup B'] = [A] + [B]$. Hasonló érvelésből következik, hogy általában $[A] + [B] = [A \cup B] + [A \cap B]$, tehát $[A \cup B] \leq [A] + [B]$. □

Az $\mathcal{S}$ félcsoport tulajdonképpen csak egy nyelv, de ez a nyelv több állítás kimondását illetve bizonyítás megfogalmazását jelentősen leegyszerűsíti. Például a Banach-Schröder-Bernstein tétel ezen a nyelven annyit tesz, hogy ha $\alpha \leq \beta$ és $\beta \leq \alpha$, akkor $\alpha = \beta$. Az pedig, hogy egy halmaz paradox, úgy fogalmazható meg, hogy $[E] = 2[E]$. Első valódi alkalmazásként általánosítjuk a 1.9 tételt.

3.4 Definíció. Ha a $H_1, \ldots, H_n$ csoportok mind hatnak az X téren, és ráadásul bármely $x \in X$-hez van olyan i, hogy x a H_i egyetlen elemének sem fixpontja (persze az egységelem nem számít), akkor azt mondjuk, hogy a H_i csoportok hatása együttesen szabad.

3.5 Állítás. Legyenek a $H_1, \ldots, H_n$ csoportok a G csoport 2-rangú szabad részcsoportjai. Tegyük fel, hogy G úgy hat az X-en, hogy a H_i csoportok hatása együttesen szabad. Ekkor X paradox.

Bizonyítás. Legyen $D_i = \{x \in X : h(x) = x$ valamely $h \in H_i \setminus \{1\}\}$, és legyen $\delta_i = [X \setminus D_i]$. Ekkor a 1.9 tétel miatt δ_i H_i-paradox, így $\delta_i = 2\delta_i$. Mivel a H_i-k hatása együttesen szabad, ezért $X = \cup(X \setminus D_i)$, amiből az előző állítás szerint $[X] \leq \sum \delta_i$. Másrészt bármely i-re

$$[X] = [(X \setminus D_i) \cup D_i] = \delta_i + [D_i] = 2\delta_i + [D_i] = [X] + \delta_i.$$

Ezért

$$[X] = [X] + \delta_1 = [X] + \delta_2 + \delta_1 = \cdots = [X] + \sum \delta_i \geq 2[X] \geq [X].$$

Tehát $[X] = 2[X]$, azaz X paradox. □

3.6 Definíció (Lokálisan kommutatív hatás)**.** A G csoport hatása az X téren lokálisan kommutatív, ha bármely $x \in X$-re az x-et helybenhagyó csoportelemek egymással felcserélhetők.

Például $SO(3)$ hatása S^2-n lokálisan kommutatív, hiszen egy forgatás csak a tengely két végpontját hagyja fixen. Így ha két forgatásnak van közös fixpontja, akkor a tengelyük is közös, ekkor viszont kommutálnak. Ezért mivel $SO(3)$-ban van 2-rangú szabad részcsoport, a Banach-Tarski paradoxon az alábbi következmény speciális esete.

3.7 Következmény. *Ha a G 2-rangú szabadcsoport lokálisan kommutatívan hat X-en, akkor X G-paradox.*

Bizonyítás. Legyenek G szabad generátorai a, b. Legyen $g_i = a^i b a^{-i} (i = 0, 1, 2, 3)$. Végiggondolható, hogy az $F = \langle g_0, g_1, g_2, g_3 \rangle \subset G$ egy 4-rangú szabad részcsoport. Legyen $H_1 = \langle g_0, g_1 \rangle, H_2 = \langle g_2, g_3 \rangle$. Azt állítjuk, hogy H_1 és H_2 hatása X-en együttesen szabad. Ebből az előző állítás szerint már készen leszünk. Tegyük fel, hogy van olyan $x \in X$, amit egy $w_1 \in H_1$ és egy $w_2 \in H_2$ is fixál. Ekkor viszont a lokális kommutativitás miatt $w_1 w_2 w_1^{-1} w_2^{-1} = 1$, ami ellentmond az F csoport szabad mivoltának. □

Arra is fel fogjuk használni az $\mathcal{S}$ félcsoportot, hogy belássuk, bármely $A \subset S^2$ halmaz aminek a belseje nem üres $SO(3)$-paradox. Ez nem következik a Banach-Tarski paradoxonból, hiszen egy ilyen A halmaz nem tartalmaz gömböt. Némi előkészítésre van szükségünk.

3.8 Tétel (Egyszerűsítési szabály). *Ha $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ és valamely n pozitív egészre $n\alpha = n\beta$, akkor $\alpha = \beta$.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha = [A], \beta = [B]$. Mivel $n\alpha = n\beta$, ezért van két diszjunkt G^*-átdarabolható halmaz $E, E' \subset X^*$, amik felbomlanak $E = A_1 \cup \cdots \cup A_n, E' = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ alakban, ahol minden i-re $[A_i] = [A], [B_i] = [B]$. Legyen $\chi : E \to E'$ a G^*-átdarabolást mutató bijekció, valamint minden i-re legyen $f_i : A \to A_i, g_i : B \to B_i$ a megfelelő átdarabolásokat mutató bijekciók.

Csinálunk egy páros gráfot A és B pontjai között. Az $a \in A$ és $b \in B$ pontok között vezzesen él, ha valamely i, j-re $b = g_j^{-1} \chi f_i(a)$. Erre az élre írjuk is rá az (i, j) számpárt. Többszörös éleket is megengedünk, ha esetleg több ilyen (i, j) pár van. Könnyen látható, hogy minden $a \in A, 1 \leq i \leq n$-hez pontosan egy j és $b \in B$ van, hogy az ab él be van húzva az (i, j) számpár miatt, és ugyanez a B oldalán is elmondható. Tehát ebben a gráfban minden csúcs foka n. Tehát van benne teljes párosítás, jelöljük a benne szereplő élek halmazát M. Legyen $C_{ij} = \{a \in A :$ az a-ból induló M-beli élre (i, j) van írva$\}$. Hasonlóan legyen $D_{ij} = \{b \in B :$ az b-ből induló M-beli élre (i, j) van írva$\}$.

Világos, hogy a C_{ij} rendszer egy partíciója az A-nak, a D_{ij} rendszer pedig a B-nek. Másrészt a $g_j^{-1} \chi f_i$ leképezés bijekció C_{ij} és D_{ij} között. Mivel f_i, χ és g_j is átdarabolásból származott, ezért a kompozíciójuk is, tehát $[C_{ij}] = [D_{ij}]$, és így $[A] = [B]$. □

3.9 Következmény. *Ha G hat X-en és $E \subset X$ paradox, továbbá $A \subset E$ olyan halmaz, melyre $E \subset g_1 A \cup \cdots \cup g_n A$ valamely $g_1, \ldots, g_n \in G$ elemekre, akkor $A \sim_G E$. Tehát ekkor A is paradox, és bármely két ilyen halmaz egymásba darabolható.*

Bizonyítás. Az $\mathcal{S}$ félcsoportban fogunk számolni. Az A-ra tett feltétel miatt $n[A] \geq [E]$. Másrészt E paradoxsága miatt $[E] = 2[E] = \cdots = n[E]$. Tehát $n[A] \geq [E] = n[E] \geq n[A] (A \subset E)$, így $n[A] = n[E]$. De ekkor az egyszerűs*ési szabály szerint* $[A] = [E]$. □

3.10 Következmény. *Mivel egy nem üres belsejű halmaz véges sok példányával le lehet fedni S^2-t ezért S^2 bármely két nem üres belsejű halmaza $SO(3)$-átdarabolható, és bármely ilyen halmaz $SO(3)$-paradox.*

4 Tarski tétele

Azt fogjuk most megvizsgálni, hogy mely csoportok paradoxak. A 1.15 állításban láttuk, hogy bármely paradox halmaz elhanyagolható, így ha G paradox csoport, akkor ő maga elhanyagolható, így nem létezhet olyan $\mu : P(G) \to [0,1]$ végesen additív G-invariáns mérték, amire $\mu(G) = 1$. Tarski tétele azt mondja ki, hogy ez a feltétel nem csak szükséges, hanem elégséges is: ha G maga elhanyagolható, akkor G paradox, avagy ha G nem paradox, akkor van rajta végesen additív G-invariáns mérték.

Mielőtt bebizonyítanánk a tételt, átfogalmazzuk az $\mathcal{S}$ félcsoport nyelvére. Ha μ a $P(X)$-en értelmezett G-invariáns mérték, akkor μ automatikusan invariáns a $\sim_G$ relációra, és így indukál egy $\nu : \mathcal{S} \to [0,\infty]$ függvényt, amit a $\nu([A]) = \sum \mu(A_n)$ képlet ad meg, ahol $A = \cup A_n \times \{n\}$. Az így kapott ν függvényre $\nu(\alpha + \beta) = \nu(\alpha) + \nu(\beta)$ triviálisan teljesül, tehát ν félcsoport-homomorfizmus. Megfordítva, ha $\nu : \mathcal{S} \to [0,\infty]$ félcsoport-homomorfizmus, akkor a $\mu(A) = \nu([A])$ képlet végesen additív G-invariáns mértéket definiál $P(X)$-en.

Tarski észrevette, hogyan lehet nagy általánosságban kommutatív félcsoportokból $[0,\infty]$-be homomorfizmusokat konstruálni. Emlékeztetünk, hogy ha $(\mathcal{T}, +, 0)$ kommutatív, egységelemes félcsoport, akkor az $(\alpha \le \beta) \iff (\exists \gamma : \alpha + \gamma = \beta)$ egy tranzitív relációt definiál (ami nem feltétlenül antiszimmetrikus, azaz lehet, hogy $\alpha \le \beta \le \alpha \ne \beta$). Legyen $\varepsilon \in \mathcal{T}$ egy rögzített elem. "Korlátosnak" fogjuk nevezni azon $\alpha \in \mathcal{T}$ elemeket, amikre $\alpha \le n\varepsilon$ valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

4.1 Tétel. *Legyen $(\mathcal{T}, +, 0)$ kommutatív, egységelemes félcsoport, 0 az egységelem, és legyen $\varepsilon \in \mathcal{T}$ rögzített. A következő két állítás ekvivalens:*

(1) $(n+1)\varepsilon \not\le n\varepsilon$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

(2) Létezik egy $\nu : \mathcal{T} \to [0,\infty]$ homomorfizmus, amire $\nu(\varepsilon) = 1$.

Bizonyítás. Az világos, hogy (2)-ből következik (1), hiszen ha μ teljesíti (2)-t, akkor $\alpha \le \beta$ esetén $\mu(\alpha) \le \mu(\beta)$, másrészt $\mu(n\varepsilon) = n\mu(\varepsilon)$. Így ha $(n+1)\varepsilon \le n\varepsilon$ akkor $n + 1 \le n$.

A másik irány belátásához az úgynevezett kompaktsági módszert fogjuk használni. Ez ugyan nem a legegyszerűbb módja e tétel belátásának, de mivel a módszer többször is vissza fog köszönni a későbbiekben, ezért itt is ezt az utat választjuk. Először is feltehetjük, hogy $\mathcal{T}$ minden eleme korlátos. Ugyanis a korlátos elemek rész-félcsoportot alkotnak, és ha van egy homomorfizmusunk a korlátos elemeken, akkor azt a nem-korlátos elemekre ∞-ként kiterjesztve egy megfelelő homomorfizmust kapunk az egész $\mathcal{T}$-n.

