Kombinatorika és gráfelmélet 2.

7+8. gyakorlat, 2020. október 28, 30

Turán

Tudnivalók és megoldások

Tetszőleges H gráfra $ex(n, H)$ jelöli az n csúcsú, H-t részgráfként nem tartalmazó gráfok maximális élszámát, $Ex(n, H)$ pedig az n csúcsú, H-t részgráfként nem tartalmazó, $ex(n, H)$ élű gráfok halmazát (izomorfia erejéig).

Legyen $n, r \geq 1$. Az n csúcsú, r osztályú $T(n, r)$ **Turán gráfnak** n csúcsa van, r osztályba osztva a lehető legegyenletesebben: ha $n = ar + b$, $r > b \geq 0$, akkor b osztályban $\lceil n/r \rceil$ csúcs van, $r - b$ osztályban pedig $\lfloor n/r \rfloor$ darab. Bármely két, különböző osztályhoz tartozó csúcs össze van kötve, az azonos osztályban levők nem.

Tetszőleges G gráfra legyen $|E(G)|$ G éleinek a száma.

Turán tétel (1941). $ex(n, K_{r+1}) = |E(T(n, r))|$. Ha pedig G egy n csúcsú gráf ami nem tartalmaz K_{r+1}-et részgráfként és $|E(G)| = |E(T(n, r))|$, akkor G izomorf a $T(n, r)$ Turán gráffal, azaz $Ex(n, K_{r+1}) = T(n, r)$.

Erdős, Stone, Simonovits tétel (1946...).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ex(n, H)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{\chi(H) - 1}.$$

Erdős, Kővári, Sós, Turán tétel (1954). Legyen $r \geq s \geq 2$. Egy n csúcsú gráfnak, amely nem tartalmaz $K_{r,s}$–t részgráfként legfeljebb $c_{r,s}n^{2-1/s}$ éle van, valamilyen $c_{r,s}$ konstansra.

1. Legfeljebb hány éle lehet egy n pontú gráfnak, ha nincsen benne

   - kör?

     Megoldás: $n - 1$. Ennyi lehet, fa, ha meg több éle van, akkor van kör, ezt tanultuk.

   - páratlan kör? (páros lehet)

     Megoldás: Ekkor G egy páros gráf. Ennek meg akkor van a legtöbb éle, ha teljes és kiegyensúlyozott, vagyis a $T_{n,2}$ Turán gráf.

   - páros kör? (páratlan lehet)

     Megoldás: Minden él legfeljebb egy körben szerepelhet, mert ét közös élű páratlan körből összeáll egy páros kör. Ha minden körből elhagyunk egy-egy élt, akkor erdőt kapunk, és az éleknek legfeljebb a harmadát hagytuk el. Tehát legfeljebb $\lfloor 3(n - 1)/2 \rfloor$ el lehetett. Ha n páratlan, akkor ennyi lehet is, pl úgy, hogy veszünk $(n - 1)/2$ db háromszöget, amelyeknek van egy közös csúcsa. Ha n páros, akkor is, de az egyik háromszög helyett már csak egy él van.

   - 2 élből álló út?

     Megoldás: Ekkor minden fok max 1, vagyis független élekből áll, max $\lfloor n/2 \rfloor$ él lehet, ennyi meg simán lehet.

   - sem 3 élből álló út, sem kör?

     Megoldás: Minden komponens csillag, tehát $n - 1$.

   - feszítőfa?

     Megoldás:

     Nem összefüggő a gráf, legjobb, ha két teljes gráf uniója, ebből meg az a legjobb, ha az egyik komponens 1, a másik meg $n - 1$ csúcsu. Szoval $\binom{n-1}{2}$.

2. Egy 90 fős társaságból bizonyos párok leveleznek egymással. Akárhogyan választunk ki közülük tíz embert, ezek között mindig van legalább kettő, akik leveleznek egymással. Bizonyítsuk be, hogy a levelező párok száma legalább 405.

