

Kombinatorika és gráfelmélet 2.

8. gyakorlat, 2025. november 13.

Erdős-Ko-Rado, Fischer, Sperner, LYM, Erdős-de Bruijn

Erdős-Ko-Rado tétel. (1961) Ha $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ k -uniform halmazrendszer ($k \leq n/2$) azzal a tulajdonsággal, hogy minden $A, B \in \mathcal{F}$ -re $A \cap B \neq \emptyset$, akkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$ és ennyi el is érhető.

Fischer egyenlőtlenség. (1940) $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \subseteq 2^{[n]}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \neq j$ esetén $|A_i \cap A_j| = \lambda > 0$. Ekkor $m \leq n$.

Ray-Chaudhuri-Wilson tétel. (1975) Legyen $L = \{l_1, l_2, \dots, l_s\}$ és legyen $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \subseteq 2^{[n]}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \neq j$ esetén $|A_i \cap A_j| \in L$. Ekkor $m \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}$.

Sperner tétel (1928) $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, minden $A, B \in \mathcal{F}$ -re $A \not\subseteq B$ és $B \not\subseteq A$. Ekkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Egyenlőség esetén $\mathcal{F}$ éppen $[n]$ összes $\lfloor n/2 \rfloor$, vagy az összes $\lceil n/2 \rceil$ elemű részhalmazából áll.

Erdős – De Bruijn tétel. (1948) $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, minden $A \in \mathcal{F}$ -re $|A| \geq 2$, és tetszőleges $1 \leq i < j \leq n$ számokhoz pontosan egy $A \in \mathcal{F}$ van, amelyre $i, j \in A$. Ekkor $|\mathcal{F}| = 1$ vagy $|\mathcal{F}| \geq n$.

- Legyen $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, ahol minden $p_i > 1$ és p_i prímszám. Hány osztóját választhatjuk ki n -nek úgy, hogy semelyik két kiválasztott osztó se legyen relatív prím?
- Artúr király n lovagját felderítő utakra küldi. Minden nap k lovag megy portyázni. Ugyanaz a csapat nem mehet kétszer és – hogy az információkat mindig mindenki megtudja – nem lehet két csapat, aminek nincs közös tagja. Hány napig lehet így csapatokat összeállítani?
- Adott síkon m egyenes. Tegyük fel, hogy az egyenesek nem illeszkednek ugyanarra a pontra, és hogy az egyenesek közül semelyik kettő sem párhuzamos. Bizonyítsuk be, hogy ezen egyenesek legalább m metszéspontot határoznak meg!
- Növényvédő szerekkel való kísérletezéshez a következőkre van szükség. Legyen m féle növény és n különböző földterület. Minden területen pont k féle növényt ültetünk, minden növényt pont r területre ültetünk, és minden növénypárra pont l olyan terület van, ahol mindenkettő szerepel, $r > l$. Lássuk be, hogy $n \geq m$.
- Van néhány k elemű halmazunk, bármely kettő pontosan l pontban metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy valamelyik elemet legfeljebb csak k halmaz tartalmazza.
- Egy 100 elemű halmaznak 20 és 80 elemű részhalmazait választjuk ki úgy, hogy bármely kettő metszi egymást. Legfeljebb hány részhalmazt lehet így kiválasztani?
- Mutassuk meg, hogy ha az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszernek 2^{n-1} tagja van és ezek közül semelyik kettő sem diszjunkt, akkor léteznek $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ olyan tagjai a rendszernek, amiknek pontosan egy közös elemük van.
- Egy páros gráf két osztálya A és B . Bármely két A -beli pontnak pontosan 97 közös szomszédja van, és bármely két B -beli pontnak pontosan 111. a. Mutassunk ilyen gráfot. b. Bizonyítsuk be hogy nincs ilyen gráf, amelyre $|A| = |B| = 1000$.
- Tegyük fel, hogy $k < n/2$ és $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ olyan metsző halmazrendszer, amire $|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{k-1}$. Mutassuk meg, hogy $[n]$ -nek van olyan i eleme, amit $\mathcal{F}$ minden tagja tartalmaz. (Az Erdős-Ko-Rado tétel egyenlőség esete.)
- Mutassunk olyan $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszert, hogy $\mathcal{F}$ bármely két tagjának metszete legalább két elemet tartalmaz és $|\mathcal{F}| = 2^{n-2}$? Létezhet-e ennél nagyobb halmazrendszer a fenti tulajdonsággal?
Hasznos igazság: $\binom{2k}{k} \leq 2^{2k-1}$. (Sőt, $\leq 2^{2k}/\sqrt{k}$ ha k elég nagy.)
- a. Egy fának legfeljebb hány *összefüggő* részgráfját választhatjuk ki úgy, hogy egyik kiválasztott részgráf se legyen részgráfja egy másik kiválasztott részgráfnak? b. Egy fának legfeljebb hány *feszített* részgráfját választhatjuk ki úgy, hogy egyik kiválasztott részgráf se legyen részgráfja egy másik kiválasztott részgráfnak?

