



A MAGYAR  
TUDOMÁNY  
ÜNNEPE

MTA

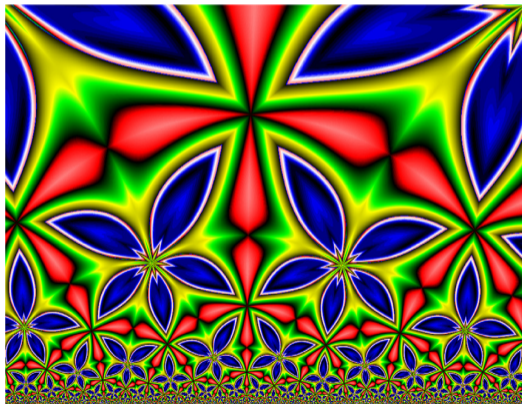
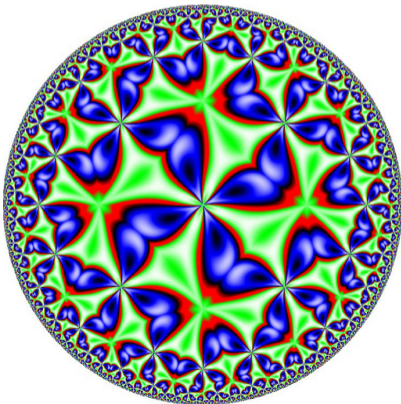
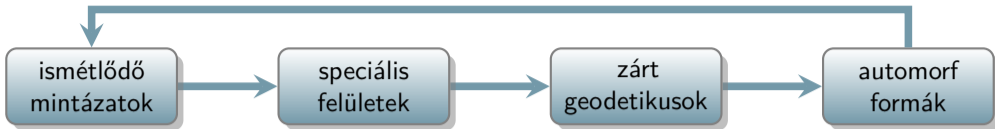
Lendület  
Program

# Automorf formák és zárt geodetikusok

HARCOS GERGELY

RÉNYI ALFRÉD MATEMATIKAI KUTATÓINTÉZET





Tekintsünk egy olyan mintázatot az euklideszi síkon, amely két különböző irányban is ismétlődik. Ezt a mintázatot előlíthatjuk úgy, hogy egy paralelogramma alakú csempét tologatunk az oldalvektoraival.



Persze a csempe szemközti oldalain ugyanaz a minta, ezért azokat képzeletben összeragaszthatjuk. Így a paralelogrammából egy **úszógumi alakú** felületet kapunk, amelyen lokálisan az **euklideszi geometria** érvényes.

## Geodetikusok az egylyukú (euklideszi) úszógumin

A „ragasztással” kapott felületen a **geodetikusok** az euklideszi egyenesek képei. Ha egy egyenes iránya megegyezik két csempét összekötő eltolás irányával, akkor a képe **zárt geodetikus**, egyébként pedig önmagát nem metsző geodetikus.



egy másik  
alaplécsempé...

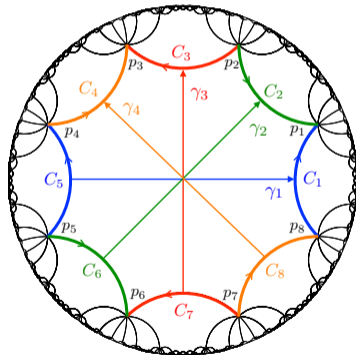


...és ugyanez  
elforgatva 180 fokkal



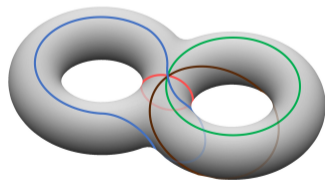
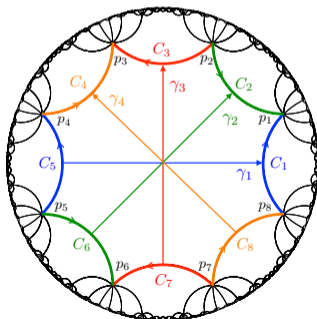
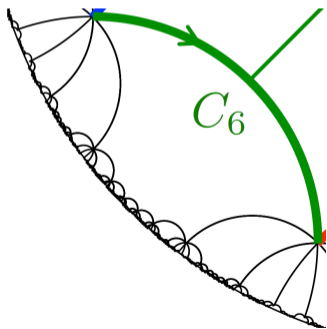
A hiperbolikus sík változatosabban csempézhető, mint az euklideszi, és így bonyolultabb felületek származtathatók belőle. Ennek több, egymással összefüggő oka van: a hiperbolikus síkon számít az eltolások sorrendje, minden eltolásnak van egy **tengelye**, és minden háromszög területe kifejezhető a szögeiből mint  $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ .

Vegyünk egy  $4g$  oldalú hiperbolikus konvex sokszöget, amelyben a szögek összege 360 fok, továbbá a szemközti oldalak egymás eltoltjai. A sokszöget az oldalpárosító eltolásokkal tologatva a hiperbolikus sík egy csempézését kapjuk. Továbbá a sokszög szemközti oldalait képzeletben összeragasztva egy olyan  $g$  lyukú **úszógumi alakú** felületet kapunk, amelyen lokálisan a **hiperbolikus geometria** érvényes.