Jelölje $[0,\infty]^{\mathcal{T}}$ az összes $f : \mathcal{T} \to [0,\infty]$ függvények halmazát. Mivel $[0,\infty]$ kompakt, ezért a Tyihonov tétel szerint $[0,\infty]^{\mathcal{T}}$ is az. Ha $\varepsilon \in \mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ egy véges, ε-t tartalmazó részhalmaz, akkor legyen $\mathcal{M}(\mathcal{T}_0) = \{f \in [0,\infty]^{\mathcal{T}} : f(\varepsilon) = 1, (\forall \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \mathcal{T}_0 : f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta))\}$ azon függvények halmaza, ami legalább a véges $\mathcal{T}_0$ halmazon olyan, mint amit szeretnénk.

Az $\mathcal{M}(\mathcal{T}_0)$ halmazok zártak, hiszen véges sok zárt feltétellel adtuk meg őket. Be fogjuk látni, hogy $\mathcal{M}(\mathcal{T}_0)$ sohasem üres. Ekkor az összes $\mathcal{M}(\mathcal{T}_0)$ alakú halmaz rendszere véges-metszet tulajdonságú (vagy más szóval centrált rendszert alkotnak, azaz bármely véges sok metszete nem üres), hiszen ha $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n \subset \mathcal{T}$ véges részhalmazok, akkor $\mathcal{M}(\mathcal{T}_1) \cap \cdots \cap \mathcal{M}(\mathcal{T}_n) \supset \mathcal{M}(\mathcal{T}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{T}_n)$, és ez utóbbi szintén a rendszer része, tehát nem üres. Mivel kompakt térben egy centrált rendszer halmazainak mindig van közös eleme, létezik egy olyan $\nu : \mathcal{T} \to [0, \infty]$ függvény, ami bármely véges $\mathcal{T}_0$ esetén eleme $\mathcal{M}(\mathcal{T}_0)$-nak. Ez a ν pedig pont olyan homomorfizmus, amilyet kerestük.

Elég tehát megmutatni, hogy $\mathcal{M}(\mathcal{T}_0)$ nem üres. Az utolsó nagy ötlet az, hogy kicsivel szigorúbb feltételeknek eleg tevő függvény létezését látjuk be, ami aztán lehetővé teszi, hogy teljes indukcióval dolgozzunk.

4.2 Állítás. Ha $\varepsilon \in \mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ véges, akkor van olyan $\mu : \mathcal{T}_0 \to [0, \infty]$ függvény, amire $\mu(\varepsilon) = 1$ és ha $\phi_1, \ldots, \phi_n, \theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathcal{T}_0$ melyekre $\phi_1 + \cdots + \phi_m \leq \theta_1 + \cdots + \theta_m$ akkor $\sum \mu(\phi_i) \leq \sum \mu(\theta_i)$.

Az állítás bizonyítása. A $\mathcal{T}_0$ halmaz elemszámára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $|\mathcal{T}_0| = 1$, akkor $\mathcal{T}_0 = \{\varepsilon\}$, és $\mu(\varepsilon) = 1$ a keresett függvény. Ahhoz, hogy ez a μ a második feltételt is teljesítse, azt kell leellenőrizni, hogy ha $m\varepsilon \leq n\varepsilon$, akkor $m \leq n$. Ha ugyanis ekkor $m \geq n+1$ lenne, akkor $(n+1)\varepsilon \leq m\varepsilon \leq n\varepsilon$ teljesülne, ami ellentmond a tétel első feltételének. Igazából ez az egyetlen pont, ahol ezt a feltételt kihasználjuk a bizonyítás során.

Legyen most $|\mathcal{T}_0| > 1$, és legyen $\alpha \in \mathcal{T}_0 \setminus \{\varepsilon\}$. Az indukciós feltevés szerint létezik egy $\nu : \mathcal{T}_0 \setminus \{\alpha\} \to [0, \infty]$ függvény, ami kielégíti az állítás feltételeit. Ezt ki fogjuk terjeszteni α-ra úgy, hogy a feltételek még mindig teljesüljenek. Vizsgáljuk meg, hogy a feltétel milyen korlátot szab $\nu(\alpha)$ választásának. Tegyük fel, hogy $\beta_1, \ldots, \beta_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_q \in \mathcal{T}_0 \setminus \{\alpha\}$ és $r \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $\sum \gamma_i + r\alpha \leq \sum \beta_j$. Ekkor persze $\sum \nu(\gamma_i) + r\nu(\alpha) \leq \sum \mu(\beta_j)$ kell, hogy teljesüljön. Az ötlet az, hogy válasszuk $\nu(\alpha)$ a lehető legnagyobbnak, amit az ilyen típusú korlátok megengednek. Legyen tehát

$$\nu(\alpha) = \inf\{\frac{\sum \nu(\beta_j) - \sum \nu(\gamma_i)}{r} : \beta_j, \gamma_i \in \mathcal{T}_0 \setminus \alpha;\ r \in \mathbb{N};\ \sum \gamma_i + r\alpha \leq \sum \beta_j\}.$$

Mivel α korlátos, ezért $\alpha \leq n\varepsilon$ valamilyen $n > 0$-ra, így a fenti infimum nem üres halmazon fut. Például $r = 1$ és $\beta_1 = \cdots = \beta_n = \varepsilon$ választással rögtön látszik, hogy $\nu(\alpha) \leq n$. Továbbá mivel $\varepsilon \leq \varepsilon + \alpha$, így a feltételből $\nu(\alpha) \geq 0$ már következne, ezért elég megmutatni, hogy az így kiterjesztett ν teljesíti a feltételt.

Legyen tehát $\sum \phi_i + s\alpha \leq \sum \theta_j + t\alpha$. Ha $s = t = 0$, akkor az indukciós feltevés miatt nincs mit bizonyítani. Tegyük fel először, hogy $s = 0, t > 0$. Ekkor azt kell belátni, hogy $\sum \nu(\phi_i) \leq t\nu(\alpha) + \sum \nu(\theta_j)$, vagy az ezzel ekvivalens $\nu(\alpha) \geq w = (\sum \nu(\phi_i) - \sum \nu(\theta_j))/t$ egyenlőtlenséget. Mivel $\nu(\alpha)$ egy számhalmaz infimumaként volt megadva, elég ha e halmaz minden eleméről belátjuk, hogy legalább akkora, mint w. Legyen $\sum \gamma_i + r\alpha \leq \sum \beta_j$ egy tetszőleges egyenlőtlenség ami a $\nu(\alpha)$ definíciójában szerepelt. Elég tehát belátni, hogy ekkor

$\sum \nu(\beta_j) - \sum \nu(\gamma_i) \geq rw$. A ϕ, θ-s egyenlőtlenséget r-el megszorozva és mindkét oldalhoz $t \cdot \sum \gamma_i$-t adva kapjuk, hogy

$$r \sum \phi_i + t \sum \gamma_i \leq r \sum \theta_j + tr\alpha + t \sum \gamma_i.$$

Itt a jobb oldalt a β, γ-s egyenlőtlenség t-szeresével tovább növelve kapjuk, hogy

$$r \sum \phi_i + t \sum \gamma_i \leq r \sum \theta_j + t \sum \beta_j.$$

Az indukciós feltevés szerint ekkor

$$r \sum \nu(\phi_i) + t \sum \nu(\gamma_i) \leq r \sum \nu(\theta_j) + t \sum \nu(\beta_j),$$

avagy átrendezve és rt-vel osztva

$$w = \frac{\sum \nu(\phi_i) - \sum \nu(\theta_j)}{t} \leq \frac{\sum \nu(\beta_j) - \sum \nu(\gamma_i)}{r},$$

és ezt kellet igazolni.

A másik eset az, ha $s > 0$. Legyenek $z_1, z_2, \ldots z_t$ elemei annak a halmaznak, aminek $\nu(\alpha)$ az infimuma, és legyen $z = \min(z_1, \ldots, z_t)$. Világos, hogy elég megmutatni, hogy $s\nu(\alpha) + \sum \nu(\phi_i) \leq tz + \sum \nu(\theta_j)$. Ehhez legyen $\sum \gamma_i + r\alpha \leq \sum be_j$ a z-t definiáló egyenlőtlenség, azaz $z = (\sum \nu(\beta_j) - \sum \nu(\gamma_i))/r$. Ismét szorozzuk r-el a ϕ, θ-s egyenlőtlenséget, adjunk mindkét oldalhoz $t \sum \gamma_i$-t, és a jobb oldalt növeljük meg a β, γ-s egyenlőtlenség t-szeresével. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$r \sum \phi_i + t \sum \gamma_i + rs\alpha \leq r \sum \theta_j + t \sum \beta_j.$$

Ez pedig pontosan olyan egyenlőtlenség, amit $\nu(\alpha)$ definíciójához használtunk. Tehát ekkor

$$s\nu(\alpha) + \sum \nu(\phi_i) \leq \sum \nu(\theta_j) + \frac{t \sum \nu(\beta_j) - t \sum \nu(\gamma_i)}{r} = tz + \sum \nu(\theta_j),$$

és ezt kellett belátni. Ezért a kiterjesztett ν kielégítit az összes feltételt, és ezzel az indukciós lépést, és egyben az egész bizonyítást befejeztük.

$\square$

Világos, hogy ha az állításban szereplő μ függvényt akárhogy kiterjeszthetjük $\mathcal{T}$-re, akkor $\mathcal{M}(\mathcal{T}_0)$-nak egy elemét kapjuk, tehát az nem üres. Ezzel pedig a tétel bizonyítását befejeztük. $\square$

4.3 Következmény (Tarski tétele). *Tegyük fel, hogy G hat X-en és $E \subset X$. Akkor és csak akkor létezik $\mu : P(X) \to [0, \infty]$ végesen additív G-invariáns mérték melyre $\mu(E) = 1$, ha E nem paradox.*

Bizonyítás. A könnyű irány már beláttuk, ezért tegyük most fel, hogy E nem paradox. Legyen $\varepsilon = [E] \in \mathcal{S}$ a típus-félcsoportban. Tegyük fel, hogy valamely n-re $(n+1)\varepsilon \leq n\varepsilon$. Mivel $n\varepsilon \leq (n+1)\varepsilon$ mindig igaz, ezért ekkor $n\varepsilon = (n+1)\varepsilon$.

