Számolás L-függvényekkel

Harcos Gergely

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
https://users.renyi.hu/∼gharcos/

2026. június 5.
Számelmélet szeminárium
Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet

Rácspontok egy (origó középpontú) gömbfelületen

Jelölje $r(n)$ az $x^2 + y^2 + z^2 = n$ egyenlet egész megoldásainak számát. Jelölje $r^*(n)$ a primitív megoldások számát. Például:

$$r(2025) = r^*(1^2) + r^*(3^2) + r^*(5^2) + r^*(9^2) + r^*(15^2) + r^*(45^2)$$

sugár	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{r^*(n)}$	**a megoldások permutáció erejéig**
1	1	6	$(\pm 1, 0, 0)$
3	9	24	$(\pm 2, \pm 2, \pm 1)$
5	25	24	$(\pm 4, \pm 3, 0)$
9	81	72	$(\pm 8, \pm 4, \pm 1)$, $(\pm 7, \pm 4, \pm 4)$
15	225	96	$(\pm 14, \pm 5, \pm 2)$, $(\pm 11, \pm 10, \pm 2)$
45	2025	288	$(\pm 44, \pm 8, \pm 5)$, $(\pm 40, \pm 19, \pm 8)$, $(\pm 40, \pm 16, \pm 13)$, $(\pm 37, \pm 20, \pm 16)$, $(\pm 35, \pm 28, \pm 4)$, $(\pm 29, \pm 28, \pm 20)$

A primitív megoldások sűrűsége $\mathbb{R}$ felett

A megoldások számát ki lehet fejezni a primitív megoldások számából és viszont:

$$r(n) = \sum_{m^2|n} r^*(n/m^2), \qquad r^*(n) = \sum_{m^2|n} \mu(m) r(n/m^2).$$

Gauss (1801) és Dirichlet (1839) osztályszámformuláiból szép képlet adható az $r^*(n)$-re, amely pedig speciális esete Siegel (1935) tömegformulájának (Maßformel). Első, heurisztikus közelítés:

$$\begin{aligned} \sigma_\infty(n) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{vol}\left(\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : n \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant n+h\}\right)}{h} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi t^{3/2}\right)_{|t=n} = 2\pi\sqrt{n}. \end{aligned}$$

Ez a közelítés nem veszi figyelembe az $x^2+y^2+z^2$ összeg eloszlátását a különféle maradékosztályokban. Például:

$$n \equiv 0,4,7 \pmod 8 \qquad \Longrightarrow \qquad r^*(n) = 0.$$

A primitív megoldások sűrűsége $\mathbb{Z}_p$ felett

A valós számok feletti sűrűséget korrigáljuk a p-adikus egészek feletti sűrűséggel (minden p prímszámra):

$$\sigma_p(n) = \lim_{j\to\infty} \frac{\#\left\{x^2+y^2+z^2 \equiv n \pmod{p^j} \text{ primitív megoldásai}\right\}}{p^{2j}}.$$

A jobb oldali hányados stabilizálódik nagy j-re:

$$\sigma_2(n) = \begin{cases} 3/2, & n \equiv 1,2,5,6 \pmod 8; \\ 1, & n \equiv 3 \pmod 8; \\ 0, & n \equiv 0,4,7 \pmod 8; \end{cases}$$

$$\sigma_p(n) = \frac{1-\frac{1}{p^2}}{1-\left(\frac{-n}{p}\right)\frac{1}{p}}, \qquad p > 2.$$

Tétel (Siegel 1935)

$$r^*(n) = \sigma_\infty(n) \prod_p \sigma_p(n).$$

Siegel-féle tömegformula és Dirichlet-féle L-függvények

Ha $n \equiv 0, 4, 7 \pmod 8$, akkor $\sigma_2(n) = 0$. A fennmaradó esetekben, tehát amikor $n \equiv 1, 2, 3, 5, 6 \pmod 8$, a p-adikus sűrűségek szorzata pozitív, és kifejezhető egy L-függvénnyel:

$$\prod_p \sigma_p(n) = 2 \prod_p \frac{1 - \frac{1}{p^2}}{1 - \frac{\chi_D(p)}{p}} = \frac{12}{\pi^2} L(1, \chi_D),$$

ahol

$$D = \begin{cases} -4n, & n \equiv 1, 2, 5, 6 \pmod 8; \\ -n, & n \equiv 3 \pmod 8. \end{cases}$$

Itt D egy (kvadratikus) diszkrimináns, négyzetmentes n esetén fundamentális diszkrimináns. A $\chi_D(m) = \left(\frac{D}{m}\right)$ multiplikatív függvény egy (kvadratikus) Dirichlet-karakter, négyzetmentes n esetén primitív Dirichlet-karakter. A megfelelő L-függvény

$$L(s, \chi_D) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi_D(m)}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi_D(p)}{p^s}\right)^{-1}, \qquad \Re(s) > 1.$$

Dirichlet és Gauss osztályszámformulája

Tétel (Gauss 1801, Dirichlet 1839)

