# Kombinatorika és gráfelmélet II

## **Nyílthelyi**, 2020. november 20, 8.00-11.00

A megoldásokat küldjék el 11.00 **előtt** a **geza@renyi.hu** címre! Kérem, olvashatóan írjanak, aki kézzel, az viszonylag nagy betűkkel és mindenki minden oldalra írja rá a nevét! Minden írott anyag használható. Az aláíráshoz 40%-ot kell elérni.

Pótnyh: december 11, 8-11. Aki szeretne pótnyh-t írni, az írjon nekem december 9-ig!

**Jó munkát!**

1. $G$, $H$, $F$ (nem feltétlenül egyszerű) legalább 2 csúcsú gráfok, bármely kettő egymás absztrakt duálisa. Bizonyítsuk be, hogy $F$ nem lehet fa!

2. Legyen $n$, $e$, $t$ a síkbarajzolt $G$ gráf csúcsainak, éleinek és tartományainak a száma. Határozzuk meg $e$ minimumát az olyan síkbarajzolt egyszerű $G$ gráfokra, amelyeknek $t = 7$ tartománya van.

3. Legyen $(V, \prec_1)$ és $(V, \prec_2)$ részbenrendezett halmazok (ugyanazon az alaphalmazon). Legyen a $G$ gráf csúcshalmaza $V$, két csúcs, $u, v \in V$ össze vannak kötve éllel akkor és csak akkor, ha $u$ és $v$ összehasonlítható a $\prec_1$ vagy a $\prec_2$ relációval. Azt vettük észre, hogy $G$ nem tartalmaz háromszöget. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 4$.

4. Bizonyítsuk be, hogy minden $t > 1$-hez van $K = K(t)$ a következő tulajdonsággal. Akárhogyan színezzük ki az $1, 2, \ldots, K$ számokat $t$ színnel, található olyan egyszínű, különböző $x, y, z$, amelyekre $x + y = 2z$, és $x, y, z$ közül semelyik kettő sem relatív prím.

5. Legyen $H$ egy 5 csúcsú és 9 élű gráf, vagyis egy $K_5$ mínusz egy él. Bizonyítsuk be, hogy $ex(20, H) \leq 149$.

6. $\mathcal{F} \subseteq 2^{[100]}$, tudjuk, hogy ha $A, B \in \mathcal{F}$ és $A \subset B$, akkor $|B| = 99$. Bizonyítsuk be, hogy $|\mathcal{F}| \leq \binom{100}{50} + 100$ és hogy ez a korlát nem javítható!