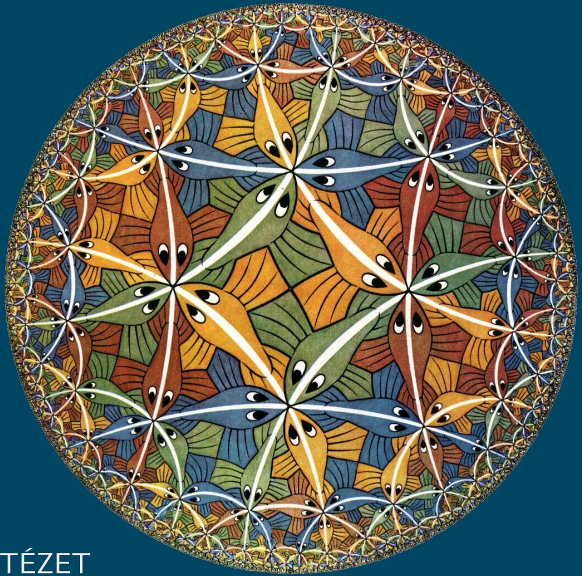
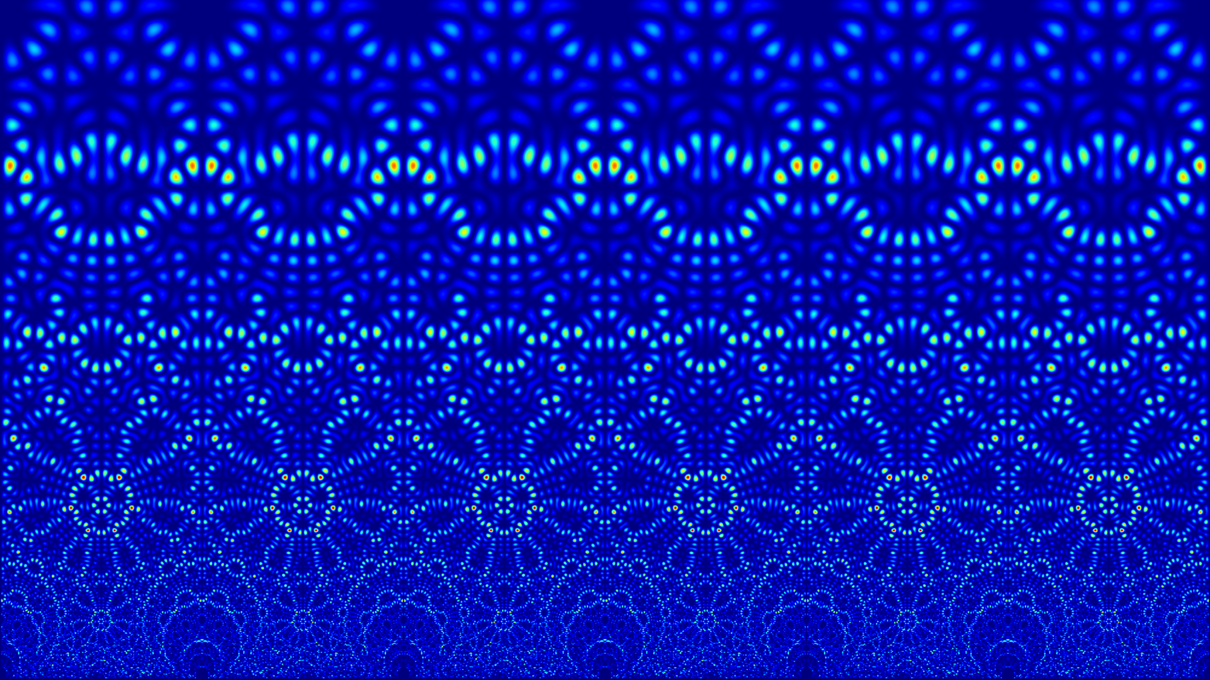
Automorf formákkal egy ókori feladat nyomában



HARCOS GERGELY
RÉNYI ALFRÉD MATEMATIKAI KUTATÓINTÉZET

Fields-érmek a közelmúltból, kiemelve az automorf témakör díjazottait

1990	Vladimir Drinfeld, Vaughan Jones, Shigefumi Mori, Edward Witten
1994	Jean Bourgain, Pierre-Louis Lions, Jean-Christophe Yoccoz, Efim Zelmanov
1998	Richard Borcherds, Timothy Gowers, Maxim Kontsevich, Curtis T. McMullen
2002	Laurent Lafforgue, Vladimir Voevodsky
2006	Andrei Okounkov, Grigori Perelman, Terence Tao, Wendelin Werner
2010	Elon Lindenstrauss, Ngô Bao Châu, Stanislav Smirnov, Cédric Villani
2014	Artur Avila, Manjul Bhargava, Martin Hairer, Maryam Mirzakhani
2018	Caucher Birkar, Alessio Figalli, Peter Scholze, Akshay Venkatesh
2022	Hugo Duminil-Copin, June Huh, James Maynard, Maryna Viazovska