Mindkét oldalhoz ε-okat adva kapjuk, hogy $n\varepsilon = (n+1)\varepsilon = \cdots = 2n\varepsilon = n(2\varepsilon)$. Ekkor viszont az egyszerűsítési szabály (3.8 tétel) miatt $\varepsilon = 2\varepsilon$ ami ellentmondás, hiszen feltettük, hogy E nem paradox. Tehát $\varepsilon \in \mathcal{S}$ kielégíti az előző tétel (1)-es tulajdonságát, így a (2)-est is. Tehát létezik a keresett $\nu : \mathcal{S} \to [0,\infty]$ homomorfizmus, vagy ezzel ekvivalensen a keresett $\mu : P(X) \to [0,\infty]$ végesen additív G-invariáns mérték. □

5 Invariáns mérték és invariáns integrál

Láttuk, hogy egy X tér paradox felbontásához vezető út általában az X-en ható csoport paradox felbontásából indul ki. Hasonló a helyzet, ha X-en a csoport hatására invariáns mértéket szeretnénk kapni, amely bizonyíthatná, hogy nem létezik paradox felbontás: érdemes előbb a csoporton magán egy invariáns mértéket konstruálni, amit aztán levetítünk X-re.

5.1 Definíció (Amenábilis csoport)**.** Ha G csoport és $\mu : P(G) \to [0,1]$ olyan végesen additív balinvariáns ($\mu(gA) = \mu(A)$) függvény, melyre $\mu(G) = 1$, akkor μ-t röviden mértéknek nevezzük. Egy csoportot akkor nevezünk amenábilisnak, ha van rajta mérték. Az amenábilis csoportok halmazát $\mathcal{AG}$-vel jelöljük.

5.2 Tétel. *Ha a G amenábilis csoport hat X-en, akkor $P(X)$-en van olyan végesen additív G-invariáns μ mérték, melyre $\mu(X) = 1$. Speciálisan X nem lehet G-paradox.*

Bizonyítás. Legyen μ egy mérték G-n és válasszunk egy tetszőleges $x \in X$-et. Definiáljuk $\nu : P(X) \to [0,1]$-et a $\nu(A) = \mu(\{g \in G : g(x) \in A\})$ képlettel. Világos, hogy ν végesen additív, és $\nu(X) = 1$. Végül tetszőleges $h \in G$-re $\nu(hA) = \mu(\{g \in G : g(x) \in hA\}) = \mu(\{g \in G : h^{-1}g(x) \in A\}) = \mu(h\{g \in G : g(x) \in A\}) = \mu(g \in G : g(x) \in A\}) = \nu(A)$, tehát ν invariáns is. □

Ha egy csoport paradox, akkor nem lehet amenábilis, hiszen bármely μ mértékre $\mu(G) = 2\mu(G)$ kellene, hogy teljesüljön. Másrészt egy csoport mindig hat magán a balról szorzással, így Tarski tételét (4.3) alkalmazva kapjuk, hogy ha egy csoport nem paradox, akkor amenábilis. Azaz az amenábilis csoportok megegyeznek a nem-paradox csoportokkal. Be fogjuk látni, hogy $\mathbb{R}^1$ és $\mathbb{R}^2$ egybevágóságai amenábilis csoportot alkotnak, amiből a fenti tétel szerint következik, hogy $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ nem paradoxak. Viszont ezzel a módszerrel az nem derül ki, hogy mondjuk $[0,1] \subset \mathbb{R}$ vagy az egységnégyzet a síkban paradoxak-e. Ehhez a fenti tétel egy jelentős finomítását fogjuk bebizonyítani némi előkészítés után.

Valś analízisből tudjuk, hogy egy mérték segítségével hogyan tudunk függvényeket integrálni. Ezt a módszert amenábilis csoportokra is ki lehet terjeszteni. Így a funcionál analízis eredményeit is fel lehet használni ezen csoportok vizsgálatára.

5.3 Definíció (Invariáns közép)**.** Jelölje $B(G)$ a G csoporton értelmezett korlátos, valós értékű függvényeket. Az $m : B(G) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionált (bal-)invariáns középnek nevezzük, ha

1) bármely $f \in B(G)$ esetén $\inf\{f(g) : g \in G\} \leq m(f) \leq \sup\{f(g) : g \in G\}$, és

2) bármely $g \in G, f \in B(G)$-re $m(f) = m(g \cdot f)$, ahol $g \cdot f(h) = f(g^{-1}h)$.

5.4 Állítás. Egy csoport akkor és csak akkor amenábilis, ha van rajta bal-invariáns közép. Sőt, a mértékek és a bal-invariáns közepek kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetőek egymásnak.

Bizonyítás. Az egyszerűbb irány abból következik, hogy ha $m : B(G) \to \mathbb{R}$ bal-invariáns közép, akkor χ_A-val jelölve az $A \subset G$ halmaz karakterisztikus függvényét, a $\mu(A) = m(\chi_A)$ képlet egy mértéket definiál.

A másik irányhoz az analízisből ismert módszert követjük. Legyen $\mu : P(G) \to [0,1]$ mérték. Nevezzük az f függvényt egyszerűnek, ha csak véges sok különböző értéket vesz fel. Ha $f = \chi_A$ valamely $A \subset G$ halmazra, akkor legyen $m(f) = \mu(A)$. Ezt lineárisan kiterjeszthetjük az egyszerű függvényekre.

Ha $f \geq 0$, akkor legyen $m(f) = \sup\{m(f') : f'$ olyan egyszerű függvény, melyre $f \geq f' \geq 0\}$. Végül egy tetszőleges f függvényt egyértelműen fel lehet írni $f = g - h$ alakban, ahol $g, h \geq 0$ és $g \cdot = 0$ mindenütt. Ekkor legyen $m(f) = m(g) - m(h)$. Elemi számolás mutatja, hogy az így definiált $m(f)$ teljesíti a tőle elvárt tulajdonságokat.

Végül az, hogy m-et egyértelműen meghatározza μ abból következik, hogy $B(G)$-ben az egyszerű függvények sűrűn vannak a sup-normára nézve. $\square$

Eddig kitüntettük a bal-oldali invarianciát, de ennek nincs jelentősége. Először is egy bal-invariáns μ mértékből egyszerűen kaphatunk jobb-invariáns mértéket a $\mu_0(A) = \mu(A^{-1})$ képlettel. Könnyen lehet, hogy egy mérték csak az egyik oldalról invariáns, azonban az invariáns közepek első alkalmazásaként megmutatjuk, hogy ha a csoport amenábilis, akkor mindig van olyan mérték is rajta, ami mindkét oldaról invariáns.

5.5 Állítás. Ha G amenábilis, akkor van rajta olyan ν mérték, ami egyszerre bal- és jobb-invariáns.

Bizonyítás. Legyen μ bal-invariáns mérték G-n, legyen μ_0 az ebből kapott jobb-invariáns mérték, és legyen m_0 a μ_0-hoz tartozó jobb-invariáns közép. Legyen továbbá $A \subset G$ esetén $f_A \in B(G)$ az a függvény, hogy $f_A(g) = \mu(Ag^{-1})$. Legyen végül $\nu : P(G) \to [0,1]$ a $\nu(A) = m_0(f_A)$ képlettel adva. Világos, hogy $\nu(G) = 1$, továbbá mivel diszjunkt A, B halmazok esetén $f_{A \cup B} = f_A + f_B$, ezért ν végesen additív. Továbbá $f_{gA} = f_A$ mert μ bal-invariáns, így $\nu(gA) = m_0(f_{gA}) = m_0(f_A) = \nu(A)$. Végül $f_{Ag} = (f_A) \cdot g$, és így $\nu(Ag) = m_0(f_{Ag}) = m_0(f_A \cdot g) = m_0(f_A) = \nu(A)$, hiszen m_0 jobb-invariáns. Tehát ν mindkét oldalról invariáns. $\square$

Most rátérünk a 5.2 tétel általánosítására. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha a G amenábilis csoport hat X-en, és X bizonyos halmazain már adott egy G-invariáns additív mérték, akkor ez kiterjeszthető az egész $P(X)$-re invariánsan. A bizonyítást két lépesre bontjuk, először csak egy additív kiterjesztést konstruálunk, majd ezt G amenabilitása segítségével invariánssá tesszük. Az

$\mathcal{A} \subset P(X)$ halmazrendszert algebrának nevezzük, ha zárt a metszet, unió valamint komplementer képzésre. $\mathcal{A}$-t gyűrűnek nevezzük, ha zárt az unió valamint a különbség képzésre. Az $A \in \mathcal{A}$ elemet atomnak nevezzük, ha egyetlen $A \supsetneq B \in \mathcal{A}$ elem van, nevezetesen a $B = \emptyset$. Könnyen látható, hogy véges sok halmaz mindig véges algebrát generál, továbbá egy véges algebrát mindig generálnak az atomjai.

5.6 Tétel (Mérték kiterjesztési tétel)**.** *Legyen $\mathcal{A}_0 \subset P(X)$ gyűrű, és legyen μ mérték $\mathcal{A}_0$-on. Ekkor létezik egy $\bar{\mu}$ mérték az egész $P(X)$-en ami a μ kiterjesztése.*

Bizonyítás. Legyen először $\mathcal{A} \subset P(X)$ egy véges algebra és legyen $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}_0$. Az $\mathcal{A}$ atomjainak száma szerinti teljes indukcióval belátjuk, hogy ekkor $\mu|_{\mathcal{C}}$ kiterjeszthető $\mathcal{A}$-ra.Ha $\mathcal{A}$-nak csak egy atomja van, akkor $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ és az állítás nyilvánvaló.

Az általános indukciós lépéshez legyen $B \in \mathcal{C}$ egy tartalmazásra minimális elem, és legyen $A_0 \subset B$ egy atom $\mathcal{A}$-ban. Legyen továbbá $C = X \setminus B$. Ekkor persze $C \in \mathcal{A}$, és ezért képezhetjük az $\mathcal{A}_C = \mathcal{A} \cap P(C)$ halmazrendszert, ami természetes módon $P(C)$-nek részalgebrája. Mivel $\mathcal{A}_C$ minden atomja egyben $\mathcal{A}$-nak is atomja, de $A_0 \notin \mathcal{A}_C$ ezért $\mathcal{A}_C$-nek kevesebb atomja van, mint $\mathcal{A}$-nak. Ezért alkalmazhatjuk az indukciós feltételt a $\mathcal{C} \cap \mathcal{A}_C \subset \mathcal{A}_C$ részgyűrűre és az azon adott $\mu|_{\mathcal{C} \cap \mathcal{A}_C}$ mértékre. Az így nyert kiterjesztést jelölje $\nu : \mathcal{A}_C \to [0, \infty]$.

A $\bar{\mu}$ mértéket úgy fogjuk $\mathcal{A}$-n megadni, hogy először megadjuk az atomokon. Mivel minden $\mathcal{A}$-beli elem egyértelműen írható fel atomok diszjunkt uniójaként, így az atomokról a mérték egyértelműen terjed ki $\mathcal{A}$-ra additív mértékként. Legyen $A \in \mathcal{A}$ egy atom. Ekkor vagy $A \subset C$ vagy $A \subset B$. Az első esetben legyen $\bar{\mu}(A) = \nu(A)$. A második esetben legyen $\bar{\mu}(A) = 0$ ha $A \neq A_0$ és legyen $\bar{\mu}(A_0) = \mu(B)$. Már csak azt kell belátni, hogy $\bar{\mu}$ megegyzik μ-vel a $\mathcal{C}$-re megszorítva. Legyen $D \in \mathcal{C}$. Mivel B tartalmazásra nézve minimális volt $\mathcal{C}$-ben, ezért vagy $B \subset D$, vagy $D \subset C$. Az utóbbi esetben persze $\bar{\mu}(D) = \nu(D) = \mu(D)$, tehát csak a $B \subset D$ esetet kell megvizsgálni. Ekkor $D = B \cup (D \setminus B)$, és így $\bar{\mu}(D) = \bar{\mu}(B) + \bar{\mu}(D \setminus B) = \mu(B) + \nu(D \setminus B) = \mu(B) + \mu(D \setminus B) = \mu(D)$.