Ha $n \equiv 1, 2, 3, 5, 6 \pmod 8$, *akkor*

$$r^*(n) = \frac{24}{\pi}\sqrt{n}\, L(1, \chi_D).$$

Következmény

Ha $n \equiv 1, 2, 3, 5, 6 \pmod 8$ *és* $k \equiv 1 \pmod 2$, *akkor*

$$r^*(nk^2) = r^*(n)k \prod_{p|k}\left(1 - \frac{\chi_D(p)}{p}\right).$$

Példa

Legyen $n = 1$ és $k = 45$. Ekkor $D = -4$, tehát

$$r^*(2025) = 6 \cdot 45 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 288.$$

A megoldásszám becslése

Az $r^*(n)$ és az $r(n)$ becslése visszavezethető az $L(1,\chi_D)$ becslésére.

Tétel (Siegel 1935)

Ha D egy fundamentális diszkrimináns, akkor

$$L(1,\chi_D) = |D|^{o(1)}.$$

Itt $o(1)$ egy nullához tartó mennyiséget jelent, amint $|D| \to \infty$.

Következmény

Ha $n \equiv 1,2,3,5,6 \pmod 8$, akkor

$$r^*(n) = n^{1/2+o(1)} \qquad \textit{and} \qquad r(n) = n^{1/2+o(1)}.$$

Tétel (Tatuzawa 1951)

Legyen $\varepsilon > 0$. Ha D egy fundamentális diszkrimináns, akkor

- $L(1,\chi_D) < \log|D| < (1/\varepsilon)|D|^{\varepsilon}$;
- $L(1,\chi_D) > (\varepsilon/10)|D|^{-\varepsilon}$ *egyetlen kivétellel.*

Diophantosz: Aritmetika, V. köny, 11. feladat

Találjunk olyan primitív $(x, y, z, k) \in \mathbb{N}^4$ számnégyest, amelyre

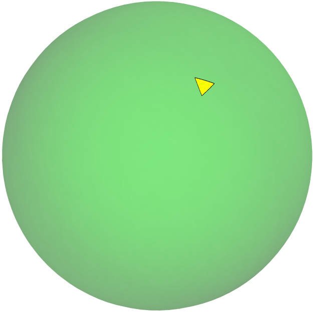
$$x^2 + y^2 + z^2 = 10k^2 \qquad \text{és} \qquad x^2, y^2, z^2 > 3k^2.$$

A k szükségképpen páratlan, és ilyenkor

$$r^*(10k^2) = 24k \prod_{p|k} \left(1 - \frac{\chi_{-40}(p)}{p}\right).$$

Adott páratlan k-hoz hány (x, y, z) tartozik? Diophantosz megoldása $(1285, 1288, 1321, 711)$, de ennél van kisebb: $(33, 35, 36, 19)$.

A kijelölt, sárga rész területaránya $0,0005187737665119\ldots$



Meggyőző statisztika az egyenletes eloszlásra

k	**jó**	**összes**	**jó/összes**
19	6	432	0,0138888888
⋮	⋮	⋮	⋮
711	24	23040	0,0010416666
⋮	⋮	⋮	⋮
100000001	1312980	2541176928	0,0005166818
100000003	1244616	2403717120	0,0005177880
100000005	1420188	2742860160	0,0005177763
100000007	1242846	2400000144	0,0005178524
100000009	1250364	2416111200	0,0005175109
100000011	1619796	3132048384	0,0005171682
100000013	1245492	2402922240	0,0005183238
100000015	1243650	2400000480	0,0005181873
100000017	1607526	3096576000	0,0005191301
100000019	1067304	2057143104	0,0005188282

Egyenletes eloszlás a gömbfelületen

Az origó középpontú, $\sqrt{n}$ sugarú gömbfelületen a primitív rácspontok száma vagy 0 vagy $n^{1/2+o(1)}$. Az utóbbi esetben a primitív rácspontok közel egyenletesen oszlanak el.

Definíció

Ha $\psi : S^2 \to \mathbb{C}$ egy sima függvény az egységgömbön, akkor legyen

$$r^*(n,\psi) := \sum_{\substack{x^2+y^2+z^2=n \\ \gcd(x,y,z)=1}} \psi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}, \frac{y}{\sqrt{n}}, \frac{z}{\sqrt{n}}\right).$$

Tétel (Shimura 1973, Deligne 1974, Waldspurger 1981 & 1991, Conrey–Iwaniec 2000, Baruch–Mao 2007)

$$\frac{r^*(n,\psi)}{r^*(n,1)} = \int_{S^2} \psi + O_{\psi,\varepsilon}(n^{-1/12+\varepsilon}).$$

Ha n négyzetmentes része fix (mint Diophantosz feladatában), akkor a hibatag kitevőjének vehető $-1/4+\varepsilon$.

A bizonyítás nagy vonalakban

1. A ψ tesztfüggvényt gömbi harmonikusokra bontva az állítást visszavezetjük $3/2+d$ súlyú (d pozitív egész), holomorf csúcsformák n indexű Fourier-együtthatóinak becslésére.

