Forszolás

Pintér Gergő

1. A halmazelmélet rövid története

1870-től: Cantor halmazelmélete. A halmazelmélet megalkotója Georg Cantor. Ő vette észre, hogy az, hogy valamiből végtelen sok van, több dolgot is jelenthet, különbséget lehet tenni a végtelenek között: például a racionális számok ugyanannyian vannak, mint a természetes számok (ezt nevezzük megszámlálhatóan végtelennek), viszont a valós számok többen vannak. Cantor definiálta precízen, hogy mit is jelent végtelenek között a több/kevesebb/ugyanannyi, és meghatározta a legalapvetőbb halmazok számosságát.

Például:

- Két halmaz számossága egyenlő, ha az elemeik párba állíthatóak egymással.
- Megszámlálhatóan végtelen halmazok: természetes számok; egész számok; páros számok; racionális számok; egy síkbeli, térbeli vagy tetszőleges dimenziós rács pontjai; az egész/ racionális együtthatós polinomok (és így az algebrai számok); a természetes számok véges részhalmazainak a halmaza; ...
- Kontinuum számosságú halmazok: valós számok; irracionális számok; tetszőleges (nem elfajuló) intervallum pontjai; a sík/tér/tetszőleges véges dimenziós tér pontjai; a természetes számok hatványhalmaza (összes részhalmazainak a halmaza); ...

Cantor észrevette, hogy "végtelen sok" különböző számosság van. Például tetszőleges halmaz hatványhalmaza nagyobb számosságú, mint maga a halmaz.

1900: Hilbert nevezetes problémái között első helyen szerepelt a kontinuumhipotézis. A legkisebb végtelen számosság a megszámlálhatóan végtelen, de vajon mi a következő? A kontinuumsejtés szerint a kontinuum a következő végtelen számosság, másképp fogalmazva: nincs olyan halmaz, ami nagyobb számosságú volna, mint a természetes számok halmaza, de kisebb számosságú, mint a valós számok. Ezt a sejtést azonban nem tudták bebizonyítani, és megcáfolni sem sikerült.

1901: Russel-paradoxon. Vegyük azokat a halmazokat, amik nem elemei önmaguknak. Ezen halmazok halmaza eleme-e önmagának? Formálisan: $R = \{S \mid S \notin S\}$, a kérdés az, hogy R eleme-e önmagának? Akár igennel, akár nemmel válaszolunk, ellentmondást kapunk. Ez a paradoxon állítólag Zermelotól származik.

Nem ez volt az első ellentmondás a halmazelméletben, pár évvel azelőtt Cantor is rájött, hogy "az összes számosságok halmaza" is ellentmondáshoz vezet. Más paradoxonok is megjelentek akkoriban.

Az ellentmondások kiküszöbölésére több független project is létrejött, a legsikeresebb a halmazelmélet axiomatikus alapokra helyezése lett. E szerint a megközelítés szerint a paradoxonok gyökere az, hogy Cantor "naív" halmazelméletet csinált. Nem rögzítette le előre, hogy egyáltalán milyen halmazokat lehet gyártani. Tetszőleges "összesség" halmaznak számított, ezért nyílt lehetőség önhivatkozó konstrukciók gyártására, amik aztán ellentmondásra vezettek.

A ZFC-axiómarendszer az 1920-as évekre kezdett összeállni. Ez az axiómarendszer végül is egy receptgyűjtemény, hogy már meglévő halmazokból hogyan lehet újakat gyártani. Emellett mindössze egy halmaz létezését garantálja feltételek nélkül. Az ellentmondásokat ezzel úgy szünteti meg, hogy az ellentmondást okozó halmazok egyszerűen nem halmazok: immár tétel, hogy nem létezik az összes halmazok halmaza, az összes számosságok halmaza, az önmagukat nem tartalmazó halmazok halmaza stb.

Ez a megoldás talán erőltetettnek tűnhet, de nem az: valójában a ZFC axiómarendszerben az egész matematikát föl lehet építeni, vagyis minden halmazt megenged, amire szükségünk van.

Persze hátra volt még annak a bizonyítása, hogy a ZFC ellentmondásmentes. Azt is szerették volna bebizonyítani, hogy ez az axiómarendszer teljes, vagyis tetszőleges halmazelméleti állításról eldönthető, hogy igaz-e vagy sem (vagyis bármilyen állítást be lehet bizonyítani vagy meg lehet cáfolni). Ez adta az akkoriban születő matematikai logika fő motivációját.

A Kiválasztási axióma körüli viták. Zermelo 1904-ben bizonyította a Jólrendezési tételt, amely szerint minden halmaz jólrendezhető. A tétel bizonyításához kimondta és felhasználta a Kiválasztási axiómát, ami a támadások középpontjába került: előfordulhat, hogy ez az axióma hozza be az ellentmondásokat a halmazelméletbe? Zermelo válaszul megmutatta, hogy a Kiválasztási axiómát hallgatólagosan eddig is használták, az analízis legalapvetőbb tételeihez is szükség van rá (vagy gyengébb változataira). Végül az érdek győzedelmeskedett: az 1920-as években Kuratovsky által fölfedezett Zorn-lemmáról kiderült, hogy ekvivalens a Kiválasztási axiómával, és a matematika legkülönbözőbb területein nélkülözhetetlennek bizonyult a lemma, így kénytelenek voltak elfogadni a Kiválasztási axiómát is.

1930-as évek: Gödel teljességi és nemteljességi tételei. A matematikai logika legfontosabb eredményei. A teljességi tétel szerint ha egy állítás következménye egy axiómarendszernek, akkor bizonyítható is. Ez jó, ezt vártuk, hogy így legyen: ami igaz, azt be lehet bizonyítani. Egy másik megfogalmazás már picit meglepőbb: ha egy axiómarendszer ellentmondásmentes, akkor van modellje, vagyis olyan halmaz a megfelelő függvényekkel és relációkkal ellátva, amelyre igazak az axiómák. A nemteljességi tételek kicsit megrázóbbak: ha egy axiómarendszer ellentmondásmentes és megfelelően erős, akkor biztosan fellép benne eldönthetetlen állítás (vagyis olyan állítás, hogy sem ő, sem a tagadása nem bizonyítható az adott axiómarendszerben). A második nem teljességi tétel szerint pedig maga az ellentmondásmentesség(nek valamiképpen megfelelő formula) ilyen, azaz ha egy megfelelően erős axiómarendszer ellentmondásmentes, akkor a rendszeren belül nem bizonyítható az ellentmondásmentessége.

