

Kombinatorika és gráfelmélet 2.

9+10. gyakorlat, 2020. november 8, 13.

Erdős-Ko-Rado, Fischer, Sperner, LYM, Erdős-de Bruijn

Tudnivalók és megoldások.

Erdős-Ko-Rado tétel. (1961) Ha $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ k -uniform halmazrendszer ($k \leq n/2$) azzal a tulajdonsággal, hogy minden $A, B \in \mathcal{F}$ -re $A \cap B \neq \emptyset$, akkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$ és ennyi el is érhető.

Fischer egyenlőtlenség. (1940) $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \subseteq 2^{[n]}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \neq j$ esetén $|A_i \cap A_j| = \lambda > 0$. Ekkor $m \leq n$.

Ray-Chaudhuri-Wilson tétel. (1975) Legyen $L = \{l_1, l_2, \dots, l_s\}$ és legyen $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \subseteq 2^{[n]}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \neq j$ esetén $|A_i \cap A_j| \in L$. Ekkor $m \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}$.

Sperner tétel (1928) $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, minden $A, B \in \mathcal{F}$ -re $A \not\subseteq B$ és $B \not\subseteq A$. Ekkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Egyenlőség esetén \mathcal{F} éppen $[n]$ összes $\lfloor n/2 \rfloor$, vagy az összes $\lceil n/2 \rceil$ elemű részhalmazából áll.

Erdős – De Bruijn tétel. (1948) $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, minden $A \in \mathcal{F}$ -re $|A| \geq 2$, és tetszőleges $1 \leq i < j \leq n$ számokhoz pontosan egy $A \in \mathcal{F}$ van, amelyre $i, j \in A$. Ekkor $|\mathcal{F}| = 1$ vagy $|\mathcal{F}| \geq n$.

1. Legyen $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, ahol minden $p_i > 1$ és p_i prímszám. Hány osztóját választhatjuk ki n -nek úgy, hogy semelyik két kiválasztott osztó se legyen relatív prím?

Megoldás: Minden osztó a prímtényezők egy részhalmazának szorzata. Bármely kettő metszi egymást, tehát egy részhalmaz és a komplementere közül csak az egyik lehet. Ezért legfeljebb $\leq 2^{k-1}$ osztó lehet. De ennyit kapunk is, ha az összes olyat vesszük, amiben szerepel p_1 .

2. Artúr király n lovagját felderítő utakra küldi. Minden nap k lovag megy portyázni. Ugyanaz a csapat nem mehet kétszer és – hogy az információkat mindig mindenki megtudja – nem lehet két csapat, aminek nincs közös tagja. Hány napig lehet így csapatokat összeállítani?

Megoldás: Erdős-Ko-Rado: $\binom{n-1}{k-1}$, ha $k \leq n/2$, különben $\binom{n}{k}$.

3. Adott síkon m egyenes. Tegyük fel, hogy az egyenesek nem illeszkednek ugyanarra a pontra, és hogy az egyenesek közül semelyik kettő sem párhuzamos. Bizonyítsuk be, hogy ezen egyenesek legalább m metszéspontot határoznak meg!

Megoldás: Jelölje a H_i ($i = 2, \dots, m$) az i -edik egyenesen található metszéspontok halmazát. Legyen X az összes metszéspontok halmaza. $|X| = n$ és $H_i \subseteq X$. Nyilván $|H_i \cap H_j| = 1$ ha $i \neq j$. Fischer egyenlőtlenségből: $n \geq m$, azaz a metszéspontok száma legalább annyi, mint az egyenesek száma.

Vagy: Vegyünk egy x_i változót minden egyeneshez. És vegyünk egy egyenletet minden metszésponthez: $\sum x_i = 0$, azokra az x_i -kre szummazunk, amelyeknek az egyenesé átmegy a ponton. Állítás: nincs nemtriviális megoldása az egyenletrendszernek. Tegyük fel, hogy van, pl $x_1 = 1$. Ekkor az 1-es egyenesen levő bármelyik metszésponton (legalább kettő van) a többi egyeneshez tartozó változók összege -1 . Viszont így minden egyenest pontosan egyszer számoltunk, tehát az ÖSSZES változó összege legfeljebb -1 , vagyis negatív. Most vegyünk egy negatív értékű változót, mondjuk $x_2 < 0$, ekkor a második egyenessel hasonlóan érvelve azt kapjuk, hogy az összes változó összege pozitív. Ez ellentmondás, tehát nincs nemtriviális megoldása az egyenletrendszernek, ekkor viszont legalább annyi egyenlet (metszéspont) van, mint ismeretlen (egyenes).