2. Az n négyzetes részének járuléka Shimura (1973) megfeleltetését használva kifejezhető $2d+2$ súlyú, holomorf csúcsformák Fourier-együtthatóiból. Az utóbbiakra Deligne (1974) igazolta az optimális becslést (Ramanujan-sejtés).

3. Az n négyzetmentes részének járuléka Waldspurger (1981 & 1991) és Baruch–Mao (2007) tételei segítségével kifejezhető az $L(1/2, f \otimes \chi_D)$ alakú mennyiségekből, ahol f az előbbi pontban szereplő holomorf csúcsformák egyike. Az L-értékre Conrey–Iwaniec (2000) igazolta a $\ll_{f,\varepsilon} |D|^{1/3+\varepsilon}$ szubkonvex becslést, és pontosan ez kell a bizonyítás befejezéséhez.

Rácspontok egy (origó középpontú) ellipszoidon

Tekintsük a primitív rácspontokat az alábbi két ellipszoidon:

$$x^2 + y^2 + 10z^2 = n, \qquad \text{ill.} \qquad 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz = n.$$

A definiáló Q és Q' kvadratikus formák ekvivalensek $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ és mindegyik $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$ szerint, de nem ekvivalensek $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ szerint.

A két $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-ekvivalenciaosztály együttesen egy génuszt alkot.

A megfelelő lokális sűrűségek egyenlők, és a szorzatuk az előállításszámok egy súlyozott átlagát adják.

Tétel (Siegel 1935)

Ha $n \equiv 1, 3, 7, 9 \pmod{10}$, *akkor*

$$\frac{1}{3} r^*(n, Q) + \frac{2}{3} r^*(n, Q') = \frac{4\sqrt{10}}{3\pi} \sqrt{n}\, L(1, \chi_{-10n}).$$

$r^*(n,Q) \approx r^*(n,Q')$

n	$r^*(n,Q)$	$r^*(n,Q')$	**különbség**
1000000001	52992	53376	-384
1000000003	35984	36008	-24
1000000007	53952	54004	-52
1000000009	30704	30680	24
1000000011	34176	35072	-896
1000000013	60048	59880	168
1000000017	55344	55440	-96
1000000019	57616	57064	552

Tétel (Shimura 1973, Deligne 1974, Waldspurger 1981 & 1991, Schulze-Pillot 1984, Conrey–Iwaniec 2000, Baruch–Mao 2007)

Alkalmas 2 súlyú, holomorf f csúcsformával $\gcd(n,10)=1$ *esetén*

$$(r^*(n,Q)-r^*(n,Q'))^2 \ll_\varepsilon n^{1/2+\varepsilon} L(1/2, f\otimes\chi_{-10n}) \ll n^{5/6+\varepsilon}.$$

A prímszámok eloszlása maradékosztályokban

Említettem, hogy a

$$L(1,\chi_D)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi_D(m)}{m}=\prod_p\left(1-\frac{\chi_D(p)}{p}\right)^{-1}$$

sor konvergens, és az értéke nem nulla (valójában pozitív). Ez nem automatikus, és azt tükrözi, hogy a $\chi_D(p)$ fele-fele arányban veszi fel a $+1$ és a -1 értékeket, amint a p végigfut a prímeken.

Dirichlet (1837) az összes $\chi:(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times\to\mathbb{C}^\times$ karakterre belátta, hogy $L(1,\chi)\neq 0$, majd ebből levezette, hogy a prímek egyenletesen oszlanak el a q szerinti redukált maradékosztályokban.

Tétel (Siegel 1935, Walfisz 1936)

Ha $A>0$ és $r\pmod{q}$ redukált maradékosztály modulo q, akkor

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv r\pmod{q}}}\log p=\frac{x}{\varphi(q)}+O_A\left(\frac{x}{(\log x)^A}\right).$$

Gyökmentes tartományok Dirichlet L-függvényekre

Tétel (Hadamard 1896, de la Vallée Poussin 1896 & 1899, Gronwall 1913, Titchmarsh 1930, McCurley 1984)

Ha χ egy primitív Dirichlet-karakter modulo q, akkor az $L(\sigma + it, \chi)$ függvénynek legfeljebb egy gyöke van a

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{10 \log(q(|t| + 10))}$$

tartományban. A kivételes gyök csak kvadratikus χ esetén létezhet, továbbá szükségképpen valós és egyszerű.

Következmény (Siegel 1935, Tatuzawa 1951)

Minden $\varepsilon > 0$ számra létezik egy $c = c(\varepsilon) > 0$ konstans úgy, hogy ha χ egy primitív Dirichlet-karakter modulo q, akkor

$$L(\sigma + it, \chi) \neq 0, \qquad \sigma \geqslant 1 - c(q + |t|)^{-\varepsilon}.$$

A konstans effektívvé tehető, ha megengedünk egyetlen χ kivételt.