A bizonyítás befejezéséhez a szokásos kompaktsági trükköt alkalmazzuk a $[0,1]^{P(X)}$ szorzattérben. Bármely véges $\mathcal{A} \subset P(X)$ részalgebrára legyen $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \{\nu \in [0,1]^{P(X)} : \nu|_{\mathcal{A}}$ mérték, ami kiterjeszti $\mu|_{\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_0}$-t$\}$. Mint láttuk az $\mathcal{M}(\mathcal{A})$-k nem-üresek, és zártak is, hiszen véges sok zárt feltétellel vannak megadva. Ráadásul centrált rendszert alkotnak, hiszen ha $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ véges részalgebrák, akkor az általuk generált $\mathcal{A}$ részalgebra még mindig véges, és így $\mathcal{M}(\mathcal{A}_1) \cap \cdots \cap \mathcal{M}(\mathcal{A}_n) \supset \mathcal{M}(\mathcal{A})$, ami megint nem-üres. Így a kompaktság miatt van egy $\bar{\mu} \in \cap \mathcal{M}(\mathcal{A})$, erről pedig világos, hogy mérték, és kiterjesztése μ-nek. $\square$

5.7 Tétel (Invariáns mérték kiterjesztési tétel)**.** *Tegyük fel, hogy a G amenábilis csoport hat az X-en. Legyen $\mathcal{A}_0 \subset P(X)$ egy G-invariáns gyűrű. Ha μ invariáns mérték $\mathcal{A}_0$-on, akkor kiterjeszthető invariánsan az egész $P(X)$-re.*

Bizonyítás. A mérték kiterjesztési tételből kapunk egy $\bar{\mu}$ mértéket $P(X)$-en, ami a μ kiterjesztése. Legyen m invariáns közép a G csoporton. Bármely $A \subset X$

rendelünk egy $f_A : G \to \mathbb{R}$ függvényt, amit az $f_A(g) = \bar{\mu}(g^{-1}A)$ képlet definiál. Végül legyen $\nu(A) = m(f_A)$ ha f_A korlátos, amúgy meg legyen $\nu(A) = \infty$. Mivel diszjunkt A, B halmazok esetén $f_{A\cup B} = f_A + f_B$ ezért ν additív mérték $P(X)$-en. Ha $A \in \mathcal{A}_0$ akkor $g^{-1}A \in \mathcal{A}_0$ és ezért $f_A(g) = \mu(A)$, azaz f_A konstans, így (f_A korlátosságától függetlenül) $\nu(A) = \mu(A)$, tehát kiterjesztést kaptunk. Rádásul invariáns is lesz a kiterjesztés: mivel $f_{hA}(g) = \bar{\mu}(g^{-1}hA) = f_A(h^{-1}g) = (h\cdot f_A)(g)$, így $\nu(hA) = m(f_{hA}) = m(h\cdot f_A) = m(f_A)\nu(A)$ a közép invarianciája miatt. $\square$

5.8 Megjegyzés. Könnyen látható, hogy ha egy G csoportra mindig teljesül a tétel állítása, akkor G amenábilis. Alkalmazzuk ugyanis a tételt G-nek a saját magán való hatására (a balról szorzás által) és az $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, G\}$ részgyűrűre, amelyen $\mu(\emptyset) = 0$ és $\mu(G) = 1$.

5.9 Következmény. *Ha G az $\mathbb{R}^n$ egybevágóságainak egy amenábilis részcsoportja, akkor a Lebesgue mérték kiterjeszthető $\mathbb{R}^n$ minden részhalmazára végesen additív, G-invariáns mértékként. Következésképpen nincsen $\mathbb{R}^n$-ben korlátos, nem-üres belsejű G-paradox halmaz.*

6 Példák amenábilis csoportokra

6.1 Tétel.

(a) Minden véges csoport amenábilis.
(b) Amenábilis csoport tetszőleges részcsoportja is amenábilis.
(c) Amenábilis csoport tetszőleges faktorcsoportja is amenábilis.
(d) Ha $N \lhd G$ normálosztó, és N valamint G/N amenábilis, akkor G is amenábilis.
(e) Ha G amenábilis csoportok direkt uniója, akkor G is amenábilis.
(f) Minden kommutatív csoport amenábilis.

6.2 Következmény. *Minden feloldható csoport amenábilis. Továbbá mivel minden csoport direkt uniója a végesen generált részcsoportjainak, ezért (b) és (e) tükrében egy csoport pontosan akkor amenábilis, ha minden végesen generált részcsoportja az.*

A 6.1 tétel bizonyítása.
(a) A $\mu(A) = |A|/|G|$ mérték nyilván jó.

(b) Legyen $H \leq G$ és legyen μ mérték a G-n. Válasszunk H minden jobboldali mellékosztályából egy elemet, az így kapott halmaz legyen M. Ha $A \subset H$ akkor legyen $\nu(A) = \mu(\cup Ag : g \in M)$. Könnyű ellenőrizni, hogy ez jó lesz.

(c) Legyen $N \lhd G$ és $\phi : G \to G/N$ a faktor-leképezés. Ha μ mérték G-n, akkor könnyen látható, hogy a $\nu(A) = \mu(\phi^{-1}(A))$ mértéket definiál G/N-en.

(d) Legyen ν mérték N-en és legyen m invariáns közép G/N-en. Bármely $A \subset G$-hez tekintsük azt az $f_A : G \to \mathbb{R}$ függvényt, amit az $f_A(g) = \nu_(N \cap g^{-1}A)$ képlet ad meg. Vegyük észre, hogy ha g és h azonos N-szerinti mellékosztályban vannak, akkor $f_A(h) = f_A(g)$. Ugyanis ilyenkor $h^{-1}g = n \in N$. Így $f_A(h) =$

$\nu(N \cap h^{-1}A) = \nu(N \cap ng^{-1}A) = \nu(n(N \cap g^{-1}A)) = \nu(N \cap g^{-1}A) = f_A(g)$. Tehát f_A-t gondolhatjuk egy $G/N \to \mathbb{R}$ korlátos függvénynek. Legyen $\mu(A) = m(f_A)$. Mivel $f_G = \chi_G$ így $\mu(G) = 1$. Ha $A, B \subset G, A \cap B = \emptyset$, akkor $f_{A \cup B} = f_A + f_B$ tehát μ végesen additív. Végül $f_{hA}(g) = \nu(N \cap g^{-1}hA) = f_A(h^{-1}g) = (h \cdot f_A)(g)$, tehát m bal-invarianciája miatt μ is invariáns.

(e) Adott a $G = \cup\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ csoport, ahol minden G_α amenábilis (és adott hozzá a μ_α mérték), valamint bármely α, β esetén van egy γ, hogy $G_\alpha, G_\beta \leq G_\gamma$. Tekintsük a $[0,1]^{P(G)}$ kompakt topologikus teret. Bármely $\alpha \in I$ esetén legyen $\mathcal{M}_\alpha$ azon $\mu : P(G) \to [0,1]$ függvények halmaza, melyre $\mu(G) = 1$ és $\mu(gA) = \mu(A)$ minden $g \in G_\alpha$-ra. Mivel ezt a feltételt elég G_α generátoraira ellenőrizni, ezért ez ismét csak véges sok zárt feltétel, így az $\mathcal{M}_\alpha$ zárt, és nem is üres, amit a $\mu(A) = \mu_\alpha(A \cap G_\alpha)$ függvény bizonyít. Végül az $\mathcal{M}_\alpha : \alpha \in I$ centrált rendszer, hiszen $\mathcal{M}_a l \cap \mathcal{M}_\beta \supset \mathcal{M}_g a$ ha $G_\alpha, G_\beta \leq G_\gamma$. Tehát van egy μ ami az összes $\mathcal{M}_\alpha$-ban benne van, ez pedig mérték lesz G-n.

(f) Mint már rámutattunk, minden csoport a végesen generált részcsoportjainak direkt uniója, ezért elég végesen generált Abel-csoportokat tekinteni. Legyen G Abel-csoport a $\{g_1, \ldots, g_m\}$ generátor-rendszerrel. Azt állítjuk, hogy elég bármely $\varepsilon > 0$ számhoz egy olyan $\mu_\varepsilon : P(G) \to [0,1]$ függvényt készíteni, amire

(1) $\mu_\varepsilon(G) = 1$,

(2) μ_ε végesen additív, és

(3) $\mu_e p$ majdnem invariáns, azaz bármely $A \subset G$ és g_k generátor esetén $|\mu_\varepsilon(A) - \mu_\varepsilon(g_k A)| \leq \varepsilon$.

Ha ugyanis mutattunk ilyen μ_ε függvényeket, akkor a szokásos kompaktsági módszert tudjuk használni. Legyen $\mathcal{M}_\varepsilon$ azon $P(G) \to [0,1]$ függvények halmaza, ami kielégíti a fenti (1)-(3) feltételeket. Minden ilyen $\mathcal{M}_\varepsilon$ nem-üres és zárt, hiszen csupa zárt feltétellel adtuk meg. Másrészt centrált rendszert alkotnak, hiszen $\mathcal{M}_{\varepsilon_1} \cap \mathcal{M}_{\varepsilon_2} \supset \mathcal{M}_e p$ ha $\varepsilon \leq \varepsilon_1, \varepsilon_2$. Tehát az összes $\mathcal{M}_\varepsilon$-oknak van egy közös eleme, ez pedig mérték lesz G-n.

Már csak az a kérdés, hogyan konstruáljuk meg a μ_ε mértéket. Először vizsgáljuk meg azt az esetet, ha G-t egy elem generálja. Vegyünk egy olyan nagy N-et, hogy $2/N \leq \varepsilon$. Legyen $\mu_\varepsilon(A) = |\{i : 1 \leq i \leq N \text{ és } g_1^i \in A\}|/N$. Világos, hogy A illetve $g_1 A$ esetén a két indexhalmaz legfeljebb 2 elemben térhet el a két szélén, és ezért $|\mu_\varepsilon(A) - \mu_\varepsilon(g_1 A)| \leq 2/N \leq \varepsilon$.

Az általános esetben legyen N ismét olyan, mint fent, és legyen $\mu_\varepsilon(A) = |\{(i_1, \ldots, i_m : 1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq N \text{ és } g_1^{i_1} g_2^{i_2} \cdots g_m^{i_m} \in A\}|/N^m$. Világos, hogy ez végesen additív és $\mu_\varepsilon(G) = 1$. A kommutativitás miatt pedig

$$|\mu_\varepsilon(g_k A) - \mu_\varepsilon(A)| \leq \frac{|\{(i_1, \ldots, i_m) : 1 \leq i_1, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, \ldots, i_m \leq N \text{ és } i_k = 1 \text{ vagy } N+1\}|}{N^m}$$
$$\leq \frac{2N^{m-1}}{N^m} = \frac{2}{N} \leq \varepsilon,$$

ahogy akartuk.