1941: Gödel speciális modellje. Feltételezve, hogy a halmazelmélet (vagyis a ZFC axiómarendszer) ellentmondásmentes, azaz van valamilyen modellje, Gödel legyártott egy másik modellt, amiben automatikusan teljesül a kontinuumhipotézis és a Kiválasztási axióma. Ezzel belátta, hogy a Kiválasztási axióma nem hoz ellentmondást a rendszerbe: ha többi axióma (ZF) ellentmondásmentes, akkor a Kiválasztási axióma hozzávételével (ZFC) is az marad. Másrészt pedig a kontinuumhipotézis sem vezet ellentmondásra, vagyis két dolog lehetséges: vagy be lehet bizonyítani, vagy független ZFC-től. Az az egy nem fordulhat elő, hogy a kontinuumhipotézis ellenkezőjét be lehet bizonyítani.

1963: Paul Cohen fölfedezte a forszolást. Ezzel az új eljárással bebizonyította, hogy a kontinuumhipotézis független a ZCF axiómarendszertől: se ő, se a tagadása nem bizonyítható és nem vezet ellentmondásra. A forszolás a halmazelmélet egészen új fejezetét nyitotta meg, kiderült, hogy ennek segítségével rengeteg állításról be lehet bizonyítani, hogy nem vezet ellentmondásra. Ezek legtöbbje halmazelméleti illetve valós függvénytani állítás.

2. A halmazelmélet axiómái

2.1. A ZFC axiómarendszer (Zermelo-Fraenkel + Axiom of choice)

A halmazelmélet nyelve egy darab relációjelből, az $\in$ jelből áll. Ez azt jelenti, hogy az axiómák logikai jelekből ($\wedge$: és, $\vee$: vagy, $\forall$: minden, $=$: egyenlő stb.) és az $\in$ jelből álló formulák. Minden változójel halmazt jelöl, más objektumokra nincsen szükség.

1. **Meghatározottsági axióma:** Ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor a két halmaz megegyezik.
$$\forall x \forall y\, (\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

2. **Pár axióma:** Tetszőleges két halmazhoz van olyan halmaz aminek pontosan ezek az elemei.
$$\forall x \forall y \exists z(w \in z \leftrightarrow (w = x \lor w = y))$$
Azaz minden x, y halmazhoz létezik a $z = \{x, y\}$ halmaz.

3. **Unió axióma:** Halmaznyi sok halmaz uniója is halmaz.
$$\forall x \exists y(z \in y \leftrightarrow (\exists w(z \in w \land w \in x)))$$
Azaz minden x halmazhoz létezik az $y = \cup x = \bigcup_{w \in x} w$ halmaz, az x (elemeinek az) uniója.

4. **Hatványhalmaz axióma:** Egy halmaz összes részhalmazainak a halmaza is halmaz.
$$\forall x \exists y(z \in y \leftrightarrow (\forall w(w \in z \to w \in x)))$$
Azaz minden x halmazhoz létezik $y = \mathcal{P}(x) = \{z \mid z \subseteq x\}$, az x hatványhalmaza.

5. **Részhalmaz axiómaséma:** Egy halmaz bizonyos tulajdonságú elemei halmazt alkotnak.
Minden ϕ formulára:
$$\forall \vec{p}\ \forall x \exists y(z \in y \leftrightarrow (z \in x \land \phi(z, \vec{p})))\ .$$
Azaz (a $\vec{p}$ paraméterek tetszőleges rözítése mellett) minden x halmazhoz létezik
$y = \{z \in x \mid \phi(z, \vec{p})\}$, az x "ϕ tulajdonságú" elemeinek a halmaza.

Ezen a ponton érdemes bevezetni a függvény fogalmát. Definiáljuk először a *rendezett párt*: $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, vagy bármi olyan kifejezés megfelel, amellyel $(x, y) = (z, w) \leftrightarrow (x = z \land y = w)$ teljesül. Egy f halmaz *függvény*, ha minden eleme rendezett pár és minden x-hez legföljebb egy olyan y van, amellyel $(x, y) \in f$. Szokásosabb írásmódban: $f(x) = y$. Az külön bizonyítást igényel, és az eddig fölsorolt axiómákból következik, hogy egy függvény értelmezési tartománya és értékkészlete is halmaz.

Vannak olyan hozzárendelések, amik nem fügvények, mert az értelmezési tartományuk nem halmaz, például a mindenen értelmezett $x \mapsto \{x\}$. Ezeket *operációknak* nevezzük.

6. **Pótlás axiómaséma:** Egy operációt halmazra megszorítva függvényt kapunk. (Másképpen: egy halmaz operációnál vett képe is halmaz.)
Minden $\phi(z, w, \vec{p})$ formulára:
$$\forall \vec{p}\, (\forall z \exists! w \phi(z, w, \vec{p}) \to\ \forall x \exists y(w \in y \leftrightarrow \exists z(z \in x \land \phi(z, w, \vec{p}))))\ .$$
Azaz, ha a ϕ formula a $\vec{p}$ paraméterekkel operációt definiál, akkor minden x halmaznak ezen operáció szerinti képe, $y = \{w \mid \exists z \in x, \text{ hogy } \phi(z, w, \vec{p})\}$ is halmaz.

7. **Végtelenségi axióma:** Van végtelen halmaz.
$$\exists x\, (\exists w(w \in x \land \forall z(z \notin w)) \land \forall w(w \in x \to \exists z(z \in x \land (y \in z \leftrightarrow (y \in w \lor y = w)))))$$
Azaz létezik az $x = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots\}$ halmaz, a természetes számok halmazának Neumann-féle modellje ($0 = \emptyset$, $n + 1 = \{0, 1, 2, \ldots, n\} = n \cup \{n\}$).