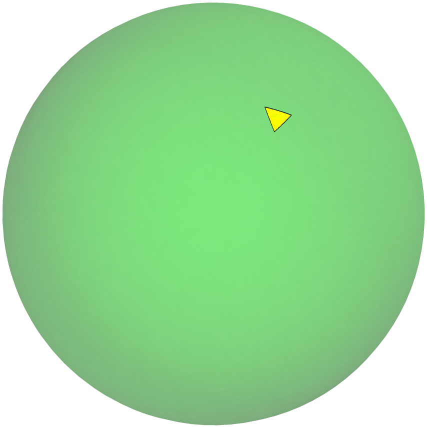


Diophantosz feladata: Bontsuk fel az egységet három olyan pozitív részre, amelyek bármelyikét hárommal megnövelve egy racionális szám négyzetét kapjuk.

Modern átfogalmazás: A 10-et írjuk fel három olyan racionális négyzet összegeként, amelyek mind 3 és 4 közé esnek.

Geometriai változat: Az origó körüli, $\sqrt{10}$ sugarú gömbfelületen keressünk olyan pontot, amelynek minden koordinátája $\mathbb{Q} \cap (\sqrt{3}, 2)$-beli.

Diophantosz megoldása: $\left(\frac{1285}{711}, \frac{1288}{711}, \frac{1321}{711}\right)$



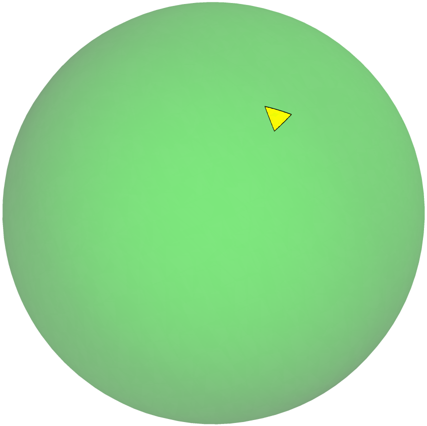
Geometriai változat: Az origó körüli, $\sqrt{10}$ sugarú gömbfelületen keressünk olyan pontot, amelynek minden koordinátája $\mathbb{Q} \cap (\sqrt{3}, 2)$-beli.

Megjegyzés: A kijelölt, sárga rész területaránya $0,000518773766 5119\ldots$

Kérdés: Milyen közös nevező jön szóba? Adott közös nevezőhöz hány megoldás tartozik?

Nézzük a teljes gömbfelületet: Páros nevezőjű pont egyáltalán nincs rajta. Ha pedig k páratlan, akkor a k nevezőjű pontok száma

$$24k \prod_{p|k} \left(1 - \frac{\chi_{-40}(p)}{p}\right).$$



MTA 200 ÉVES A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

Lendület Program

nevező	**jó**	**összes**	**jó/összes**
19	6	432	0,0138888888
49	6	1008	0,0059523809
57	6	1728	0,0034722222
⋮	⋮	⋮	⋮
707	6	14688	0,0004084967
711	24	23040	0,0010416666
713	12	16896	0,0007102272
⋮	⋮	⋮	⋮
2855	48	68400	0,0007017543
2859	66	91584	0,0007206498
2861	30	68688	0,0004367575

nevező	jó	összes	jó/összes
100000001	1312980	2541176928	0,0005166818
100000003	1244616	2403717120	0,0005177880
100000005	1420188	2742860160	0,0005177763
100000007	1242846	2400000144	0,0005178524
100000009	1250364	2416111200	0,0005175109
100000011	1619796	3132048384	0,0005171682
100000013	1245492	2402922240	0,0005183238
100000015	1243650	2400000480	0,0005181873
100000017	1607526	3096576000	0,0005191301
100000019	1067304	2057143104	0,0005188282

Kiderül, hogy az origó körüli, $\sqrt{10}$ sugarú gömbfelületen a k nevezőjű pontok közel egyenletesen oszlanak el (ha k egy nagy, páratlan szám).