   Megoldás: Legyenek a csúcsok az emberek, az élek azt jelentik, hogy a megfelelő emberek *nem* leveleznek egymással. Ebben a gráfban nincs K_{10}, tehát legfeljebb $|E(T_{90,9})| = 100 \cdot \binom{9}{2}$ éle van. Ezért a komplementerének, a levelezés-gráfnak, legalább $\binom{90}{2} - 100 \cdot \binom{9}{2} = 405$.

3. Igazoljuk, hogy az n-csúcsú, m-osztályú $T_{n,m}$ Turán-gráf pontosan akkor nem tartalmaz Hamilton-kört, ha $m = 2$ és n páratlan.

   Megoldás: Ha $m \geq 3$, akkor körbe haladva az osztályokon kapunk egy Hamilton-kört. A legvégén kicsit óvatosnak kell lenni, de megy. Ha $m = 2$ és n páros, akkor is megy ugyanez. Ha $m = 2$ és n paratlan, akkor meg nincs, a kisebb osztályt elhagyva nála eggyel több izolalt pont keletkezik.

4. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ síkbeli vektorok, $|v_i| \geq 1$. Legalább hány párra lesz $|v_i + v_j| \geq 1$?

   Megoldás: Legyenek a gráf csúcsai a vektorok, kettő össze van kötve, ha az összegük legalább 1 hosszú.

   Bármely három vektor közül lesz kettő, aminek az összege legalább 1 hosszú. Tehát a komplementer gráfban nincs háromszög, legfeljebb $|E(T_{n,2})| = \lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ éle lehet, vagyis az eredeti gráfnak legalább $\binom{n}{2} - \lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Ennyi lehet is, egységfektorok, fele jobbra, fele balra.

5. Legkevesebb hány csúcsa lehet egy háromszögmentes, egyszerű G gráfnak, ha $|E(G)| \geq 2|E(K_k)|$?

   Megoldás: Ha n csúcsa van, akkor $|E(G)| \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, tehát $2\binom{k}{2} \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, amiből az jön ki, hogy $n \geq 2k - 1$.

6. Adott a síkon n, nem feltétlenül különböző pont. Legfeljebb mennyi lehet az ezek közül kiválasztható egységnyi távolságra levő pontpárok száma?

   Megoldás: Gráf csúcsai a pontoknak felelnek meg, az él az egységtávolságnak. Itt nincs K_4 mint részgráf, tehát $|E| \leq |E(T_{n,3})|$. Ennyit meg el lehet érni, egy szabályos háromszög csúcsaiba teszünk kb $n/3$ pontot.

7. Mutassuk meg, hogy sík n különböző pontja és n különböző egyenese között legfeljebb $c \cdot n^{\frac{3}{2}}$ illeszkedés lehet, ahol c alkalmas konstans. (Illeszkedés: egy (pont, egyenes) pár, ahol a pont illeszkedik az egyenesre.)

   Megoldás: Vegyük azt a páros gráfot, ahol az egyik osztály a pontoknak, a másik az egyeneseknek felel meg, az él az illeszkedést jelenti. Ebben a gráfban nincs C_4, hiszen két ponton át csak egy egyenes van. (Vagy két egyenes csak egy pontban metszi egymást.) tehát legfeljebb $c \cdot n^{\frac{3}{2}}$ éle lehet.

8. Mutassuk meg, hogy sík n különböző pontja legfeljebb $c \cdot n^{\frac{3}{2}}$ egységtávolságot határozhat meg, ahol c alkalmas konstans.

   Megoldás: Gráf csúcsai a pontok, élek az egységtávolságok. Nincs $K_{2,3}$, hiszen két ponttól csak két másik lehet egységtávolságra. Tehát legfeljebb $c \cdot n^{\frac{3}{2}}$ él lehet.

9. Legfeljebb hány éle lehet egy n csúcsú gráfnak, ha élei kiszínezhetők úgy két színnel, hogy ne keletkezzen egyszínű háromszög.

   Megoldás: Ebben a gráfban nincs K_6, mert annak minden két-színezésében van háromszög. Ilyen gráfokból a $T_{n,5}$-nek van a legtöbb éle. Azt pedig ki is tudjuk jól színezni, vegyünk egy 5 hosszú kört az osztályokon, az ennek megfelelő élek a pirosak, a többi (ami meg egy másik 5 hosszú körnek felel meg) kék.