8. **Jólfundáltsági axióma:** Minden nem üres halmaznak van tőle diszjunkt eleme.
$$\forall x\, (\exists w(w \in x) \to \exists y(y \in x \land \forall z(z \notin x \lor z \notin y)))$$

9. **Kiválasztási axióma:** Ha egy halmaz elemei nem üres halmazok, akkor van olyan függvény, amely mindegyikükből kiválaszt egy elemet.
$$\forall x\, (\forall y(y \in x \to \exists z(z \in y)) \to \exists f((f : x \to \cup x \text{ függvény}) \land \forall y(y \in x \to f(y) \in y)))$$

2.2. Megjegyzések

- Ez végtelen sok axióma: a két axiómaséma minden formulára egy-egy axióma, formulákból pedig (megszámlálhatóan) végtelen sok van.
- A Részhalmaz axiómaséma következik a Pótlásból, tehát azt fölösleges külön föltenni.
- Ha azonban mégis föltesszük, akkor az Unió, a Hatványhalmaz és a Pótlás axiómákat is gyengíthetjük: elég az ezen axiómákban szereplő y-nál bővebb halmaz létezését föltenni, hiszen ebből már következik az y létezése is a Részhalmaz axiómaséma miatt.
- A Pótlás és a Részhalmaz axiómasémákban a $\vec{p}$ több változót jelöl(het), ezek úgymond paraméterek. Bizonyos tulajdonságoknak eleget tevő halmazok "összességét" *osztálynak* nevezzük, vagyis egy adott $\phi(x, \vec{p})$ formulát (rögzített paraméterértékek mellett) kielégítő x-ek osztályt alkotnak. A Részhalmaz axiómasémát így is fogalmazhatjuk: halmaz és osztály metszete halmaz.
- Egyetlen axióma van, amely egy halmaz létezését mondja ki, a végtelenségi axióma. A többi axióma (a Meghatározottság kivételével) mind arról szól, hogy már meglévő halmazokból milyen új halmazokat lehet előállítani.
- A Jólfundáltság csak egy technikai föltevés, ezzel kizárjuk például azt, hogy egy halmaz eleme lehessen önmagának, vagy hogy $x \in y$ és $y \in x$ is fönnállhasson.
- A kumulatív hierarchia: minden rendszámhoz definiálunk egy halmazt. $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ és $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$, ha α limeszrendszám. A Jólfundáltsági axióma ekvivalens azzal, hogy minden halmaz benne van a kumulatív hierarchiában, vagyis minden x-hez van olyan α rendszám, hogy $x \in V_\alpha$. Másképp szólva, minden halmaz fölépíthető az üres halmazból.

3. Forszolás: hozzávalók

$(M, \in)$ **megszámlálható tranzitív epszilon-modellje ZFC-nek**. Azaz:

- $(M, \in)$ *ZFC-modell*: M egy halmaz, $\in$ egy 2-változós reláció M-en, amely teljesíti a ZFC axiómákat (szokásos jelölés: $(M, \in) \models$ ZFC). Szemléletesen $(M, \in)$ egy olyan gráf, amelyre teljesülnek a ZFC formulákban megfogalmazott gráftulajdonságok. (Gödel teljességi tétele szerint ilyen létezik, ha ZFC ellentmondásmentes.)
- $|M| = \aleph_0$. (Megszámlálható modell a leszálló Löwenheim-Skolem tétel miatt van.)
- $(M, \in)$ *epszilon-modell*: $\in$ az "eleme" reláció M elemei között.
- $(M, \in)$ *tranzitív*: ha $x \in M$ és $y \in x$, akkor $y \in M$. (Az utolsó két feltevés jogosságát nehezebb garantálni.)

A feltevésekből következik például, hogy M minden eleme megszámlálható halmaz.

Kényszerképzet: egy $(P, \leq) \in M$ részbenrendezett halmaz, amelynek van legnagyobb eleme (ezt 1-gyel jelöljük), és nincs minimális eleme.

Praktikus elnevezések: $(p, q \in P)$ $p \leq q$: p *kiterjeszti* q-t. p és q *kompatibilisek*, ha van közös kiterjesztésük, és *inkompatibilisek*, ha nincs. P *elágazó*, ha minden elemnek vannak inkompatibilis kiterjesztései. $S \subset P$ *sűrű halmaz*, ha minden $p \in P$-hez van olyan $q \in S$, hogy $q \leq p$.

$G \subset P$ **generikus filter**, ha

- G *fölszálló*: ha $p \in G$ és $p \leq q$, akkor $q \in G$.
- G *kompatibilis*: ha $p \in G$ és $q \in G$, akkor van $r \in G$, hogy $r \leq p$ és $r \leq q$

- G *generikus*: minden M-beli sűrű halmazba belemetsz, vagyis, ha $S \in M$, $S \subset P$ sűrű, akkor $S \cap G \neq \emptyset$.

Generikus filter mindig létezik: M-ben csak megszámlálható sok sűrű részhalmaza van P-nek, ezek $S_0, S_1, S_2, \ldots$. Válasszunk ki ezekből sorban $p_i \in S_i$ elemeket úgy, hogy $p_i \leq p_j$, ha $i \geq j$. Ezt a halmazok sűrűsége miatt megtehetjük. Könnyű ellenőrizni, hogy $\{q \in P \mid \exists i\ q \geq p_i\} \subset P$ generikus filter.

Azonban, ha P elágazó, akkor nincs M-beli generikus filter. Tegyük fel indirekt, hogy van: $G \in M$, $G \subset P$ generikus filter. Minden $p \in P$ elemnek vannak inkompatibilis kiterjesztései, válasszunk egy ilyen párt, mondjuk p_1 és p_2. Közülük legföljebb egy lehet G-ben. Gyártsuk le a következő halmazt: egy elemet beveszünk, ha az valamilyen $p \in P$ elem kiválasztott inkopatibilis kiterjesztései közül a nem G-beli. Ezzel egy M-beli sűrű halmazt kapunk, ami diszjunkt G-től, ez ellentmondás.
Precízebben: Legyen N_p a $p \in P$ elem inkompatibilis kiterjesztéseinek a halmaza, vagyis $\{p_1, p_2\} \in N_p$, ha p_1 és p_2 inkompatibilis kiterjesztései p-nek. A Kiválasztási axióma szerint van $f \in M$, $f : P \to \bigcup_{p \in P} N_p$ függvény, hogy $f(p) \in N_p$. Ekkor az

$$S = \{q \in P \mid q \notin G \text{ és } \exists p \in P \text{ és } \exists r \in P : \ \{q, r\} \in f(p)\} \subset P$$

sűrű halmaz, a definíciója miatt M-beli és $S \cap G = \emptyset$.