Definíció

Ha $\psi : S^2 \to \mathbb{C}$ egy függvény az egységgömbön, és n egy pozitív egész, akkor legyen

$$r^*(n,\psi) := \sum_{\substack{x^2+y^2+z^2=n \\ \gcd(x,y,z)=1}} \psi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}, \frac{y}{\sqrt{n}}, \frac{z}{\sqrt{n}}\right).$$

Tétel

Ha $\psi : S^2 \to \mathbb{C}$ egy sima függvény az egységgömbön, továbbá $\varepsilon > 0$, akkor

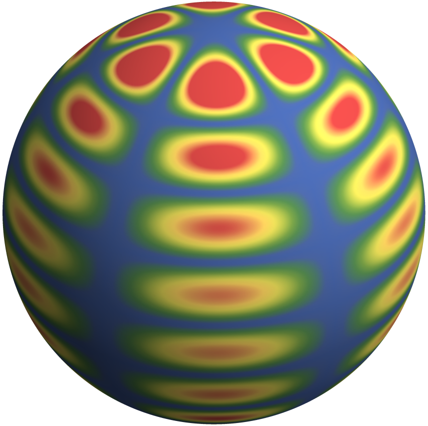
$$\frac{r^*(10k^2,\psi)}{r^*(10k^2,1)} = \int_{S^2} \psi + O_{\psi,\varepsilon}(k^{-1/2+\varepsilon}).$$

A bizonyítás nagy vonalakban:

1. A ψ-t gömbi harmonikusokra bontva az állítást visszavezetjük $3/2 + d$ súlyú (d pozitív egész), holomorf csúcsformák $10k^2$ indexű Fourier-együtthatóinak becslésére.

2. Shimura (1973) megfeleltetését használva a nevezett Fourier-együtthatókat kifejezzük $2d + 2$ súlyú (d pozitív egész), holomorf csúcsformák Fourier-együtthatóiból.

3. Az utóbbi együtthatókra Deligne (1974) igazolta a Ramanujan-sejtést (tehát az optimális becslést), és pontosan ez kell a bizonyítás befejezéséhez.



MTA 200 ÉVES A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
Lendület Program

Általánosabban, ha $n \equiv 1, 2, 3, 5, 6 \pmod 8$, akkor a $\sqrt{n}$ sugarú gömbfelületen $n^{1/2+o(1)}$ primitív rácspont van, és ezek közel egyenletesen oszlanak el. Ugyanakkor, egyelőre meg kell elégednünk egy gyengébb és ineffektív hibataggal.

Tétel (Gauss 1801, Dirichlet 1839)

$$r^*(n,1) = \frac{24}{\pi}\sqrt{n}\,L(1,\chi_D), \qquad D := \begin{cases} -4n, & n \equiv 1,2,5,6 \pmod 8; \\ -n, & n \equiv 3 \pmod 8. \end{cases}$$

Tétel (Waldspurger 1981 & 1991, Conrey–Iwaniec 2000, Baruch–Mao 2007)

Ha $\psi : S^2 \to \mathbb{C}$ egy sima függvény az egységgömbön, továbbá $\varepsilon > 0$, akkor

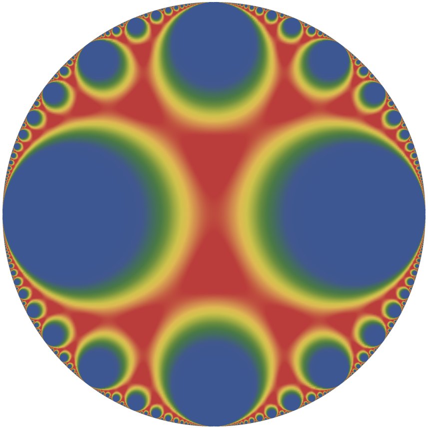
$$\frac{r^*(n,\psi)}{r^*(n,1)} = \int_{S^2} \psi + O_{\psi,\varepsilon}(n^{-1/12+\varepsilon}).$$

A bizonyítás nagy vonalakban:

1. Az $n = 10k^2$ speciális esetben használt ötletekkel az állítást visszavezetjük félegész súlyú, holomorf csúcsformák négyzetmentes indexű Fourier-együtthatóinak becslésére.

2. Waldspurger (1981 & 1991) és Baruch–Mao (2007) tételeit felhasználva a nevezett Fourier-együtthatók abszolút négyzetét kifejezzük $L(1/2, f \otimes \chi_D)$ alakú mennyiségekből, ahol f páros súlyú, triviális melléktípusú, holomorf csúcsforma.

3. Conrey–Iwaniec (2000) igazolta, hogy $L(1/2, f \otimes \chi_D) \ll_{f,\varepsilon} |D|^{1/3+\varepsilon}$, és pontosan ez kell a bizonyítás befejezéséhez.



MTA 200 ÉVES A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

Lendület Program

Az automorf formák kutatása Magyarországon

- 3 Lendület-pályázat

  2017–2022, 2023–2028, 2024–2029

- 8 hazai kutató

  Balog Antal, Biró András, Erdélyi Márton, Harcos Gergely, Maga Péter, Tóth Árpád, Tóth Dávid, Zábrádi Gergely

- 12 külföldi kutató

  Keshav Aggarwal, Giacomo Cherubini, Gilles Felber, Robin Frot, Aritra Ghosh, Sumit Kumar, Niko Laaksonen, Rashi Lunia, Prahlad Sharma, Fredrik Strömberg, Marios Voskou, Han Wu

Prímgeodetikus-tétel a moduláris felületen

A hiperbolikus síkot osszuk le az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-vel, és a kapott felületen tekintsük az egyszeresen körbemenő, irányított, zárt geodetikusokat. Ezen geodetikusok hosszai hasonlóan oszlanak el, mint a prímek természetes logaritmusai, és jobban is értjük őket.