4. Növényvédő szerekkel való kísérletezéshez a következőkre van szükség. Legyen m féle növény és n különböző földterület. Minden területen pont k féle növényt ültetünk, minden növényt pont r területre ültetünk, és minden növénypárra pont l olyan terület van, ahol mindenkettő szerepel, $r > l$. Lássuk be, hogy $n \geq m$.

Megoldás: Legyen A_i azon területeknek a halmaza, ahol az i -edik növény előfordul. (Így $|A_i| = r$.) Tudjuk, hogy $|A_i \cap A_j| = l$. Alkalmazzuk a Fischer-egyenlőtlenséget.

5. Van néhány k elemű halmazunk, bármely kettő pontosan l pontban metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy valamelyik elemet legfeljebb csak k halmaz tartalmazza.

Megoldás: Fischer-ből: legfeljebb n halmaz van, ezért összesen legfeljebb nk elemük van, vagyis nem tartalmazhatnak minden elemet legalább $k + 1$ -szer.

$l=1$ -re direktben is megy: vegyünk egy elemet és azokat a halmazokat akik ezt tartalmazzák. Akkor kívül diszjunktak. Ha többen vannak, mint k , akkor nem lehet több halmaz. Ha legfeljebb k , akkor meg kész vagyunk.

6. Egy 100 elemű halmaznak 20 és 80 elemű részhalmazait választjuk ki úgy, hogy bármely kettő metszi egymást. Legfeljebb hány részhalmazt lehet így kiválasztani?

Megoldás: Egy 20-as és a komplementer 80-as közül csak az egyiket választhatjuk ki. Tehát $\max \binom{100}{20} = \binom{100}{80}$. Ennyi lehet is, ha a 80-asokat választjuk.

7. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszernek 2^{n-1} tagja van és ezek közül semelyik kettő sem diszjunkt, akkor léteznek $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ olyan tagjai a rendszernek, amiknek pontosan egy közös elemük van.

Megoldás: 1. Mivel 2^{n-1} halmazunk van, minden komplementer párból pontosan az egyik van a halmazrendszerben. Vegyük a legkisebb halmazt, X -et. Ez nyilván nem üres, mert nincs két diszjunkt részhalmaz. Most vegyünk el egy elemet X -ből, legyen ez Y . Ez nincs a halmazrendszerben, mert kisebb, mint X . Tehát a komplementere benne van, és egy pontban metszi X -et KÉSZ.

2. Indirekt. Tegyük fel, hogy minden metszet legalább kételemű. Világos, hogy minden komplementer párnak pontosan az egyik eleme tagja \mathcal{F} -nek. Tekintsünk egy ciklikus permutációt félbevágó ($\lfloor n/2 \rfloor$ és $\lceil n/2 \rceil$ méretű) komplementer íveket. Ha egy ilyen ív \mathcal{F} -beli, akkor az eggyel eltoltja is az, mert a komplementere csak egy pontban metszené. De ekkor az ív minden elforgatottja tagja \mathcal{F} -nek, csak hogy ez baj, mert így lesz egyes metszet. Vagy: minden halmaz és a komplementere közül pontosan az egyik van benne. 1 eleműek nem lehetnek, tehát minden $n - 1$ elemű benne van. De akkor 2 eleműek sem lehetnek, viszont akkor minden $n - 2$ elemű bent van. Akkor 3 eleműek sem lehetnek, stb, végül ellentmondást kapunk.

8. Egy páros gráf két osztálya A és B . Bármely két A -beli pontnak pontosan 97 közös szomszédja van, és bármely két B -beli pontnak pontosan 111. a. Mutassunk ilyen gráfot. b. Bizonyítsuk be hogy nincs ilyen gráf, amelyre $|A| = |B| = 1000$.