Bővítés: Ha van egy $(P, \leq) \in M$ elágazó kényszerképzet, abban egy $G \subset P$ generikus filter, ezzel bővíthetjük a modellt: $M[G]$.

- $\tau \in M$ *név*, ha τ minden eleme (σ, p) alakú, ahol $\sigma \in M$ név és $p \in P$.
- $\tau^G = \{\sigma^G \mid \exists p \in G : \ (\sigma, p) \in \tau\}$ a τ által a G szerint elnevezett halmaz. (Ezek a definíciók kumulatív hierarchia szerinti transzfinit rekurzióval értelmesek.)
- $M[G] = \{\tau^G \mid \tau \in M \text{ név}\}$.

$M[G]$ valóban egy bővebb halmaz és tartalmazza G-t:

- $M \subset M[G]$, mert ha $x \in M$, az $\hat{x} = \{(\hat{y}, 1) \mid y \in x\}$ az x egy neve (vagyis $\hat{x}^G = x$).
- $G \in M[G]$, mert $\dot{G} = \{(\hat{p}, p) \mid p \in P\}$ a G egy neve.

$M[G]$ egy új megszámlálható tranzitív epszilon-modell, az egyetlen nem triviális dolog, hogy $M[G]$-ben valóban teljesülnek a ZFC axiómák. Persze néhány axióma teljesülése nyilvánvaló, például a Meghatározottság és a Végtelenségi axióma automatikusan teljesül. És van, amit könnyű igazolni, például a Pár axiómát: ha $x, y \in M[G]$ az azt jelenti, hogy vannak $\sigma, \tau \in M$ nevek, hogy $\sigma^G = x$ és $\tau^G = y$. Az $\{x, y\}$ halmaz egy neve $\{(\sigma, 1), (\tau, 1)\} \in M$, ezért $\{x, y\} \in M[G]$. A többi axiómát a *"forszolja"* reláció segítségével lehet bizonyítani (de erre itt nem fog sor kerülni).

Legyen ϕ egy k változós halmazelméleti formula. Azt mondjuk, hogy a $p \in P$ elem **forszolja** a ϕ formulát a $\tau_1, \ldots, \tau_k$ nevekkel, ha $p \in G$ esetén az $M[G]$ modellben igaz $\phi(\tau_1^G, \ldots, \tau_k^G)$.
Jelölése: $p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_k)$.

A legfontosabb tulajdonságok:

- $M[G] \models \phi(\tau_1^G, \ldots, \tau_k^G)$ pontosan akkor, ha van $p \in G$, hogy $p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_k)$. Vagyis, ha $M[G]$-ben igaz egy formula, akkor van olyan eleme G-nek, ami ezt forszolja.
- Az, hogy "$p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_k)$", M-ben definiálható. Ez precízen azt jelenti, hogy minden ϕ k-változós halmazelméleti formulához van egy Φ $(k+2)$-változós halmazelméleti formula, hogy $\Phi(P, p, \tau_1, \ldots, \tau_k)$ pontosan akkor igaz M-ben, ha $p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_k)$.
- Ha $p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ és $q < p$, akkor $q \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_k)$.

- Ha $p \Vdash \phi \vee \psi$, akkor van $q < p$, hogy $q \Vdash \phi$ vagy $q \Vdash \psi$.

A második tulajdonság voltaképp a forszolás főtétele. A bizonyítása magasan meghaladja e cikk kereteit és hivatását. Az első és a negyedik tulajdonság a második bizonyítása során kijön, a harmadik pedig közvetlenül adódik a definícióból, hiszen, ha q eleme egy generikus filternek, akkor - a generikus filter felszállósága miatt - a nála nagyobb p is.

Az első két állítást úgy lehet összefoglalni, hogy a forszolás segítségével M-ből irányítható, hogy mik lesznek az igaz állítások $M[G]$-ben.

4. Rendszámok és számosságok

Rendszámok: A természetes számok Neumann-féle modellje szerint $0 = \emptyset$, $n + 1 = n \cup \{n\}$. Ennek az általánosításával kapjuk a rendszámokat: $\alpha = \{\beta \mid \beta \leq \alpha\}$. (Ez az összefüggés definíciónak nem alkalmas!)

Rendszámok például: a természetes számok, a természetes számok halmaza: $\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega\}$, $\omega \cdot 2 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots\}$,
$\omega^2 = \omega \cdot \omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \omega \cdot 2 + 3, \ldots, \ldots\}$.

Két fontos tulajdonságuk:

- A rendszámok nem alkotnak halmazt. *Osztályt* alkotnak.
- "Minimalitás": tetszőleges tulajdonságú rendszámok között van legkisebb.

Az rendszámok igazi definíciója:

1. Egy $(H, <)$ rendezett halmaz *jólrendezett*, ha minden $K \subset H$ részhalmaznak van legkisebb eleme. Ez ekvivalens azzal, hogy nincsen H elemeiből álló $h_0 > h_1 > h_2 > \ldots$ végtelen csökkenő lánc.
2. α *rendszám*, ha $(\alpha, \in)$ jólrendezett és tranzitív ($\gamma \in \beta \in \alpha \to \gamma \in \alpha$).
3. Be lehet látni, hogy minden $(H, <)$ jólrendezett halmazhoz egyértelműen létezik olyan α rendszám, hogy $(\alpha, \in)$ és $(H, <)$ izomorfak (vagyis van köztük rendezéstartó bijekció). Így egy rendszám "izomorf jólrendezett halmazok közös tulajdonsága".
   Természetesen teljesül, hogy $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$.

Számosságok: A véges számosságok a természetes számok. A megszámlálhatóan végtelen azonosítható ω-van: $\aleph_0 = \omega$. A jólrendezési tétel szerint minden halmaz jólrendezhető, tehát van nem-megszámlálható rendszám, így a minimalitás miatt van legkisebb nem-megszámlálható rendszám, ez a következő számosság: $\aleph_1 = \omega_1 = \{\alpha \mid \alpha \text{ rendszám és } |\alpha| = \aleph_0\}$.
Ugyanígy képezhetők az $\aleph_1 = \omega_1$, $\aleph_2 = \omega_2$, $\ldots$, $\aleph_\omega = \omega_\omega$ stb. számosságok (és rendszámok, amivel azonosítjuk őket).

