Kombinatorika és gráfelmélet II

Nyílthelyi, 2020. november 20, 8.00-11.00

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. G, H, F (nem feltétlenül egyszerű) legalább 2 csúcsú gráfok, bármely kettő egymás absztrakt duálisa. Bizonyítsuk be, hogy F nem lehet fa!

Mivel F és G egymás absztrakt duálisai, G és H is, a Whitney tétel szerint F és H gyengén izomorfak. 3 pont

Viszont H és F is egymás absztrakt duálisai, tehát megint a Whitney tétel szerint F saját magának az absztrakt duálisa! 3 pont

Tegyük fel, hogy F egy fa. Ekkor minden éle elvágó él, tehát ennek egy egy élből álló kör, vagyis egy hurokél felel meg. Csakhogy egy fának nincs hurokéle, tehát nem lehet saját magának az absztrakt duálisa. 4 pont

2. Legyen n, e, t a síkbarajzolt G gráf csúcsainak, éleinek és tartományainak a száma. Határozzuk meg e minimumát az olyan síkbarajzolt egyszerű G gráfokra, amelyeknek $t = 7$ tartománya van.

Legyenek G tartományai $F_1, \ldots, F_7$, $|F_i|$ jelöli az F_i-t határoló élek számát. (multiplicitással: ha egy él mindkét oldaláról F_i-t határolja, akkor kétszer számoljuk)

Mivel G egyszerű gráf, minden i-re $|F_i| \geq 3$. 3 pont

Az mindig igaz, hogy $2e = \sum_1^7 |F_i|$, tehát $2e = \sum_1^7 |F_i| \geq 3 \cdot 7 = 21$. Vagyis $e \geq 11$. 4 pont

$e = 11$ lehetséges is: vegyünk egy négyszöget, benne két pontot, és osszuk fel a négyszöget a két belső pont segítségével 6 háromszögre. 3 pont

3. Legyen $(V, \prec_1)$ és $(V, \prec_2)$ részbenrendezett halmazok (ugyanazon az alaphalmazon). Legyen a G gráf csúcshalmaza V, két csúcs, $u, v \in V$ össze vannak kötve éllel akkor és csak akkor, ha u és v összehasonlítható a $\prec_1$ vagy a $\prec_2$ relációval. Azt vettük észre, hogy G nem tartalmaz háromszöget. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 4$.

Legyen $i = 1, 2$-re $G_i(V, E_i)$ a $(V, \prec_i)$ részbenrendezett halmaz összehasonlítás gráfja. Ekkor a feladatban szereplő $G(V, E)$ gráfra $E = E_1 \cup E_2$. 2 pont

Mivel G-ben nincs háromszög, G_1-ben és G_2-ben sincs. 2 pont

A G_1 és G_2 gráfok összehasonlítás gráfok, tehát perfektek. Mivel nincs bennük háromszög, $\omega(G_i) \leq 2$, tehát $\chi(G_i) \leq 2$. 3 pont

Színezzük ki az x, y színekkel a G_1 gráfot és az a, b színekkel a G_2 gráfot. Ebből kapunk egy 4-színezést az (x, a), (x, b), (y, a), (y, b) színekkel, ami G-nek egy jó színezése, hiszen ha két csúcs össze van kötve, akkor vagy G_1-ben, vagy G_2-ben is össze van kötve, ezért a megfelelő szín-pár különböző. Tehát $\chi(G) \leq 4$. 3 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy minden $t > 1$-hez van $K = K(t)$ a következő tulajdonsággal. Akárhogyan színezzük ki az $1, 2, \ldots, K$ számokat t színnel, található olyan egyszínű, különböző x, y, z, amelyekre $x + y = 2z$, és x, y, z közül semelyik kettő sem relatív prím.

A Van der Waerden tétel szerint minden t-re van olyan $W(t)$, hogy ha kiszínezzük az $1, 2, \ldots, W(t)$ számokat t színnel, akkor található egyszínű, 3 tagú számtani sorozat. 3 pont

Azt állítjuk, hogy $K(t) = 2W(t)$ kielégíti a feladat feltételét. Színezzük ki az $1, 2, \ldots, 2W(t)$ számokat t színnel. Ezt hívjuk első színezésnek. Ebből megkaphatjuk az $1, 2, \ldots, W(t)$ számoknak egy (második) színezését úgy, hogy i színe a második színezésben legyen az, ami $2i$ színe az első színezésben. 3 pont

A Van der Waerden tétel szerint lesz a második színezésben olyan egyszínű $a < b < c$, amelyek számtani sorozatot alkotnak. De akkor az első színezésben az $x = 2a$, $y = 2b$, $z = 2c$ számok egyszínűek és $x + z = 2y$. Sőt, mivel x, y, z párosak, semelyik kettő sem relatív prím. 4 pont

5. Legyen H egy 5 csúcsú és 9 élű gráf, vagyis egy K_5 mínusz egy él. Bizonyítsuk be, hogy $ex(20, H) \leq 149$.

Be kell látnunk, hogy ha G egy 20 csúcsú, 150 élű gráf, akkor tartalmaz H-val izomorf részgráfot. 2 pont

Világos, hogy ha G tartalmaz egy teljes 5 csúcsú részgráfot, akkor készen vagyunk, mert ennek részgráfja H. 3 pont

A Turán tétel szerint a K_5-mentes 20 csúcsú gráfok közül a $T_{20,4}$ Turán gráfnak van a legtöbb éle, éppen 150. 2 pont

Tehát ha G 20 csúcsú, 150 élű és nem tartalmaz K_5-öt, akkor izomorf a $T_{20,4}$ Turán gráffal. Ez viszont bőven tartalmaz H-val izomorf részgráfot. Vegyünk a négy osztály közül háromban egy-egy csúcsot, a negyedikben kettőt. Ezzel készen vagyunk. 3 pont

6. $\mathcal{F} \subseteq 2^{[100]}$, tudjuk, hogy ha $A, B \in \mathcal{F}$ és $A \subset B$, akkor $|B| = 99$. Bizonyítsuk be, hogy $|\mathcal{F}| \leq \binom{100}{50} + 100$ és hogy ez a korlát nem javítható!

Legyen $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ $\mathcal{F}$ 99 elemű részhalmazainak a családja, és legyen $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}$ *nem* 99 elemű részhalmazainak a családja. 3 pont

Világos, hogy $|\mathcal{F}_1| \leq 100$, hiszen összesen ennyi 99 elemű részhalmaz van. 2 pont

A $\mathcal{F}_2$ halmazrendszerre pedig igaz, hogy nincs benne tartalmazás: ha $A, B \in \mathcal{F}_2$, akkor $A \not\subset B$. Ezért a Sperner tétel szerint $|\mathcal{F}_2| \leq \binom{100}{50}$. 4 pont

Tehát $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| \leq \binom{100}{50} + 100$. 1 pont