10. Egy n tagú társaságban eredetileg senki nem ismer senkit. Minimálisan hány bemutatással (egy bemutatás mindig pontosan két ember egymásnak való bemutatását jelenti) érhetjük el, hogy teljesüljenek

a következő feltételek: 1. Bármely három ember között van kettő, akik ismerik egymást (tehát be lettek mutatva); 2. Bárki bárkinek (olyannak is, akit nem ismer) küldhet üzenetet úgy, hogy az üzenetet egymást ismerő (tehát egymásnak bemutatott) emberek adják tovább egymásnak, s az végül célba jut.

Megoldás: G gráf csúcsai az emberek, él: be vannak mutatva. Világos, hogy a komplementer gráfban nincs háromszög, tehát $|E(\overline{G})| \le \lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Sőt, ha pontosan ennyi éle van, akkor $\overline{G}$ izomorf $T_{2,n}$-nel. Ennek alapján $|E(G)| \ge \binom{n}{2} - \lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Ha pontosan ennyi éle lenne, akkor viszont $\overline{G}$ izomorf $T_{2,n}$-nel ezért G nem lenne összefüggő. Tehát $|E(G)| \ge \binom{n}{2} - \lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Ennyi éllel viszont már megvalósítható, legyen $\bar{(}G)$ éppen $T_{2,n}$, minusz egy él. Ekkor $\overline{G}$-ben nincs háromszög és G összefüggő.

11. Egy 49 csúcsú gráfnak 1030 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor a kromatikus száma legalább 8, és hogy pontosan 8 is lehet.

    Megoldás: Ha a kromatikus szám legfeljebb 7 lenne, akkor G egy 7 osztályú gráf, amelyek közül a $T_{49,7}$-nek van a legtöbb éle, 1029, ellentmondás. De ha ehhez még hozzáadunk egy élt, annak 8 a kromatikus száma.

12. Egy n tagú társaságból bármely k ember között van 2 aki kezet fogott. Legalább hány kézfogás történt?

    Megoldás: A nem-kézfogás-gráfban nincs K_k, tehát a kézfogás-gráf élszáma legalább $\binom{n}{2} - |E(T_{n,k-1})|$. Ez nagyjából $(k-1)\binom{n/(k-1)}{2}$.

13. Legyen H egy 5 csúcsú gráf, amely egy él és egy háromszög diszjunkt uniója. Határozzuk meg $ex(n,H)$ értékét. (Legyen $n \ge 100$.)

    Megoldás: A 2 osztályú Turán gráfnak $\lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil$ éle van, és nem tartalmaz háromszöget (három csúcsú teljes gráfot). Tehát nyilván H-t sem tartalmazza részgráfként. Ezért $ex(n,H) \ge \lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil$.

    Vegyünk most egy $\lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil + 1$ élű, n csúcsú G gráfot. A Turán (Mantel) tétel alapján, $ex(n,\Delta) = \lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil$ ahol Δ a három csúcsú teljes gráfot jelenti. Tehát G tartalmaz egy uvw háromszöget. Tegyük fel, hogy H-val izomorf részgráfot viszont nem tartalmaz. Ekkor minden éle az u, v w csúcsok valamelyikére illeszkedik. Vagyis G-nek legfeljebb $3 + 3(n-3)$ éle lehet. De ez ellentmondás, mert $3+3(n-3) < \lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil$! Ezzel beláttuk, hogy G tartalmaz H-val izomorf részgráfot. Tehát $ex(n,H) = ex(n,\Delta) = \lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil$.

Házi feladat

1. a. Egy G gráfnak n csúcsa van, és minden csúcs fokszáma legalább 100. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz 100 hosszú (100 csúcsú) utat!

   b. Egy G gráfnak n csúcsa és e éle van, $e > 100n$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz 100 hosszú (100 csúcsú) utat!

2. Mutassunk minden n-re olyan n csúcsú és $e > 40n - 100000$ élű gráfot, amelyben nincs 100 hosszú (100 csúcsú) út!

3. Legyen H egy 4 csúcsú gráf, amely két független élből áll. Határozzuk meg $ex(n,H)$ értékét minden n-re.