Általában a κ rendszám *számosság*, ha κ nagyobb számosságú az összes nála kisebb rendszámnál. Vagyis ha $\alpha < \kappa$ esetén nincsen $\kappa \to \alpha$ injekció (nincs $\alpha \to \kappa$ szürjekció).

Egy H halmaz *számossága* az a legkisebb κ rendszám, amelyhez van a H-nak olyan jólrendezése, amelynek a rendszáma éppen κ. Vagyis H lehetséges jólrendezéseinek a rendszámai közül a legkisebb. A jólrendezési tétel és a rendszámok minimalitási tulajdonsága miatt ez értelmes definíció, és könnyű meggondolni, hogy ez a κ rendszám valóban számosság. Ez összhangban van a Cantor-féle "naív" definícióval: ha a H és K halmazok *egyenlő számosságúak* (ami nem jelent többet, mint hogy van $H \to K$ bijekció), akkor H számossága egyenlő K számosságával. (Vigyázat, ez nem tautológia!)

Rendszámok és számosságok M-ben: M minden eleme megszámlálható halmaz, így a rendszámok is. A rendszámok definíciója és a modellre tett föltevések miatt viszont az M-beli rendszámok a rendszámok egy kezdőszeletét alkotják, vagyis $\{M\text{-beli rendszámok}\} = \{\beta \mid \beta \text{ rendszám és } \beta < \alpha_0\}$

valamilyen α_0 megszámlálható rendszámmal. Az M-beli rendszámok közül azok a számosságok, amiknek nincs injekciója M-ben náluk kisebb rendszámba:
A $\kappa < \alpha$ rendszám számosság M-ben, ha $\beta < \kappa$ és $f : \kappa \to \beta$ injekció esetén $f \notin M$. A természetes számok és ω ugyanazok M-ben, mint a valóságban, viszont ω_1 már biztos, hogy nem az, hiszen a valódi ω_1 benne sincs M-ben.

Belátható, $M[G]$-ben ugyanazok a rendszámok, mint M-ben, vagyis a bővítés során új rendszám nem kerül be a modellbe. A számosságok viszont változhatnak, hiszen egy $\kappa \in M$ számosság megszűnik számosság lenni ("meghal"), ha a bővítés során bekerül a modellbe egy $f : \kappa \to \beta$ injekció valamilyen $\beta < \kappa$ rendszámba. Új számosság viszont nem keletkezhet: ha egy β rendszám nem számosság M-ben, akkor az ezt mutató $\beta \to \gamma$ injekció $M[G]$-ben is mutatja, hogy β nem számosság.

5. A kontinuumhipotézis és a tagadása

A kontinuum számosságra úgy gondolhatunk, mint a természetes számok hatványhalmazának a számosságára: $c = |\mathcal{P}(\omega)| = |\{x \mid x \subset \omega\}|$. Természetesen $c > \aleph_0$, vagyis $c \geq \aleph_1$. A kontinuumhipotézis (a továbbiakban: KH) szerint nincs olyan számosság, ami nagyobb, mint a megszámlálhatóan végtelen, és kisebb, mint a kontinuum. Vagyis c az $\aleph_0$ után következő számosság: $c = \aleph_1$.

Be szeretnénk bizonyítani, hogy a KH nem bizonyítható és nem is cáfolható a ZFC axiómarendszerben. Gödel teljességi tétele alapján ezt úgy tehetjük meg, ha keresünk egy olyan ZFC-modellt, amelyben teljesül a KH, és egy olyat is, amelyben nem teljesül. Ezeket a modelleket egy tetszőleges M megszámlálható tranzitív epszilon-modellből kiindulva gyártjuk le forszolással.

Tegyük fel, hogy M-ben nem teljesül a KH, vagyis M-ben $c > \aleph_1$. Szeretnénk egy bővebb modellt úgy, hogy abban már teljesüljön, mit kell tennünk? Tudjuk, hogy az M-beli c és az M-beli $\aleph_1$ valójában megszámlálható rendszámok, ezért van közöttük egy bijekció (ami persze nincs M-ben). Tehát azt kellene elérnünk, hogy egy ilyen bijekció bekerüljön a bővebb modellbe, ezzel a kontinuumot *leomlasztjuk* $\aleph_1$-re.

Most tegyük fel, hogy M-ben teljesül a KH, vagyis M-ben $c = \aleph_1$. Mit kellene tennünk, hogy a bővebb modellben a kontinuum nagyobb legyen? Az M-beli c az M-beli $\mathcal{P}(\omega)$ számossága. Az M-beli $\mathcal{P}(\omega)$ pedig ω M-beli részhalmazainak a halmaza. Semmiképpen sem tartalmazhatja ω összes részhalmazát, hiszen - mint minden M-beli halmaz - valójában megszámlálható. Ezért az a terv, hogy az új modellbe bevesszük ω-nak jó sok nem M-beli részhalmazát, ezzel a kontinuumot *földuzzasztjuk*.

5.1. A KH forszolása

Megadjuk, hogy mi legyen a kényszerképzet:

$$P = \{p : \omega_1 \to c \text{ megszámlálható tartójú parciális függvények}\} =$$

$$= \{p \mid p \text{ függvény}, D_p \subset \omega_1, |D_p| \leq \aleph_0, R_p \subset c\} \ .$$

Itt ω_1 és c a megfelelő M-beli halmazokat jelölik, és a definíció is az M modellben értendő. Meg kell adni a rendezést is: $p \leq q$, ha p, mint függvény, kiterjeszti q-t (vagyis $D_q \subset D_p$ és $p|_{D_q} = q$).

Az így definiált $(P, \leq)$ eleme M-nek a konstrukció miatt. És kényszerképzet, vagyis $\leq$ részbenrendezés, nincs minimális elem (hiszen tetszőleges p megszámlálható tartójú függvényt ki tudunk terjeszteni egy $\beta \in \omega_1 - D_p$ elemre), és van legnagyobb elem: $\emptyset \in P$, az üresfüggvény.