12. Legyen $\mathcal{F}$ egy olyan halmazrendszer, ami nem tartalmaz $s + 1$ hosszú láncot (azaz $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_{s+1}$ halmazokat). Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^n \frac{f_k}{\binom{n}{k}} \leq s$, ahol f_k a k méretű halmazok számát jelöli.
13. Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{[2n]}$ olyan metsző halmazrendszer, amely minden tagjának páros az elemszáma. Mutassuk meg, hogy ha n páros, akkor $\mathcal{F}$ -nek legfeljebb 2^{2n-2} tagja lehet.
14. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráfnak bármely két éle diszjunkt vagy az egyik tartalmazza a másikat. Legfeljebb hány éle lehet $\mathcal{H}$ -nak?
15. Legfeljebb hány klubot alapíthat MOD-3-FALVA n lakója? Ha A_i jelöli az i -dik klub tagságát, akkor $|A_i| \not\equiv 0 \pmod{3}$ és minden $i \neq j$ -re $|A_i \cap A_j| \equiv 0 \pmod{3}$. (*)
16. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf nem tartalmaz kört, azaz nincs olyan páronként különböző csúcsokból és hiperélekből álló $x_1, E_1, x_2, E_2, \dots, x_k, E_k, x_{k+1} = x_1$ sorozat, ahol az E_i él tartalmazza az x_i és x_{i+1} csúcsokat. Mutassuk meg, hogy ha $\emptyset$ nem éle $\mathcal{H}$ -nak és $\mathcal{H}$ összefüggő is (azaz V nem állítható elő két diszjunkt nemüres V_1 és V_2 halmaz uniójaként úgy, hogy minden hiperél valamelyik V_i halmaz része), akkor igaz, hogy $\sum\{|E| - 1 : E \in \mathcal{E}\} = |V| - 1$.
17. Tegyük fel, hogy $k < n/3$ és $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ olyan k -uniform halmazrendszer, amelyben nincs három páronként diszjunkt halmaz. Mutassuk meg, hogy $|\mathcal{F}| \leq 4 \binom{n-1}{k-1}$.

Házi feladat

1. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszernek nincs két diszjunkt tagja. Mutassuk meg, hogy van olyan $\mathcal{F}$ -t tartalmazó $\mathcal{F}' \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszer, amire $\mathcal{F}'$ metsző és $|\mathcal{F}'| = 2^{n-1}$.
2. Minden $k \geq 1$ -re mutassunk olyan k -uniform hipergráfot, amely izomorf a duálisával.
3. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[100]}$ halmazrendszerben bármely három halmaz metszete üres. Határozzuk meg $|\mathcal{F}|$ maximális értékét! ($\mathcal{F}$ egyszerű halmazrendszer, tehát egy részhalmaz csak egyszer lehet benne!)