$\square$

6.3 Tétel. *$\mathbb{R}, S^1$ illetve $\mathbb{R}^2$ egybevágóságainak csoportja feloldható, tehát amenábilis.*

Vázlatos bizonyítás. Legyen G_n az $\mathbb{R}^n$ egybevágóságainak a csoportja, $SG_n \leq G_n$ ezen belül az irányítás tartó egybevágóságok csoportja, és $T_n \leq SG_n$ az eltolások csoportja.

Ezekkel a jelölésekkel $T_1 \leq G_1$ 2-indexű részcsoport, így normálosztó és $G_1/T_1 \equiv Z_2$. Tehát a $1 \lhd T_1 \lhd G_1$ normál lánc bizonyítja G_1 feloldhatóságát, hiszen T_1 kommutatív.

Hasonlóan $SO(1)$ kommutatív, 2-indexű részcsoportja S^1 egybevágóságainak, így normálosztó, és a faktor is kommutatív.

Végül $SG_2 \leq G_2$ 2-indexű, ezért normálosztó. Továbbá $T_2 \leq SG_2$ is normálosztó, és a faktor csoport pedig $SO(1)$. Ezért az $1 \lhd T_2 \lhd SG_2 \lhd G_2$ normálláncban minden faktor kommutatív. $\square$

6.4 Következmény. *$\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ és S^1 nem paradoxak, sőt nincsen korlátos, nemüres belesejű paradox részhalmazuk.*

7 Ekvivalens jellemzések amenábilis csoportokra

7.1 Definíció (Hahn-Banach kiterjesztési tulajdonság)**.** Azt mondjuk, hogy a G csoport teljesíti a Hahn-Banach kiterjesztési tulajdonságot, ha minden olyan esetben, amikor

(a) G egy V valós vektortér lineáris operátorainak egy részcsoportja,

(b) a $V_0 \leq V$ invariáns altér és $F : V_0 \to \mathbb{R}$ lineáris, G-invariáns funckionál, és

(c) $F(v) \leq p(v)$ minden $v \in V_0$-ra, ahol $p : V \to \mathbb{R}$ olyan G-invariáns függvény, ami szubadditív ($p(v_1+v_2) \leq p(v_1)+p(v_2)$), és $\alpha \geq 0$ esetén $p(\alpha v) = \alpha p(v)$,

akkor létezik egy $\bar{F} : V \to \mathbb{R}$ kiterjesztése F-nek az egész vektortérre, ami G-invariáns, és $\bar{F} \leq p$.

7.2 Definíció (Følner feltétel)**.** A G csoportra teljesül a Følner feltétel, ha vannak G-ben "tetszőlegesen kis határú halmazok". Pontosabban bármely $S \subset G$ véges halmazra és bármely $\varepsilon > 0$ számra van egy véges $W \subset G$, hogy bármely $g \in S$ esetén $|gW \triangle W| \leq \varepsilon |W|$.

7.3 Definíció (Dixmier feltétel)**.** Jelölje $B(G)$ a $G \to \mathbb{R}$ korlátos függvények halmazát. G kielégíti a Dixmier feltételt, ha bármely $f_1, \ldots, f_n \in B(G)$ és $g_1, \ldots, g_n \in G$ esetén van olyan $h \in G$, hogy $\sum f_i(h) \leq \sum f_i(g_i^{-1}h)$.

7.4 Definíció (Markov-Kakutani fixpont tulajdonság)**.** A G csoport teljesíti a Markov-Kakutani fixpont tulajdonságot, ha bármely $K \subset X$ kompakt konvex részhalmazára valamely lokálisan konvex X topologikus vektortérnek, és G bármely folytonos, affin hatására K-n van olyan $x \in K$ ami minden $g \in G$-nek fixpontja.

7.5 Tétel. *A következő tulajdonságok ekvivalensek a G csoportra:*

(1) G amenábilis.
(2) Van G-n bal-invariáns közép.
(3) G nem paradox.
(4) G-re teljesül az invariáns mérték kiterjesztési tétel (5.7 tétel).
(5) G kielégíti a Hahn-Banach kiterjesztési feltételt.
(6) G kielégíti a Dixmier feltételt.
(7) G kielégíti a Følner feltételt.

Bizonyítás. Az (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) következtetéseket már láttuk.

(2) $\Rightarrow$ (5): A sima Hahn-Banach kiterjesztési tétel miatt van egy F-et kiterjesztő F_0 lineáris funkcionál, amit p dominál. Bármely $v \in V$ esetén definiálhatunk egy $f_v : G \to \mathbb{R}$ függvényt a $f_v(h) = F_0(h^{-1}v)$ képlettel. Ekkor $f_v(h) \leq p(h^{-1}v) = p(v)$ tehát f_v korlátos. Legyen továbbáz m invariáns közép G-n, és legyen $\bar{F}(v) = m(f_v)$. Ekkor persze $\bar{F}(v) \leq p(v)$ szintén fennáll, és a G-invariancia pedig $f_{g(v)} = g \cdot (f_v)$ miatt m invarianciájából következik. $v \in V_0$ esetén pedig f_v konstans, így $\bar{F}$ is kiterjesztése F-nek.

(5) $\Rightarrow$ (2): Legyen $V = B(G)$ és V_0 pedig a konstans függvények altere. Az $f \to g \cdot f$ hatás lineáris és a V_0 invariáns altér. A $p(f) = \sup\{f(g) : g \in G\}$ és az $F(\alpha \cdot \chi_G) = \alpha$ választások kielégítik a feltételeket. Az ebből kapott $\bar{F}$ kiterjesztés jó lesz invariáns középnek. A linearitás és $\bar{F}(\chi_G) = 1$ nyilván teljesül, csak azt kell ellenőrizni, hogy $f \geq 0$ esetén $\bar{F}(f) \geq 0$. De egy ilyen f esetén $p(-f) \leq 0$ és így $\bar{F}(-f) \leq p(-f) \leq 0$, tehát $\bar{F}(f) = -\bar{F}(-f) \geq 0$.

(2) $\Rightarrow$ (6): Ha m bal-invariáns közép G-n, akkor $m(\sum f_i - g_i \cdot f_i) = 0$, ezért van olyan $h \in G$, hogy $\sum (f_i - g_i \cdot f_i)(h) \leq 0$, azaz $\sum f_i(h) \leq \sum f_i(g_i^{-1}h)$.

(6) $\Rightarrow$ (2): Legyen most $V_0 \subset B(G)$ a konstans függvények és az $f - g \cdot f$ alakú függvények által generált altér. A feltétel szerint bármely $\sum f_i - g_i \cdot f_i$ függvénynek van nem-pozitív (és az ellentettjére alkalmazva ugyanezt) nemnegatív értéke is, ezért a konstansok közül csak a 0 áll elő ilyen alakban. Ezért V_0 valamely v elemét $v = \sum (f_i - g_i \cdot f_i) + \alpha \chi_G$ alakban írva az α egyértelmű. Ezért az $F(v) = \alpha$ a V_0-on jóldefiniált lineáris funkcionál, ráadásul invariáns. Ráadásul $F(v) \leq \sup(v)$ bármely $v \in V_0$ esetén, hiszen, mint láttuk, $\sum f_i - g_i \cdot f_i$ a feltétel szerint vesz fel nem-negatív értéket. Így a $p(v) = \sup(v) : v \in B(G)$ választással fennállnak a Hahn-Banach tétel feltételei, így kapunk egy $\bar{F}$ kiterjesztését az F-nek az egész $B(G)$-re, amit p dominál. Ebből világos, hogy $\bar{F}$ közép, és $\bar{F}(\chi_G) = 1$. A bal-invariancia pedig abból következik, hogy $\bar{F}(f) - \bar{F}(g \cdot f) = \bar{F}(f - g \cdot f) = F(f - g \cdot f) = 0$.

(7) $\to$ (1): A szokásos kompaktsági módszert használjuk. Bármely véges $S \subset G$ és $\varepsilon > 0$ esetén legyen $\mathcal{M}_{S,\varepsilon}$ azon végesen additív $\mu : P(G) \to [0,1]$ függvények halmaza, amire $\mu(G) = 1$ és amire bármely $g \in S, A \subset G$ esetén

$|\mu(A)-\mu(g\cdot A)| \leq \varepsilon$. Az $\mathcal{M}_{S,\varepsilon}$ halmazok zártak, és ha belátjuk, hogy nem üresek, akkor a szokásos érvelés miatt centrált rendszert alkotnak, a közös elemük pedig nyilván invariáns mérték lesz G-n. A Følner feltétel miatt pedig az adott (S, ε) párhoz van egy véges W. Legyen $\mu(A) = |A \cap W|/|W|$, könnyen látható, hogy ez eleme $\mathcal{M}_{S,\varepsilon}$-nak, és készen vagyunk.

(3) $\Rightarrow$ (7): Tegyük fel, hogy nem teljesül a Følner feltétel, azaz van egy véges $S \subset G$ és van egy $\varepsilon > 0$, hogy bármely $W \subset G$ véges halmaz esetén valamely $g \in S$-re $|g \cdot W \cap W| > \varepsilon|W|$. Mivel itt $g \cdot W| = |W|$, ezért ekkor $|W \cup g \cdot W| \geq (1+\varepsilon/2)|W|$. Bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén csináljunk egy V_k páros gráfot, melyben mindkét csúcs-osztály legyen G. A $g, h \in G$ csúcsokat kössünk össze éllel, ha van egy legfeljebb k-hosszú S-feletti w szó, amire $g = w \cdot h$. Ha $W \subset G$, akkor jelölje $N_k(W)$ a W szomszédait a V_k gráfban. Vegyük észre, hogy az S-re tett feltétel miatt $|N_1(W)| > (1+\varepsilon/2)|W|$ bármely $W \subset G$ véges halmazra. Másrészt a gráf definíciója szerint $N_{k+1}(W) = N_1(N_k(W))$. Így indukcióval kapjuk, hogy $|N_k(W)| \geq (1+\varepsilon/2)^k|W|$. Legyen K olyan nagy egész szám, hogy $(1+\varepsilon/2)^K > 2$. Ekkor $|N_K(W)| \geq 2|W|$ bármely véges $W \subset G$-re. Ekkor a végtelen Hall-Rado tétel szerint van V_G-ben van teljes $(2,1)$-párosítás, azaz olyan élhalmaz, aminek az egyik oldalon minden foka 1, a másik oldalon minden foka 2. A 2-fokú csúcsok mindegyikéhez válasszuk ki a két szomszédja közül az egyiket. Ezek alkossák az $X_1 \subset G$ halmazt, a másik szomszédok pedig az $X_2 \subset G$ részhalmazt. Mivel a V_K gráf élei egy-egy S-feletti, legfeljebb K-hosszú szóból keletkeztek, ezért X_1-et és X_2-t is partícionálhatjuk véges sok részre aszerint, hogy a párosítás melyik S-feletti szót reprezentálja. Ezekkel a részekkel és a nekik megfelelő szavakkal pedig megkaptuk X_1 illetve X_2 egy-egy véges átdarabolását G-be, tehát G paradox. $\square$

Az utolsó lépésben felhasználtuk a végtelen Hall-Rado tételt. A teljesség kedvéért megmutatjuk, hogy ez hogyan következik a véges matematika előadáson szereplő véges Hall-tételből.