Sőt, minden elemnek vannak inkompatibilis kiterjesztései is, vagyis $(P, \leq)$ elágazó. Vizsgáluk meg, mit jelent, hogy két elem, p és q kompatibilisek (azaz van közös kiterjesztésük)! A kiterjesztés egy $D_p \cup D_q$-nál bővebb halmazon értelmezett függvény, amely D_p-re megszorítva megyegyezik p-vel, D_q-ra megszorítva pedig q-val. Ilyennek a létezése ekvivalens azzal, hogy $p|_{D_p \cap D_q} = q|_{D_p \cap D_q}$, vagy másképpen azzal, hogy $p \cup q$ is függvény.

Vegyünk egy $G \subset P$ generikus filtert, és gyártsuk le az $M[G]$ bővebb modellt. Legyen $F = \bigcup G \in M[G]$ a generikus filter elemeinek az uniója.

Állítás: $F : \omega_1 \to c$ szürjekció.

Bizonyítás:

1. F függvény, hiszen G elemei kompatibilisek (mivel G filter), így az uniójuk függvény.
2. $D_F = \omega_1$. Ennek a bizonyításához belátjuk, hogy minden $\alpha \in \omega_1$ rendszámra az
$$S_\alpha = \{q \in P \mid \alpha \in D_q\} \in M$$
halmaz sűrű P-ben. Vagyis minden $p \in P$ függvénynek vagy olyan kiterjesztése, aminek az értelmezési tartományában benne van α. Így már nyilvánvaló: vagy p maga értelmezve van α-ban, vagy, ha nincs, kiterjeszthetjük α-ra tetszőleges c-beli értékkel (és természetesen a tartója megszámlálható marad). Mivel G generikus, minden M-beli sűrű halmazba belemetsz, speciálisan az S_α halmazokba is, így az unió minden $\alpha \in \omega_1$ rendszámon értelmezett.
3. $R_F = c$. Ugyanúgy, mint az előbb: minden $\beta \in c$ rendszámra definiálhatjuk a
$$Z_\beta = \{q \in P \mid \beta \in R_q\} \in M$$
halmazokat, ezek sűrűek P-ben (hiszen tetszőleges $p \in P$-t kiterjeszthetünk egy $\alpha \in \omega_1 - D_p$ rendszámra úgy, hogy az α-ban fölvett értéke β legyen), így G mindegyik Z_β-ba belemetsz, ezért az unió értékkészlete az egész c.

$M[G]$-ben tehát van egy szürjektív leképezésünk ω_1-ről c-re, ami azt jelenti, hogy $M[G]$-ben $c \leq \omega_1$. Ez a következtetés (valamilyen értelemben) helyes is, de ezzel nem vagyunk kész! Ugyanis c és ω_1 az M-beli c illetve az M-beli ω_1: c az M-beli $\mathcal{P}(\omega)$ M-beli számossága, ω_1 pedig a legkisebb olyan rendszám, aminek M-ben nincsen bijekciója ω-ra. "$c \leq \omega_1$" tehát mindössze azt fejezi ki, hogy az M-beli c szerepét játszó rendszám $M[G]$-beli számossága legfeljebb akkora, mint az M-beli ω_1 szerepét játszó rendszám $M[G]$-beli számossága! Hogy viszonyulna ezek az $M[G]$-beli c-hez és ω_1-hez?

- $\omega_1^{(M[G])} \geq \omega_1^{(M)}$. Nagyobb úgy tud lenni, ha a bővítés során bekerül egy $\omega_1^{(M)} \to \omega$ bijekció.
- $\mathcal{P}^{(M[G])}(\omega) \supset \mathcal{P}^{(M)}(\omega)$. Szigorúan bővebb úgy tud lenni, ha a bővítés során bekerülnek ω-nak új részhalmazai.
- Ha $\mathcal{P}^{(M[G])}(\omega) = \mathcal{P}^{(M)}(\omega)$, akkor $c^{(M[G])} \leq c^{(M)}$. Hiszen $c^{(M)}$ az a legkisebb κ rendszám, amihez van M-beli $f : \mathcal{P}^{(M)}(\omega) \to \kappa$ bijekció. Ez az f $M[G]$-ben is ott van, tehát $|\mathcal{P}^{(M[G])}(\omega)| \leq \kappa$.

Tehát elég belátnunk, hogy a bővítés során nem kerülnek be a modellbe ω-nak új részhalmazai. Ekkor ugyanis
$$\omega_1^{(M[G])} \leq c^{(M[G])} \leq c^{(M)} \leq \omega_1^{(M)} \leq \omega_1^{(M[G])} ,$$
vagyis mindenhol egyenlőség áll, és az első egyenlőség szerint $M[G]$-ben teljesül a KH.

Állítás: Ha $A \in M[G]$, $A \subset \omega$, akkor $A \in M$.

Bizonyítás: $A \in M[G]$ azt jelenti, hogy van olyan $\tau \in M$ név, hogy $\tau^G = A$. $M[G] \models (A \subset \omega)$, ezért van $p \in G$, hogy $p \Vdash (\tau \subset \hat{\omega})$. (Lásd a "bővítés" és a "forszolja" hozzávalók definícióit). Belátjuk, hogy az
$$S = \{q \in P \mid \exists X \in M : \; q \Vdash (\hat{X} = \tau)\}$$
halmaz M-beli és – ha nem is sűrű, de – sűrű p alatt, ami azt jelenti, hogy minden $q \leq p$-hez van $r \leq q$, hogy $r \in S$. Ekkor az $S' = S \cup \{q \in P \mid p \text{ és } q \text{ inkompatibilisek}\}$ halmaz könnyen láthatóan sűrű, ezért G belemetsz. De akkor G az S-be metsz bele, mert nem tartalmazhat p-vel inkompatibilis elemet. Ha pedig $q \in S \cap G$, $q \Vdash (\hat{X} = \tau)$, akkor $M[G]$-ben $A = \tau^G = X$, ezért $A \in M$, tehát készen leszünk.

$S \in M$ azért igaz, mert S a P M-beli halmaz "$\Vdash$" segítségével definiált részhalmaza, és "$\Vdash$" M-ben definiálható. (Jegyezzük meg, hogy S definíciójában "$\exists X \in M$" helyett írhaunk egyszerűen "$\exists X$"-et, hiszen M-beli definíció esetén a kvantor automatikusan M elemein fut.)