## Geodetikusok a többlyukú (hiperbolikus) úszógumin

A „ragasztással” kapott felületen a **geodetikusok** a hiperbolikus egyenesek képei. Ha egy egyenes megegyezik két csempét összekötő eltolás tengelyével, akkor a képe **zárt geodetikus**. Ha egy egyenes átmegy két csempe egy-egy olyan pontján, amelyek egymásnak felelnek meg, akkor a képe egy önmagát metsző geodetikus (beleértve a zárt geodetikus esetét is), egyébként pedig egy önmagát nem metsző geodetikus.

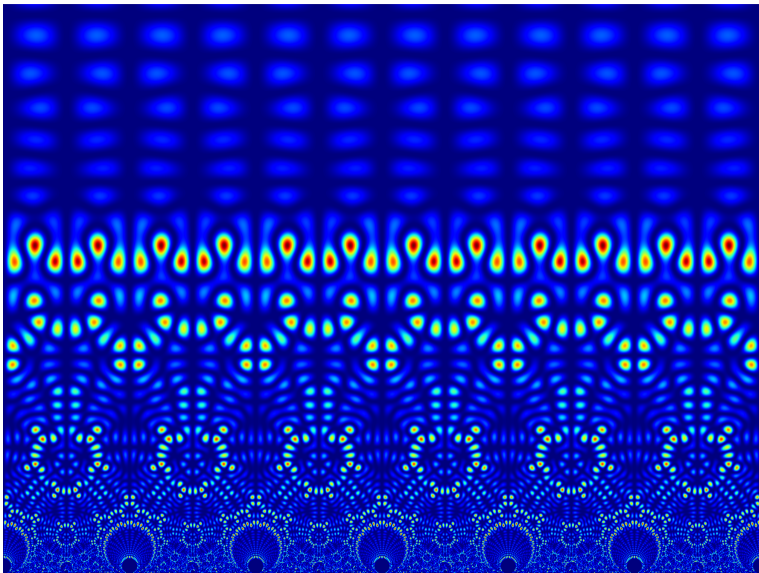


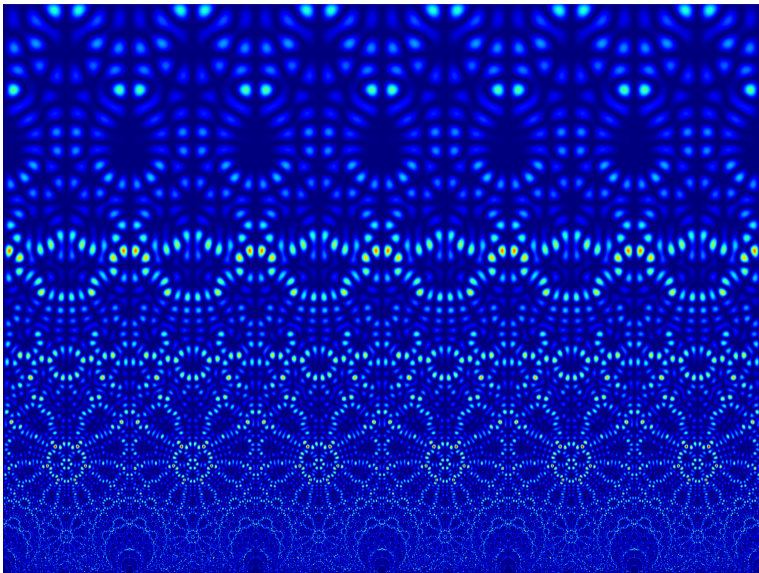
Selberg és Huber fedezte fel az 1950-es években, hogy egy többlyukú (hiperbolikus) úszógumin az irányított zárt geodetikusok hosszai hasonlóan oszlanak el, mint a prímszámok természetes logaritmusai. A bizonyításban fontos szerepet játszanak az adott felületen értelmezett hullámfüggvények, amelyek a hiperbolikus síkon periodikus hullámfüggvényeknek (ún. **Maass-formák**nak) felelnek meg.

### Tétel (Soundararajan–Young 2013, Balog–Biró–Harcos–Maga 2019)

A moduláris felületen tekintsük az összes irányított zárt geodetikust, amelynek hossza legfeljebb  $\ln(x)$ . Legyen  $\Psi(x)$  ezen geodetikusok hosszainak összege.

- Tetszőleges  $c > 25/36$  esetén  $|\Psi(x) - x|$  mindig kisebb, mint konstansszor  $x^c$ .
- Tetszőleges  $c > 7/12$  esetén  $|\Psi(x) - x|$  tipikusan kisebb, mint konstansszor  $x^c$ .





# A képek forrásainak jegyzéke

- 1 Ouyang et al., *Computers & Graphics* **36** (2012), 92–100.
- 2 Maciejko & Rayan, *Sci. Adv.* **7** (2021), eabe9170
- 3 Stepanyants et al., *J. Phys. A: Math. Theor.* **57** (2024), 345201
- 4 <https://escherinhetpaleis.nl/story-of-escher/eight-heads/?lang=en>
- 5 <https://definepattern.tumblr.com/post/111225383794>
- 6 <https://www.pinterest.com/pin/619104279996380162/>
- 7 Fredrik Strömberg, University of Nottingham



A MAGYAR  
TUDOMÁNY  
ÜNNEPE

MTA

Lendület  
Program

Köszönöm  
a figyelmet!

MTA