Jelölje $\theta(x)$ a prímgeodetikusok hosszainak összegét $\log(x)$-ig. Soundararajan–Young (2013) igazolta, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\theta(x) = x + O_\varepsilon(x^{25/36+\varepsilon}).$$

Cherubini–Guerreiro (2018) eredménye szerint a $25/36$ tipikusan javítható $5/8$-ra, míg Balog–Biró–Harcos–Maga (2019) eredménye szerint $7/12$-re is:

$$\frac{1}{X}\int_X^{2X} |\theta(x) - x|^2 \, dx \ll_\varepsilon X^{7/6+\varepsilon}.$$

Hiperbolikus körprobléma

Legyen z egy pont a hiperbolikus síkon, és nézzük meg, hogy ennek $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-orbitjában hány pont van bizonyos távolságon belül:

$$N(z,x) := |\{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \mathrm{dist}(\gamma z, z) \leq \log x\}|.$$

Selberg 1960 körül igazolta, hogy

$$N(z,x) = 6x + O_z(x^{2/3}).$$

Biró (2026+) friss eredménye szerint a $2/3$ tipikusan javítható $9/14$-re: ha Ω egy kompakt halmaz a hiperbolikus síkon, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\int_\Omega |N(z,x) - 6x|^2 \, d\mu(z) \ll_{\Omega,\varepsilon} x^{9/7+\varepsilon}.$$

Szuprémum-probléma magasabb rangú tereken

Legyen ϕ egy Hecke–Maass-forma a $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{PO}_n(\mathbb{R})$ téren. Tegyük fel, hogy $\|\phi\|_2 = 1$, és jelölje λ_ϕ a ϕ Laplace-sajátértékét. Mekkora a $\|\phi\|_\infty$ szuprémum?

Az $n = 2$ klasszikus esetben – amiről a képet is mutattam az előadás elején –, Iwaniec–Sarnak (1995) igazolta, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lambda_\phi^{1/12-\varepsilon} \ll_\varepsilon \|\phi\|_\infty \ll_\varepsilon \lambda_\phi^{5/24+\varepsilon}.$$

Általános n-re Blomer–Maga (2016) megmutatta, hogy a kitevő $n(n-1)/8$ alá vihető, de csak akkor, ha a ϕ-t megszorítjuk egy fix kompakt halmazra. Megszorítás nélkül a kitevő nem vihető még $n(n-1)(n-2)/24$ alá sem, lásd Brumley–Templier (2020). Az utóbbi nem jár messze az igazságtól: Blomer–Harcos–Maga (2020) bizonyította, hogy

$$\|\phi\|_\infty \ll_\varepsilon \lambda_\phi^{(n^2-2)(n+1)/16+\varepsilon}.$$

Mátrix Kloosterman-összegek

A klasszikus automorf formák Fourier-együtthatói hatékonyan elemezhetők az

$$S(a,b;c) := \sum_{x\in(\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times} e((ax+bx^{-1})/c)$$

Kloosterman-összegekkel, és viszont. Itt $e(t) := e^{2\pi i t}$. Ha $c = p^k$ egy páratlan prímhatvány és $p \nmid ab$, akkor Weil (1948) és Salié (1932) tételei alapján

$$|S(a,b;p^k)| \leq 2p^{k/2}.$$

Ezt a becslést gyönyörűen általánosítja Erdélyi–Tóth–Zábrádi (2024) friss munkája. Legyen $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})$, és tegyük fel, hogy az $AB \bmod p \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ redukált mátrixnak n különböző sajátértéke van az $\mathbb{F}_p$ algebrai lezártjában. Ekkor

$$\left|\sum_{X\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})} e(\mathrm{Tr}(AX+BX^{-1})/p^k)\right| \leq 2^n p^{kn^2/2}.$$

Egyéb kutatási témáink

- gyökmentes tartományok automorf L-függvényekre (vö. Riemann-sejtés)
- szubkonvex becslések automorf L-függvényekre (vö. Lindelöf-sejtés)
- sűrűségi hipotézis az automorf spektrumra (vö. Ramanujan–Selberg-sejtés)
- osztályszámformulák és nyomformulák
- geometriai invariánsok vizsgálata automorf formákkal
- p-adikus Langlands-program

MTA Lendület Program

Köszönöm a figyelmet!