A sűrűséghez legyen $q \leq p$, találnunk kell egy megfelelő r-et. $q \Vdash [(\hat{0} \in \tau) \vee (\hat{0} \notin \tau)]$, hiszen $(0 \in A) \vee (0 \notin A)$ minden modellben igaz. A "forszolja" tulajdonságai szerint ekkor van $q_0 \leq q$, hogy $q_0 \Vdash (\hat{0} \in \tau)$ vagy $q_0 \Vdash (\hat{0} \notin \tau)$. Persze $q_0 \Vdash [(\hat{1} \in \tau) \vee (\hat{1} \notin \tau)]$, ezért van $q_1 \leq q_0$, hogy $q_1 \Vdash (\hat{1} \in \tau)$ vagy $q_1 \Vdash (\hat{1} \notin \tau)$. Így indukcióval legyárthatjuk a $q \geq q_0 \geq q_1 \geq q_2 \ldots$ elemeit P-nek úgy, hogy minden $n \in \omega$-ra $q_n \Vdash (\hat{n} \in \tau)$ vagy $q_n \Vdash (\hat{n} \notin \tau)$. Maga a (q_n) sorozat M-beli, hiszen a definíciójában felhasznált összes fogalom M-beli (vagyis a sorozatot M-ben definiáltuk). Legyen $r = \bigcup_{n \in \omega} q_n$, és legyen

$$X = \{n \in \omega \mid r \Vdash (\hat{n} \in \tau)\} .$$

Belátjuk, hogy ez jó lesz. $X \in M$ a definíciója miatt. $r \leq q_n$ teljesül minden n-re. Ezért minden n-re $r \Vdash (\hat{n} \in \tau)$ vagy $r \Vdash (\hat{n} \notin \tau)$, és $r \Vdash (\tau \subset \hat{\omega})$, mert $r \leq p$. Tehát ha r bekerül egy $G' \subset P$ generikus filterbe, akkor az $M[G']$-ben $\tau^{G'}$-nek ugyanazok az elemei, mint X-nek, vagyis $r \Vdash (\tau = \hat{X})$. Így $r \in S$, és ezzel készen vagyunk.

Megjegyzés: Ez a bizonyítás egy általánosabb koncepció része. Egy kényszerképzet κ*-teljes*, ha minden legfeljebb κ számosságú láncnak van alsó korlátja. A KH forszolása során használt kényszerképzet ω-teljes, ezért tudtuk bebizonyítani, hogy ω-nak nem keletkeznek új részhalmazai. Teljesen analóg módon belátható, hogy ha egy kényszerképzet κ-teljes, akkor a bővítés során nem kerülnek be a modellbe κ-nak új részhalmazai. Továbbá minden κ^+-nál nem nagyobb számosság számosság marad az új modellben.

5.2. A KH tagadásának a forszolása

Legyen a kényszerképzet

$$P = \{p : \omega_2 \times \omega \to \{0,1\} \text{ véges tartójú parciális függvények}\} =$$

$$= \{p \mid p \text{ függvény}, D_p \subset \omega_2 \times \omega, |D_p| < \aleph_0, R_p \subset \{0,1\}\} ,$$

a rendezés pedig: $p \leq q$, ha p, mint függvény kiterjeszti q-t ($p \supset q$).

Ezzel egy $(P, \leq) \in M$ kényszerképzetet definiáltunk, ugyanúgy, mint a KH forszolásánál.

Legyen $G \subset P$ egy generikus filter, $M[G]$ a bővebb modell és $F = \bigcup G \in M[G]$ a generikus filter elemeinek az uniója.

Állítás: $F : \omega_2 \times \omega \to \{0,1\}$ függvény, és minden $\alpha \in \omega_2$ rendszámhoz az α-adik sorhoz tartozó $F_\alpha : \omega \to \{0,1\}$, $F_\alpha(n) = F(\alpha, n)$ függvények különbözők egymástól.

Bizonyítás:

1. F függvény, hiszen G elemei kompatibilisek.

2. $D_F = \omega_2 \times \omega$, hiszen minden $(\alpha, n) \in \omega_2 \times \omega$ párra az

   $$S_{(\alpha,n)} = \{q \in P \mid (\alpha, n) \in D_q\} \in M$$

   halmaz sűrű P-ben, ugyanúgy, mint a KH forszolásánál.

3. Bármely két $\alpha, \beta \in \omega_2$ rendszámhoz van olyan $n \in \omega$, hogy $F(\alpha, n) \neq F(\beta, n)$. Ennek az igazolásához elég megmutatnunk, hogy minden $\alpha, \beta \in \omega_2$ esetén a

   $$Z_{\alpha,\beta} = \{q \in P \mid \exists n \in \omega : \; F(\alpha, n) \neq F(\beta, n)\}$$

   M-beli halmaz sűrű P-ben. Ez pedig igaz: tetszőleges $p \in P$-hez van olyan $n \in \omega$, hogy p nincsen értelmezve (α, n)-ben és (β, n)-ben (mert p véges tartójú). Terjesszük ki p-t ezekre a pontokra, egyik helyre 0-t, másikra 1-et adva függvényértéknek. A kiterjesztett függvény eleme $Z_{\alpha,\beta}$-nak.

F sorai (az F_α függvények) elkódolják ω egy-egy részhalmazát: $A_\alpha = \{n \in \omega \mid F(\alpha, n) = 1\}$. Mivel az F_α függvények különbözőek, az A_α részhalmazok is különbözőek. $M[G]$-ben tehát van legalább ω_2 darab különböző részhalmaza ω-nak, tehát $M[G]$-ben (látszólag!) teljesül a KH tagadása. Az egyetlen baj az, hogy az M-beli ω_2 szerepét játszó rendszám lehet, hogy $M[G]$-ben nem is számosság, vagy, ha számosság, nem az ω_2-nek felel meg (pl. ha $M[G]$-be bekerül egy $\omega_1^{(M)} \to \omega$ bijekció, akkor az M-beli ω_2 az ω_1 számosság szerepét fogja játszani $M[G]$-ben). Ezeket a lehetőségeket kizárja az alábbi állítás (és így $M[G]$-ben valóban teljesül a KH tagadása).

Állítás: A számosságok életben maradnak, vagyis $M[G]$-ben ugyanazok a számosságok, mint M-ben.