7.6 Tétel (Végtelen Hall-tétel)**.** *Legyen $G(A, B)$ lokálisan véges páros gráf, melyben bármely $C \subset A$ véges halmaz szomszédainak $N(C)$ halmazára fennáll az $|N(C)| \geq |C|$ úgynevezett Hall-feltétel. Ekkor van egy olyan részgráf, amiben minden A-beli pont foka egy, és minden B-beli pont foka legfeljebb egy. (Azaz A bepárosítható B-be.)*

Bizonyítás. Legyen X azon $f : A \to B$ függvények halmaza, amire x és $f(x)$ szomszédok a gráfban. Mivel bármely $x \in A$-nak véges sok szomszédja van, ezért X igazából véges halmazok direkt szorzata. Mivel minden véges halmaz egy kompakt topologikus tér (a diszkrét topológiával), így X is kompakt a szorzat-topológiában. Bármely $C \subset A$ véges halmaz esetén legyen $\mathcal{M}_C \subset X$ azon függvények halmaza, amelyek C-re megszorítva injektívek. Ez ismét véges sok zárt feltétel $\mathcal{M}_C$-re, tehát az $\mathcal{M}_C$ zárt, és nem-üres, hiszen a véges Hall-tétel szerint C bepárosítható B-be. Mivel $C_1, C_2 \subset A$ esetén $\mathcal{M}_{C_1} \cap \mathcal{M}_{C_2} \supset \mathcal{M}_{C_1 \cup C_2}$, ezért ismétcsak centrált rendszerrel van dolgunk. Az összes $\mathcal{M}_C$-k közös eleme pedig nyilván egy $f : A \to B$ injekció, ami megfelel egy párosítás éleinek. $\square$

7.7 Tétel (Végtelen Hall-tétel, szimmetrikus változat)**.** *Ha az előző tétel jelöléseit használva minden véges $C \subset A$ illetve $C \subset B$ esetén $|N(C)| \geq |C|$, akkor van a gráfban egy teljes párosítás.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint kapunk egy F_1 párosítás, ami A-t párosítja B-be, és van egy F_2 párosítás, ami B-t párosítja A-ba. Tekintsük az $F_1 \cup F_2$ részgráfot, és irányítsuk az F_1-beli éleket A-ból B-be, az F_2-belieket pedig B-ből A-ba. Így minden csúcs ki-foka pontosan egy, a be-foka legfeljebb egy, ezért a gráf (páros) körök, valamint egy- vagy kétirányba végtelen utak uniója. Ezekből pedig könnyű kiválasztani egy teljes párosítást. □

7.8 Következmény (Hall-Rado tétel)**.** *Legyen $k \in \mathbb{N}$. Ha a fenti jelölésekkel minden $C \subset A$-ra $|N(C)| \geq k \cdot |C|$ és minden $C \subset B$-re pedig $|N(C)| \geq |C|$, akkor van a gráfban egy teljes $(k, 1)$ párosítás, azaz egy olyan részgráf, amiben minden A-beli csúcs foka k, minden B-beli csúcs foka 1.*

Bizonyítás. Vegyünk A-ból k darab példányt, és mindegyiket ugyanúgy kössük B-hez, ahogy A volt kötve. Az így nyert $G(k \cdot A, B)$ páros gráfra teljesül a szimmetrikus Hall-feltétel, tehát van benne teljes párosítás. Annak a vetülete az eredeti gráfra pedig pont egy teljes $(k, 1)$-párosítás. □

8 Kombinatorikus amenabilitás

A Følner feltétel lehetővé teszi, hogy értelmezzük (végtelen) gráfok amenabilitását.

8.1 Definíció. Legyen $G(V, E)$ egy lokálisan véges gráf. Ha $K \subset G$ véges halmaz, akkor $\partial_E K$ jelölje azon élek halmazát, melynek egyik vége K-ban, másik vége $V \setminus K$-ban van. A G gráf Cheeger-konstansa

$$\iota_E(G) = \inf \left\{ \frac{|\partial_E K|}{|K|} : K \subset V \text{ véges} \right\}$$

8.2 Definíció. A G gráf *amenábilis*, ha $\iota_E(G) = 0$. Gyakran az ezt bizonyító (egyre nagyobb) K halmazokat Følner halmazoknak nevezzük.

8.3 Megjegyzés. Legyen G egy végesen generált csoport, $S \subset G$ egy szimmetrikus generátorrendszer, és tekintsük az ehhez tartozó C Cayley gráfot. Világos, hogy G pontosan akkor amenábilis az eredeti értelemben, ha a C gráf az új értelemben amenábilis.

Először azt fogjuk megvizsgálni, hogy mi az összefüggés a Cheeger konstans és a piramis játék között. Piramis játéknak azt nevezzük, amikor mindenki ad az ismerőseinek valamennyi pénzt, és mégis mindenki jól jár. Ilyen persze a valóságban nincsen, és aki ennek az ellenkezőjét terjeszti, az könnyen börtönbe kerülhet. Ellenben ha végtelen sok ember lenne a Földön, akkor már lehet ilyet csinálni. A formális megfogalmazáshoz be kell vezessünk néhány jelölést, melynek később is hasznát vesszük majd.

Az emberek legyenek a $G(V, E)$ gráf csúcsai, és az ismeretségek legyenek az élek. Minden élét irányítsuk meg valamelyik irányba (mindegy, hogy merre). Egy irányított e él kezdőpontját jelöljük e^--al, a végpontját pedig e^+-al. Ekkor az, hogy ki mennyi pénzt ad az ismerőseinek, az egy $f : E \to \mathbb{R}$ függvénnyel jellemezjető (negatív összeg az irányítással ellentétes irányú adományt jelent). Adott f függvény esetén könnyű kiszámolni, hogy ki mennyire jár jól: csak össze kell adni minden csúcsba a befolyó mínusz a kifolyó pénzösszeget. Az így kapott $g : V \to \mathbb{R}$ függvényt $g = d^* f$-el jelöljük, és így definiáljuk:

$$d^* f(v) = \sum_{e^+ = v} f(e) - \sum_{e^- = v} f(e)$$

A kérdés amit vizsgálni szeretnénk az, hogy mindenki jól járhat-e? Ha nem kötjük meg, hogy mennyi pénzt adhatnak az emberek egymásnak, illetve ha nem várjuk el, hogy mindenki legalább egy fix pozitív összeget kapjon, akkor ezt mindig meg lehet csinálni. Ezért a következő kérdést fogjuk igazából megvizsgálni: mi az a legkisebb összeg, amit mindenki egyszerre megnyerhet, ha mindenki legfeljebb 1 pénzt adhat egy-egy ismerősének. Azaz mekkora lehet $\inf d^* f$, ha $|f(e)| \leq 1$ minden élen?

8.4 Tétel.

$$\iota_E(G) = \max\{\inf_v d^* f(v) : \sup_e |f(e)| \leq 1\}$$

Tehát pontosan azokon a gráfokon lehet igazán jó piramis játékot csinálni, amelyek nem amenábilisak. Vegyük észre továbbá, hogy a jobb oldalon maximum van, nem szuprémum.

Bizonyítás. Az egyik irány egyszerű: vegyünk egy $f : E \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre $|f(e)| \leq 1$ minden élen, és tekintsünk egy $K \subset V$ véges halmazt. Ekkor

$$\inf d^* f \cdot |K| \leq \sum_{v \in K} d^* f(v) \leq \sum_{e \in \partial_E K} |f(e)| \leq |\partial_E K|$$

amiből $\iota_E(G) \geq$ a jobb oldalnál.

A másik irányhoz konstruálunk egy f_n függvénysorozatot. Legyen $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ véges csúcs-halmazok olyan sorozata, melyek uniója az egész gráf.

Legyen G_n az a gráf, hogy $G \setminus K_n$-et egyetlen s ponttá összehúzzuk, valamint felveszünk egy t pontot, melyet K_n minden csúcsával összekötünk egy t felé mutató éllel. Ezt a G_n-et tekintsük egy hálózatnak. A t-be mutató éleknek legyen $\iota_E(G)$ a kapaciátsa, a többi élnek legyen 1. *****Végig lehet gondolni, hogy ebben a hálózatban a minimális vágás értéke $\iota_E(G) \cdot |K_n|$, ezért van olyan folyam, ami minden t-be mutató élen tényleg $\iota_E(G)$ mennyiséget szállít. Legyen f_n ennek a folyamnak a K_n éleire vett megszorítása.

Mivel minden élen az f_n sorozat korlátos, ezért kiválasztható egy olyan részsorozata, mely minden élen konvergens. Legyen $f : E \to \mathbb{R}$ az élenkénti határérték. Ekkor világos, hogy bármely $e \in E$ esetén $|f(e)| \leq 1$ és bármely $v \in V$ csúcsra $d^* f(v) = \iota_E(G)$. Ezzel pont olyan függvényt konstruáltunk, ami realizálja a maximális $\iota_E(G)$ nyereséget minden csúcsban. $\square$

9 Véletlen bolyongás végtelen gráfokon

Tekintsük az alábbi véletlen folyamatot: a korlátos fokú végtelen $G(V,E)$ gráf egy előre rögzített $x_0 \in V$ csúcsából indulva minden lépésben egyforma valószínűséggel lépünk valamelyik szomszédos csúcsra. Azt fogjuk megvizsgálni, hogy e folyamat mennyire érzékeli a gráf amenabilitását, vagy pontosabban a Cheeger konstanst. Ha egy nagy halmaznak pici a határa, akkor a véletlen bolyongás érezhetően nehezen fog "kitalálni" belőle. Éppen ezért sokszor fog visszatérni a kiindulópontba. Legyen tehát p_n annak a valószínűsége, hogy az n-edik lépés után ismét x_0-ban vagyunk. Érezhetően minél amenábilisabb a gráf, annál nagyobb a p_n. Pontosabban igaz a következő tétel:

9.1 Tétel. *A* $0 \le \rho(G) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} \le 1$ *határérték mindig létezik, és* $\rho(G) = 1$ *akkor és csak akkor, ha* G *amenábilis.*

A bizonyításhoz némi kitérőt kell tennünk a gráf csúcsain illetve élein értelmezett függvények világába. Ehhez érdemes lesz olyan függvényeket vizsgálni, melyeknél a csúcsokra írt számok négyzetösszege véges.