Megoldás: a: teljes 111 - 97-es páros. b. számoljuk meg a C_4 -eket, nem stimmel.

9. Tegyük fel, hogy $k < n/2$ és $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ olyan metsző halmazrendszer, amire $|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{k-1}$. Mutassuk meg, hogy $[n]$ -nek van olyan i eleme, amit \mathcal{F} minden tagja tartalmaz. (Az Erdős-Ko-Rado tétel egyenlőség esete.)

Megoldás: Minden ciklikus permutáció \mathcal{F} -nek legfeljebb k tagját tartalmazza ívként, mert ha egy F -t ívként tartalmaz, akkor F szomszédos elemeit szeparáló másik ívből legfeljebb egy lehet \mathcal{F} -beli. Az óraiak szerint kijön a felső becslés, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha minden ciklikus permutáció pontosan k ívet tartalmaz \mathcal{F} -ből. Sőt, így egy ív bármely két szomszédos elemét szeparálja egy másik ív.

Ha egy ciklikus permutáció nem olyan, hogy abban minden \mathcal{F} -beli ívnek közös pontja van, akkor van már benne 3 olyan \mathcal{F} -beli ív is, amiknek nincs közös pontjuk. De ekkor a ciklikus permutáció bármely két szomszédos elemét fedi \mathcal{F} -beli ív, így kell lennie azokat szeparáló \mathcal{F} -beli ívnek is. Mivel minden \mathcal{F} -beli ív két szomszédos párt szeparál, ezért legalább $n/2$ ilyen ív van, ami ellentmond a $k < n/2$ feltevésnek. Ekkor viszont bármely ciklikus permutáció \mathcal{F} -beli íveinek metszete egy pont. Itt viszont ha két szomszédos elemet kicserélünk, ami elkerüli ezt a pontot, akkor ugyanaz a pont marad a közös. Viszont így minden halmaz ívvé tehető, tehát mind tartalmazza a közös pontot, kész.

10. Mutassunk olyan $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszert, hogy \mathcal{F} bármely két tagjának metszete legalább két elemet tartalmaz és $|\mathcal{F}| = 2^{n-2}$? Létezik-e ennél nagyobb halmazrendszer a fenti tulajdonsággal?

Hasznos igazság: $\binom{2k}{k} \leq 2^{2k-1}$. (Sőt, $\leq 2^{2k}/\sqrt{k}$ ha k elég nagy.)

Megoldás: Alkossák \mathcal{F} -t azon részhalmazok, amik az 1 és 2 elemeket tartalmazzák. Persze van ennél nagyobb is. Legyen $n = 2k$ és vegyük a legalább $k + 1$ elemű részhalmazokat. Ez akkor jó, ha $\binom{2k}{k} \leq 2^{k-1}$, ami teljesül.

11. a. Egy fának legfeljebb hány *összefüggő* részgráfját választhatjuk ki úgy, hogy egyik kiválasztott részgráf se legyen részgráfja egy másik kiválasztott részgráfnak? b. Egy fának legfeljebb hány *feszített* részgráfját választhatjuk ki úgy, hogy egyik kiválasztott részgráf se legyen részgráfja egy másik kiválasztott részgráfnak?

Megoldás: a. A kiválasztott gráfok között van néhány K_1 , míg a többi részgráf csúcsai diszjunktak ezektől és az élhalmazok Sperner rendszert alkotnak. Szóval maximum $\binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$ jön ki, és ennyi lehet is pl egy csillagnak.

b. Feszítettre: a csúcselhalmazok Sperner rendszert alkotnak, tehát $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, ennyi lehet is, minden $\lfloor n/2 \rfloor$ méretű halmaz által feszítettet vesszük.

12. Legyen \mathcal{F} Egy olyan halmazrendszer, ami nem tartalmaz $s + 1$ hosszú láncot (azaz $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_{s+1}$ halmazokat). Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^n \frac{f_k}{\binom{n}{k}} \leq s$, ahol f_k a k méretű halmazok számát jelöli.

Megoldás: $n!$ lánc van, egy adott k elemű halmazt $k!(n-k)!$ lánc tartalmaz. Egy lánc legfeljebb s db \mathcal{F} -belit tartalmazhat. Ezért $\sum_{k=0}^n f_k k!(n-k)! \leq sn!$.

13. Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{[2^n]}$ olyan metsző halmazrendszer, amely minden tagjának páros az elemszáma. Mutassuk meg, hogy ha n páros, akkor \mathcal{F} -nek legfeljebb 2^{2n-2} tagja lehet.

Megoldás: A páros részhalmazok komplementer párokat alkotnak és mindegyikből legfeljebb egyet tudok \mathcal{F} -be venni. Pl a nagyobbakat bevéve ez metsző lesz, szóval a maximális elemszám 2^{2n-2} .

14. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráfnak bármely két éle diszjunkt vagy az egyik tartalmazza a másikat. Legfeljebb hány éle lehet \mathcal{H} -nak?

Megoldás: Feltehető, hogy \emptyset, V és az egypontúak mind élek. Irányított gráfot készítünk úgy, hogy csúcsai a hiperélek, és irányított él fut e -ből f -be, ha $e \subset f$ és köztük nincs más hiperél. Minden kifok 1 lesz a V kivételével, továbbá minden befok legalább 2, kivéve az n levelet. Ez összesen $2n$ csúcs, illetve hiperél. Ez pontos, konstrukció: pl indukcióval.

15. Legfeljebb hány klubot alapíthat MOD-3-FALVA n lakója? Ha A_i jelöli az i -dik klub tagságát, akkor $|A_i| \not\equiv 0 \pmod{3}$ és minden $i \neq j$ -re $|A_i \cap A_j| \equiv 0 \pmod{3}$. (*)

Megoldás: Vegyük a karakterisztikus vektorokat $GF(3)$ (a 3 elemű test) felett. $v_i^2 \neq 0$, de $v_i v_j = 0$. Ezért ezek a vektorok lineárisan függetlenek. Tehát legfeljebb n klubot lehet alapítani.

16. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf nem tartalmaz kört, azaz nincs olyan páronként különböző csúcsokból és hiperélekből álló $x_1, E_1, x_2, E_2, \dots, x_k, E_k, x_{k+1} = x_1$ sorozat, ahol az E_i él tartalmazza az x_i és x_{i+1} csúcsokat. Mutassuk meg, hogy ha \emptyset nem éle \mathcal{H} -nak és \mathcal{H} összefüggő is (azaz V nem állítható elő két diszjunkt nemüres V_1 és V_2 halmaz uniójaként úgy, hogy minden hiperél valamelyik V_i halmaz része), akkor igaz, hogy $\sum_{E \in \mathcal{E}} \{|E| - 1 : E \in \mathcal{E}\} = |V| - 1$.

Megoldás: Minden hiperélhez bevezetünk egy-egy új csúcsot, abból a hiperél minden pontjához vezetünk egy-egy sima gráfelt. Így egy fát kapunk. Innen könnyen adódik a bizonyítandó.

Vagy: Töröljük az egypontú éleket, attól semmi sem változik. Ezután lesz olyan csúcs, amire csak egy él illeszkedik, ezt összehúzzuk és indukció.

17. Tegyük fel, hogy $k < n/3$ és $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ olyan k -uniform halmazrendszer, amelyben nincs három páronként diszjunkt halmaz. Mutassuk meg, hogy $|\mathcal{F}| \leq 4 \binom{n-1}{k-1}$.

Megoldás: Módosítsuk az Erdős-Ko-Rado íves bizonyítását. Az egyetlen különbség, hogy egy ciklikus permutációban nem k , hanem $\max 4k$ ív lehet: ha bármely két ív metsző, akkor $\max k$ ív lehet, ha nem, akkor vegyünk két diszjunkt ívet, mindkettőt $\max 2k - 2$ metszheti, plusz ők ketten.

Ez a $4k$ egyébként messze nem pontos.

Házi feladat

1. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszernek nincs két diszjunkt tagja. Mutassuk meg, hogy van olyan \mathcal{F} -t tartalmazó $\mathcal{F}' \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszer, amire \mathcal{F}' metsző és $|\mathcal{F}'| = 2^{n-1}$.

2. Minden $k \geq 1$ -re mutassunk olyan k -uniform hipergráfot, amely izomorf a duálisával.