Bizonyítás: Belátjuk, hogy ω_1 életben marad, vagyis nem keletkezik $\omega \to \omega_1$ szürjekció. Ennek a mintájára belátható, hogy nem keletkezik $\omega_1 \to \omega_2$ szürjekció sem, és így ω_2 is életben marad. Nekünk ennyi elég is lenne, de nagyobb számosságokra is teljesen analóg módon működik a bizonyítás.

Tegyük fel, hogy $h \in M[G]$, $h : \omega \to \omega_1$ függvény. Megmutatjuk, hogy nem lehet szürjektív: h értékkészletét felülről becsüljük egy $H \in M$ halmazzal, majd megmutatjuk, hogy H számossága M-ben mindössze megszámlálható.

h-nak van neve: $\tau \in M$, $\tau^G = h$, és van $p \in G$, hogy $p \Vdash (\tau : \hat{\omega} \to \hat{\omega}_1$ függvény). Definiáljuk minden $n \in \omega$-ra a H_n halmazokat:

$$H_n = \{\alpha \in \omega_1 \mid \exists q \in P : \; q \leq p, \; q \Vdash (\tau(\hat{n}) = \hat{\alpha})\} \; .$$

$H_n \in M$ a definíciója miatt, és H_n a potenciális $h(n)$-értékek halmaza, vagyis $h(n) \in H_n$ teljesül minden $n \in \omega$-ra (hiszen ha $h(n) = \alpha$, akkor van $q \in G$, ami ezt forszolja, és választhatunk ilyen q-t p alatt is). Ezért, a $H = \bigcup_{n \in \omega} H_n$ jelöléssel h értékkészlete része H-nak.

Ha α és β két különböző eleme H_n-nek, akkor hozzájuk tartozó P-beli q_α illetve q_β elemek inkompatibilisek. Hiszen $q_\alpha \Vdash (\tau(\hat{n}) = \hat{\alpha})$ és $q_\beta \Vdash (\tau(\hat{n}) = \hat{\beta})$, és mindketten forszolják, hogy ($\tau : \hat{\omega} \to \hat{\omega}_1$ függvény), mivel kisebbek p-nél. Ha lenne közös kiterjesztése q_α-nak és q_β-nak, akkor mindezt forszolnia kellene, de ez lehetetlen, hiszen egy függvény nem vehet föl egy helyen két különböző értéket.

Belátjuk, hogy P tetszőleges ω_1 számosságú részhalmazában van két elem, amik kompatibilisek. Ehhez – bizonyítás nélkül – fölhasználjuk a *végtelen Δ-rendszer lemmát:*

> Ha $\kappa > \omega$ reguláris számosság, akkor minden κ számosságú, véges halmazokból álló halmazrendszerből kiválasztható κ-számosságú Δ-rendszer. (Egy halmazrendszer Δ-rendszer, ha tetszőleges két elemének a metszete ugyanaz a D halmaz.)

Legyen $L \subset P$, $|L| = \omega_1$. Álljon a K halmaz az L-beli függvények értelmezési tartományiból: $K = \{D_r \mid r \in L\}$. Így $K \subset \mathcal{P}(\omega_2 \times \omega)$ egy ω_1 számosságú, véges halmazokból álló halmazrendszer és $\omega_1 > \omega$ reguláris rendszám. Ezért a Δ-rendszer lemma szerint van $K' \subset K$ ω_1 számosságú Δ-rendszer: tetszőleges $D_r, D_s \in K'$-re $D_r \cap D_s = D$. De D véges halmaz, ezért csak véges sok $D \to \{0, 1\}$ függvény van. Ezért K' elemeihez tartozó L-beli függvények között biztosan van kettő, amiknek a D-re vett megszorítása megegyezik, de akkor ez a két függvény kompatibilis.

Most rakjuk össze: tetszőleges n-re a H_n minden α eleméhez választhatunk egy-egy q_α elemet (úgy, hogy $q_\alpha \Vdash (\tau(\hat{n}) = \hat{\alpha})$), és a $\{q_\alpha \mid \alpha \in H_n\} \subset P$ halmaz páronként inkompatibilis elemekből áll, tehát megszámlálható. Emiatt a H_n halmazok is megszámlálhatóak, és $H = \bigcup_{n \in \omega} H_n$ halmaz is, hiszen megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója. Mivel h értékkészlete része h-nak, ezért ez is megszámlálható, tehát h nem lehet szürjektív.

Megjegyzés: Ha a kényszerképzet definiciójában $\omega_2 \times \omega$ helyett $\kappa \times \omega$-t írunk (ahol κ tetszőleges számosság), akkor a bővebb modellben $c \geq \kappa$ fog teljesülni. Tehát a kontinuum értéke tetszőlegesen nagy lehet (de nem lehet akármelyik számosság, a *Kőnig-tétel* korlátozza a lehetőségeket).

Megjegyzés: Ez a bizonyítás is egy általánosabb koncepció része. A kényszerképzet egy részhalmazát *antiláncnak* nevezzük, ha az elemei páronként inkompatibilisek. A kényszerképzet *teljesíti a κ-antiláncfeltételt*, ha nincs benne κ méretű antilánc. (Másképpen: ha a kényszerképzet bármely κ

számosságú részhalmazában van két elem, amik kompatibilisek.) A KH tagadásának a forszolása során használt kényszerkézet tehát teljesíti az ω_1-antiláncfeltételt. Az ilyen kényszerképzeteket *megszámlálható antiláncfelételesnek (MAF-osnak)* hívják, természetesen helytelenül. Voltaképp azt bizonyítottuk be, hogy ha egy kényszerképzet MAF-os, akkor a számosságok életben maradnak. Teljesen analóg módon bizonyítható, hogy ha egy kényszerképzet teljesíti a κ-antiláncfeltételt, akkor a κ-nál nagyobb számosságok számosságok maradnak a bővebb modellben (és ha κ reguláris, akkor κ is számosság marad).

6. Bővebben:

Halmazelmélet:

- Hajnal-Hamburger: Halmazelmélet
- Halmazelmélet jegyzet Komjáth Péter honlapján valahol: http://www.cs.elte.hu/ kope

Matematikai logika:

- http://www.cs.elte.hu/ kope/oktatas/09tav/ma2.pdf
- Csirmaz László könyve és jegyzetei a honlapján: http://renyi.hu/ csirmaz/

Forszolás:

- http://www.cs.elte.hu/ kope/oktatas/forsz.dvi
- http://renyi.hu/ csirmaz/