9.2 Definíció. Ha X megszámlálható halmaz, akkor legyen $l^2(X) = \{f : X \to \mathbb{R} | \sum_{x\in X} f(x)^2 < \infty\}$, amire gondolhatunk végtelen dimenziós valós vektortérként, sőt be lehet rajta vezetni a következő skaláris szorzást: $f, g \in l^2(X)$ esetén legyen $(f,g) = \sum_x f(x)g(x)$. Használni fogjuk továbbá az $||f|| = \sqrt{(f,f)}$ jelölést is. Az, hogy $f \in l^2(X)$ pontosan azzal ekvivalens, hogy $||f|| < \infty$. A Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség egyik verziója pont azt mondja ki, hogy $|(f,g)|^2 \le ||f||^2||g||^2$, tehát a skaláris szorzat mindig véges. Végül jelölje $f \cdot g(x) = f(x)g(x)$ a pontonkénti szorzatot. Ez akkor is $l^2(X)$-ben marad, ha g-ről csak azt tesszük fel, hogy korlátos.

Minket az $X = V$ illetve az $X = E$ választás fog érdekelni. Az $l^2(V)$ és $l^2(E)$ terek között az alábbi leképezések teremtenek kapcsolatot:

$$\begin{aligned} d : l^2(V) &\to l^2(E), \quad df(e) = f(e^+) - f(e^-) \\ d^* : l^2(E) &\to l^2(V), \quad d^*f(v) = \sum_{v=e^+} f(e) - \sum_{v=e^-} f(e) \end{aligned}$$

A két leképezés közötti összefüggést az $(df, g) = (f, d^*g)$ egyenlőség írja le, ahol $f :\in l^2(V), g \in l^2(E)$ tetszőleges leképezések, azaz d^* majdnem a d adjungáltja.

Néha egy másik fajta skaláris szorzatot érdemes használni: ha $h : X \to \mathbb{R}$ rögzített korlátos függvény, akkor legyen a h-val súlyozott skaláris szorzat $(f,g)_h = (f \cdot h, g) = (f, g \cdot h) = \sum_x f(x)g(x)h(x)$. Jelölje $l^2(X,h)$ azt a teret, ahol a normát az $||f||_h = \sqrt{(f,f)_h}$ képlettel definiáljuk. Mi legtöbbször a $\pi : V \to \mathbb{R}, \pi(v) = \deg(v)$ függvényt fogjuk súlyozásra használni.

Ezen a nyelven könnyen fel tudjuk írni egy a gráf Cheeger konstansát, hiszen ha $K \subset V$ véges halmaz, akkor tekinstük az $1_K : V \to \mathbb{R}$ karakterisztikus függvényt. Erre $(d1_K, d1_K) = |\partial_E K|$ és $(1_K, 1_K) = |K|$. Tehát

$$\iota_E(G) = \inf_{K\subset V} \frac{(d1_K, d1_K)}{(1_K, 1_K)}.$$

Kicsit kényelmesebb lesz ehelyett egy fokszámmal súlyozott verziót vizsgálni, ezért legyen

$$\iota_E(G,\pi) = \inf_{K \subset V} \frac{(d1_K, d1_K)}{(1_K, 1_K)_\pi},$$

ami reguláris gráf esetén, mint például a Cayley gráf csak konstans szorzóban tér el az eredeti verziótól.

9.3 Definíció. Jelölje $D_0 \subset l^2(V)$ a véges tartójú függvények alterét. Természetes általánosítása a Cheeger konstansnak a következő:

$$DS(G) = \inf \left\{ \frac{(df, df)}{(f,f)_\pi} : f \in D_0 \right\},$$

és világos, hogy $DS(G) \leq \iota_E(G,\pi)$ hiszen bővebb halmazon vesszük az infimumot. ($DS(G)$ a gráf ún Soboljev-Dirichlet konstansának a reciproka.)

9.4 Definíció. Legyen $P : l^2(V) \to l^2(V)$ a bolyongás-operátor, azaz

$$Pf(x) = \sum_{xy \in E} \frac{f(y)}{\pi(x)}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor bármely $f, g \in l^2(V)$ esetén $(Pf, g)_\pi = (f, Pg)_\pi$, azaz P a fokszámmal súlyozott skaláris szorzatra nézve önadjungált.

A P, d és d^* leképezések között a következő lemma teremt kapcsolatot.

9.5 Lemma. *$d^*df = \pi \cdot (f - Pf)$ bármely $f \in l^2(V)$-re.*

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} d^*df(v) &= \sum_{e^+=v} df(e) - \sum_{e^-=v} df(e) = \\ &= \sum_{e^+=v} f(v) - f(e^-) - \sum_{e^-=v} f(e^+) - f(v) = \\ &= f(v)\pi(v) - \sum_{xv \in E} f(x) = \pi \cdot (f - Pf) \end{aligned}$$

□

9.6 Következmény. $(df, df) = (d^*df, f) = (\pi \cdot (f - Pf), f) = (f,f)_\pi - (Pf, f)_\pi$.

9.7 Következmény.

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \frac{(Pf,f)_\pi}{(f,f)_\pi} : f \in D_0 \right\} &= \sup \left\{ \frac{(f,f)_\pi - (df,df)}{(f,f)_\pi} : f \in D_0 \right\} = \\ &= 1 - \inf \left\{ \frac{(df,df)}{(f,f)_\pi} : f \in D_0 \right\} = 1 - DS(G). \end{aligned}$$

A Soboljev-Dirichlet és a Cheeger konstans között fordított összefüggés is van. Ezt és az előző észrevételt foglalja össze a következő állítás.

9.8 Tétel.

$$\frac{\iota_E(G,\pi)^2}{2} \le 1 - \sqrt{1-(\iota_E(G,\pi))^2} \le DS \le \iota_E(G,\pi).$$

A bizonyításhoz szükségünk lesz egy lemmára.

9.9 Lemma. *Bármely* $0 \le f \in D_0$ *esetén* $\iota_E(G,\pi)\sum_v f(v)\cdot\pi(v) \le \sum_e |df(e)|$.

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $t > 0$ valós számot, és tekintsük a $K_t = \{v \in V : f(v) > t\}$ véges halmazt. A Cheeger-konstans definíciója szerint ekkor

$$|\partial_E(K_t)| \ge \iota_E(G,\pi)\sum_{v\in K_t}\pi(v).$$

Jelöljük $\chi(D)$-vel a D esemény karakterisztikus függvényét, azaz $\chi(D) = 1$ pontosan akkor, ha D teljesül, amúgy meg $\chi(D) = 0$. Ekkor az előző egyenlőtlenséget így is írhatjuk:

$$\sum_{xy\in E}\chi(f(x) > t \ge f(y)) \ge \iota_E(G,\pi)\sum_{v\in V}\pi(v)\chi(f(v) > t).$$

Itt mindkét oldalon véges szumma áll. Integráljuk mindkét oldalt az $0 < t < \infty$ intervallumon:

$$\int_0^\infty \sum_{xy\in E}\chi(f(x) > t \ge f(y))dt \ge \iota_E(G,\pi)\int_0^\infty \sum_{v\in V}\pi(v)\chi(f(v) > t)dt.$$

Látható, hogy $\int_0^\infty \chi(f(x) > t \ge f(y)dt = f(x) - f(y)$ illetve $\int_0^\infty \chi(f(v) > t)dt = f(v)$, hiszen $f \ge 0$. Így a fenti formulákban a szummát és az integrált felcserélve kapjuk, hogy

$$\sum_{xy\in E}|f(x) - f(y)| \ge \iota_E(G,\pi)\sum_{v\in V}\pi(v)f(v),$$

és mivel $|f(x) - f(y)| = |df(e)|$ az $e = (xy)$ élen, ezért pont ezt akartuk belátni. $\square$

A 9.8 Tétel bizonyítása. Az első egyenlőtlenség a teljesen elemi $r/2 \le 1 - \sqrt{1-r}$ összefüggés alkalmazása $r = \iota_E(G,\pi)^2$-re, az utolsó egyenlőtlenséget pedig már korábban láttuk. Ezért csak a középsővel kell foglalkozzunk.

Alkalmazzuk az előző lemmát az $f^2(x) = f(x)^2$ függvényre, és emeljük négyzetre az egészet. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\iota_E(G,\pi)^2(f,f)_\pi^2 \le \left(\sum_{xy\in E}|f(x)^2 - f(y)^2|\right)^2.$$

A jobb oldalon a tagokat $(f(x)-f(y)(f(x)+f(y))$ alakban írva alkalmazhatjuk a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget:

$$\iota_E(G,\pi)^2(f,f)_\pi^2 \le \left(\sum_{xy\in E}(f(x)-f(y))^2\right)\left(\sum_{xy\in E}(f(x)+f(y))^2\right).$$

Itt a jobb oldal első tényezője egyszerűen (df,df). A második tényező megértéséhez bontsuk fel a zárójelet, ekkor

$$\sum_{xy\in E}(f(x)+f(y))^2 = \sum_{xy\in E} f(x)^2+f(y)^2+2f(x)f(y) =$$

$$= (f,f)_\pi + \sum_{x\in V}\left(f(x)\pi(x)\sum_{y:xy\in E}\frac{f(y)}{\pi(x)}\right) =$$

$$= (f,f)_\pi + (f,Pf)_\pi = 2(f,f)_\pi - (df,df),$$

ahol az utolsó lépésben a 9.6 Következményt használtuk. Összerakva az eddig kiszámolt részleteket azt kapjuk, hogy

$$\iota_E(G,\pi)^2(f,f)_\pi^2 \le (df,df)\cdot\left(2(f,f)_\pi-(df,df)\right).$$

Osztva $(f,f)_\pi^2$-tel, és mindkét oldalt 1-ből kivonva

$$1-\iota_E(G,\pi)^2 \ge 1-2\frac{(df,df)}{(f,f)_\pi}+\left(\frac{(df,df)}{(f,f)_\pi}\right)^2 = \left(1-\frac{(df,df)}{(f,f)_\pi}\right)^2,$$

amiből átrendezéssel

$$1-\sqrt{1-\iota_E(G,\pi)^2} \le \frac{(df,df)}{(f,f)_\pi}.$$

Mivel ez minden $f\in D_0$-ra igaz, ezért

$$1-\sqrt{1-\iota_E(G,\pi)^2} \le DS(G).$$

$\square$

Végül megvizsgáljuk, hogy mi a kapcsolat $\rho(G)$ és $DS(G)$ között. Ehhez a $P: l^2(V,\pi)\to l^2(V,\pi)$ operátor tulajdonságait kell használni.

9.10 Definíció. Egy $A: l^2(X,h)\to l^2(X,h)$ lineáris operátor normájának a

$$||A||_h = \sup_{||x||_h=1}||Ax||_h = \sup_{x\neq 0}\frac{||Ax||_h}{||x||_h} = \sup_{0\neq x\in D_0(X)}\frac{||Ax||_h}{||x||_h}$$

számot nevezzük. Az operátor korlátos, ha a normája véges.

9.11 Lemma. *A P korlátos, önadjungált operátor, melynek normája $||P||_\pi \le 1$.*

Bizonyítás. Az önadjungáltságot már korábban láttuk, most csak a $||P||_\pi \leq 1$-et kell megmutatni. Legyen $f \in l^2(V)$ olyan, hogy $||f||_\pi = 1$, azaz $\sum f(x)^2\pi(x) = 1$. Ekkor

$$(Pf, Pf)_\pi = \sum_x \pi(x) \left(\sum_{xy \in E} \frac{f(y)}{\pi(x)} \right)^2 \leq \sum_x \pi(x) \frac{\sum_{xy\in E} f(y)^2}{\pi(x)} = \\ = \sum_{xy \in E} f(y)^2 = \sum_{y \in V} \pi(y) f(y)^2 = 1,$$

ahol a becsléshez a számtani-négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget használtuk. Tehát $||P||_\pi \leq 1$. $\square$

9.12 Lemma. *A P normáját a következő képlet is előállítja:*

$$||P||_\pi = \sup \left\{ \frac{(Pf, f)_\pi}{(f, f)_\pi} : 0 \neq f \in D_0 \right\}.$$

Bizonyítás. Legyen

$$s = \sup \left\{ \frac{|(Pf, f)_\pi|}{(f, f)_\pi} : 0 \neq f \in D_0 \right\}.$$

A Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség miatt $|(Pf, f)_\pi| \leq ||Pf||_\pi ||f||_\pi \leq ||P||_\pi \cdot (f, f)_\pi$, tehát $s \leq ||P||_\pi$.

Másrészt mivel P önadjungált, ezért tetszőleges $f, g \in D_0$ esetén

$$|(Pf, g)_\pi| = \frac{|(P(f+g), f+g)_\pi - (P(f-g), f-g)_\pi|}{4} \leq \\ \leq \frac{(P(f+g), f+g)_\pi + (P(f-g), f-g)_\pi}{4} \leq \frac{s}{2}((f, f)_\pi + (g, g)_\pi).$$

Ha most a $f = tf, g = g/t$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor a bal oldal nem változik. A jobb oldal viszont $t = ||g||_\pi / ||f||_\pi$ esetén lesz minimális, méghozzá pont $s||f||_\pi ||g||_\pi$ lesz az értéke. Azt kapjuk tehát, hogy

$$|(Pf, g)_\pi| \leq s||f||_\pi ||g||_\pi.$$

Ha most $g = Pf$-et helyettesítünk, akkor

$$(Pf, Pf)_\pi \leq s||f||_\pi ||Pf||_\pi \leq s||f||_\pi^2 ||P||_\pi$$

adódik. Végül $||f||_\pi^2$-vel osztva és f-ben szuprémumot véve kapjuk, hogy $||P||_\pi^2 \leq s||P||_\pi$, azaz $||P||_\pi \leq s$, de mivel $s \leq ||P||_\pi$-t már láttuk, ezért itt egyenlőség van.

Most már csak azt kell belátni, hogy s definíciójából az abszolútértéket elhagyva a szuprémum értéke nem változik. Ehhez írjuk fel f-et $f = f_+ - f_-$ alakban, ahol $f_+, f_- \geq 0$, és $f_+ \cdot f_- = 0$. Ez a felírás egyértelmű. Ekkor

$(Pf,f)_\pi = (Pf_+,f_+)_\pi + (Pf_-,f_-)_\pi - 2(Pf_+,f_-)_\pi$. Ha $g = f_+ + f_-$, akkor egyrészt $(f,f)_\pi = (g,g)_\pi$ hiszen f_+ és f_- diszjunkt tartójúak. Másrészt $(Pg,g)_\pi = (Pf_+,f_+)_\pi + (Pf_-,f_-)_\pi + 2(Pf_+,f_-)_\pi$. Mivel $h \geq 0$ esetén $Ph \geq 0$, ezért itt minden tag nem-negatív. Tehát $|(Pf,f)_\pi| \leq (Pg,g)_\pi$, és ezért $\frac{(Pg,g)_\pi}{(g,g)_\pi} \geq \frac{|(Pf,f)_\pi|}{(f,f)_\pi}$, tehát

$$||P||_\pi = s = \sup\left\{\frac{(Pf,f)_\pi}{(f,f)_\pi} : 0 \neq f \in D_0\right\},$$

ahogy azt állítottuk.

□

9.13 Következmény. $||P||_\pi = 1 - DS(G)$, *ugyanis a 9.6 Következmény szerint*

$$\frac{(Pf,f)_\pi}{(f,f)_\pi} = \frac{(f,f)_\pi - (df,df)}{(f,f)_\pi} = 1 - \frac{(df,df)}{(f,f)_\pi},$$

tehát mindkét oldal szuprémumát véve $f \in D_0$-ra kapjuk, hogy $||P||_\pi = 1 - DS(G)$.

Az utolsó lépés a 9.1 Tétel bizonyításához $||P||_\pi$ és $\rho(G)$ összekapcsolása.

9.14 Lemma. *Legyen $p_n(x,y)$ annak a valószínűsége, hogy x-ből indulva n lépésben pont y-ba érünk. Ekkor $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n(x,y)}$ létezik, független x és y választásától, és értéke pontosan $||P||_\pi$-vel egyenlő.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van egy x-ből x_0-ba menő l hosszú és egy x_0-ból y-ba menő k hosszú út. Ekkor $p_n(x,y) \geq p_l(x,x_0) \cdot p_{n-k-l}(x_0,x_0) \cdot p_k(x_0,y)$. Ebből n-edik gyököt vonva kapjuk, hogy $\liminf \sqrt[n]{p_n(x,y)} \geq \lim \sqrt[n]{p_n}$. Másrészt $p_n(x_0,x_0) \geq p_l(x_0,x) \cdot p_{n-k-l}(x,y) \cdot p_k(y,x_0)$, és most az n-edik gyökvonás és határátmenet adja, hogy $\lim \sqrt[n]{p_n} \geq \limsup \sqrt[n]{p_n(x,y)}$. Tehát $\lim \sqrt[n]{p_n(x,y)}$ létezik, és $\rho(G)$-vel egyenlő.

Jelölje $1_x \in D_0$ azt a függvényt, melyre $1_x(x) = 1$ és $1_x(y) = 0$ ha $x \neq y$. Ekkor világos, hogy

$$p_n = p_n(x_0,x_0) = \frac{(P^n 1_{x_0}, 1_{x_0})_\pi}{(1_{x_0}, 1_{x_0})_\pi} \leq ||P^n||_\pi \leq ||P||_\pi^n,$$

tehát $\rho(G) \leq ||P||_\pi$.

Legyen most $f \in D_0$ tetszőleges. Ekkor $f = \sum_x f(x) 1_x$, tehát

$$(P^n f, P^n f)_\pi = (P^{2n} f, f)_\pi = \left(\sum_x f(x) P^{2n}(1_x), \sum_y f(y) 1_y)_\pi\right) =$$

$$= \sum_{x,y} f(x)f(y)(P^{2n}1_x, 1_y)_\pi = \sum_{x,y} f(x)f(y)\pi(y)p_{2n}(x,y).$$

A jobb oldal még mindig csak egy véges összeg hiszen csak véges sok x, y párra nem 0 az $f(x)f(y)$. A tagok száma és együtthatói ráadásul n-től függetlenek. Innen elemi analízissel következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{(P^n f, P^n f)_\pi} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{p_{2n}} = \rho(G).$$

Végül ismert, hogy önadjungált operátorra $||Pf||_\pi \leq ||P^n f||_\pi^{1/n} \to \rho$, ha $||f||_\pi \leq q$, tehát $||P||_\pi \leq \rho(G)$, és ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

A 9.1 Tétel bizonyítása: Tudjuk, hogy $\rho(G) = ||P||_\pi = 1 - DS(G)$. Másrészt azt is beláttuk, hogy $\iota_E(G,\pi)^2/2 \leq DS(G) \leq \iota_E(G,\pi)$. Tehát G pontosan akkor amenábilis, ha $\iota_E(G,\pi) = 0$ azaz $DS(G) = 0$, ami ekvivalens azzal, hogy $\rho(G) = 1$. $\square$

10 Appendix: Kompaktság és a Tyihonov tétel

10.1 Definíció (Kompaktság)**.** Az (X,τ) topologikus tér kompakt, ha nyílt halmazok bármely az egész X-et lefedő rendszeréből ki lehet választani véges sokat, ami még mindig lefedi X-et.

10.2 Definíció. Az (X,τ) topologikus térnek a $\mathcal{B} \subset \tau$ előbázisa, ha bármely $U \in \tau$ nyílt halmazra és bármely $x \in U$ pontra léteznek $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ halmazok, hogy $x \in \cap B_i \subset U$.

10.3 Tétel (Alexander előbázis tétele)**.** *Legyen $\mathcal{B} \subset \tau$ az (X,τ) topologikus tér előbázisa. Ha X bármely $\mathcal{B}$-beli fedésésből kiválasztható véges fedés, akkor X kompakt.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy X mégse kompakt, és a Zorn lemma szerint vegyünk egy maximális nyílt fedést, aminek nincs véges részfedése, legyen ez $\mathcal{C}$. Ekkor $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ nem fedheti az egész X-et, hiszen akkor mégis lenne véges részfedés. Legyen $x \in X$ egy a $\mathcal{C} \cap \mathcal{B}$ által nem fedett pont. Mivel $\mathcal{C}$ fedi X-et, ezért $x \in U\mathcal{C}$. Másrészt $\mathcal{B}$ előbázis, ezért vannak $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$, hogy $x \in \cap B_i \subset U$. Ekkor viszont bármely $1 \leq i \leq n$ esetén a $\mathcal{C} \cup B_i$ már fedi X-et, így $\mathcal{C}$ maximalitása miatt van egy véges része, ami szintén fed, legyen ez $\mathcal{C}_i \cup B_i$. Ekkor $\mathcal{C}_i$ fedi $X \setminus B_i$-t, tehát $\cup_{i=1}^n \mathcal{C}_i$ fedi $X \setminus (\cap i = 1^n B_i)$-t, tehát $\cup_{i=1}^n \mathcal{C}_i \cup U$ fedi az egész X-et. Ez viszont az egész $\mathcal{C}$-nek egy véges része, ami ellentmondás. $\square$

10.4 Definíció (Topologikus terek szorzata)**.** Ha $(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I$ topologikus terek, akkor az $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ halmazon a szorzat-topológiának előbázisa a $\{\pi_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in I, U \in \tau_\alpha\}$ rendszer, ahol $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ a vetítés.

10.5 Tétel (Tyihonov)**.** *Kompakt terek szorzata kompakt.*

Bizonyítás. Legyen az $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ térnek $\mathcal{B}$ a szorzat-topológiát definiáló előbázisa. Tegyük fel, hogy adott egy $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ fedése az X-nek, aminek nincsen véges részfedése. Álljon $\mathcal{C}_\alpha \subset \mathcal{C}$ azon elemekből, amiket az α koordinátára történő vetítésből kaptunk. Ekkor persze a $\mathcal{C}_\alpha$ rendszerből sem lehet kiválasztani véges sokat, ami X-et fedné. De mivel ezek henger-halmazok, így a $\pi_\alpha(\mathcal{C}_\alpha)$ rendszerből sem lehet véges sokat kiválasztani, ami X_α-t fedné. Viszont X_α kompakt, ami csak úgy lehet, hogy van egy $x_\alpha \in X_\alpha$ pont, amit a $\pi_\alpha(\mathcal{C}_\alpha)$ egyáltalán nem fed. Ekkor viszont az $x = (x_\alpha) \in X$ pont nem lehet lefedve a $\mathcal{C}$ rendszer által, ami ellentmondás. $\square$