

Kombinatorika és gráfelmélet 2.

6. gyakorlat, 2020. október 16.

Ramsey

Tudnivalók és megoldások

Ramsey tétel (gráfokra, két színnel): Minden $k, l > 0$ számokhoz van olyan (legkisebb) $R = R(k, l)$ szám, amelyre igaz, hogy az R csúcsú teljes gráf éleit tetszőlegesen kiszínezve pirossal és kézzel, vagy van egy k csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle piros, vagy egy l csúcsú, amelynek minden éle kék. Erdős–Szekeres: $R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

Ramsey tétel (gráfokra, r színnel): Minden $r > 0, k_1, k_2, \dots, k_r > 0$ számokhoz van olyan (legkisebb) $R = R(k_1, k_2, \dots, k_r)$ szám, amelyre igaz, hogy az R csúcsú teljes gráf éleit tetszőlegesen kiszínezve az $1, 2, \dots, r$ színekkel, valamilyen $1 \leq i \leq r$ számra vagy van egy k_i csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle i színű.

Ramsey tétel (k -uniform hipergráfokra, r színnel): Minden $r > 0, k \geq 2, k_1, k_2, \dots, k_r > 0$ számokhoz van olyan (legkisebb) $R = R_k(k_1, k_2, \dots, k_r)$ szám, amelyre igaz, hogy az R csúcsú teljes k -uniform hipergráf éleit tetszőlegesen kiszínezve az $1, 2, \dots, r$ színekkel, valamilyen $1 \leq i \leq r$ számra vagy van egy k_i csúcsú teljes rész-hipergráf, amelynek minden éle (k -asa) i színű.

Schur tétel: Minden $t > 0$ -ra létezik olyan $N = N(t)$ szám, amelyre teljesül, hogy akárhogy színezzük ki az $1, 2, \dots, N$ számokat t színnel, mindig lesznek olyan x, y, z egyszínű számok, amelyekre $x + y = z$.

Van der Waerden tétel: Minden $t, k > 0$ -ra létezik olyan $N = N(t, k)$ szám, amelyre teljesül, hogy akárhogy színezzük ki az $1, 2, \dots, N$ számokat t színnel, mindig lesz egy k tagú számtani sorozat, amelynek a tagjai egyszínűek.

Erdős-Szekeres Tétel: Minden n -hez létezik olyan $F(n)$ szám, amelyre teljesül, hogy $F(n)$ általános helyzetű pont között a síkon mindig található n konvex helyzetben.

1. Mutassuk meg, hogy minden legalább 10 csúcsú G gráfra $\omega(G) \geq 4$ vagy $\alpha(G) \geq 3$.

Megoldás: Válasszunk v egy csúcsot. Tegyük fel, hogy van 4 nem-szomszédja. Ha valamelyik 2 ezek közül nem szomszédos, akkor máris van 3 független pont. Ha bármely 2 szomszédos, akkor van teljes 4-es.

Ha viszont nincs 4 nem-szomszédja, akkor van 6 szomszédja. Ezek között van háromszög, vagy üres háromszög ($R(3, 3) = 6$) ha háromszög, akkor v -vel együtt teljes 4-es, ha üres háromszög, akkor az 3 független pont.

2. Bizonyítsuk be, hogy $R(3, 3, 3) \leq 17$ és azt is, hogy $R(3, 4) = 9$.

Megoldás: 17 csúcsú teljes gráf, élek piros, fehér, zöld. Legyen v egy csúcs. Valamelyik színből legalább 6 szomszédja van, hiszen 16 másik pont van. Tegyük fel, hogy pirosból. E 6 szomszéd között ha egyetlen piros él van, akkor megvan a piros háromszög. Ha viszont minden él fehér vagy zöld, akkor valamelyikben lesz háromszög, mert $R(3, 3) = 6$.

Tegyük fel, hogy van olyan gráf 9 csúcson, amelyben nincs 3-as klikk és 4-es üres. Az eH ozó feladat alapján ekkor minden pont fokának 3-nak kellene lenni. De ekkor a foksámok összege 27 lenne, ami nem stimmel.

3. a. Egy teljes gráf éleit kiszíneztük pirossal és kézzel. Bizonyítsuk be, hogy van egy feszítőfa, amelynek minden éle ugyanolyan színű.
b. Igaz az állítás feszítőfa helyett Hamilton úttal is?

Megoldás: a: Elég belátni, hogy vagy a kék, vagy a piros gráf összefüggő. Ha a piros gráf nem összefüggő, akkor a komponensei közötti összes él kék, ez meg nyilván összefüggő.

b. Nem. Legyenek az x pontból menő élek kékek, piros a többi.

4. Igazoljuk, hogy $R_3(4, 4) \leq 21$.

Megoldás: Kiveszünk egy csúcsot, ennek segítségével kapunk a többi 20 csúcson egy él-színezést: egy él színe a kivett csúccsal kiegészítve kapott háromszög színe. 20 pont, van teljes vagy üres 4-es ($20 = \binom{6}{3}$), mondjuk piros. Ezen a 4 ponton ha van egy piros háromszög, akkor megvan a 4 pont csupa piros háromszöggel, ha mind kék, akkor pláne.

5. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget: $R_3(k, l) \leq R_2(R_3(k-1, l), R_3(k, l-1)) + 1$. Ez (nagyságrendileg) milyen felső korlátot ad $R_3(k, k)$ -ra?

Megoldás: Válasszunk le egy v pontot. Ezt a pontot tartalmazó hármasok maradék kettesein definiálhatunk egy színezést, a kettes színe legyen a leválasztott ponttal együtt vett hármas színe.

Ebben van $R_3(k-1, l)$ darab pont, melyeken az összes kettes piros, vagy $R_3(k, l-1)$ darab pont, melyeken az összes kettes kék. Az első esetben ezeken a pontokon vagy van $k-1$ pont, melyeken az összes itteni hármas piros, a v ponttal együtt ez jó lesz, vagy van l pont, melyeken az összes 3-as kék, az is jó.

A másik esetben ugyanígy megy.

6. Igazoljuk, hogy $c \geq 3$ esetén $R_t(n_1, n_2, \dots, n_c) \leq R_t(n_1, n_2, \dots, n_{c-2}, R_t(n_{c-1}, n_c))$ teljesül.

Megoldás: Vegyünk $R_t(n_1, n_2, \dots, n_{c-2}, R_t(n_{c-1}, n_c))$ pontot és színezzük a t -eseket c színnel. Most tekintsük az utolsó két színt egynek. Tudjuk, hogy ekkor létezik n_1 -klick az első színből, vagy n_2 -klick a második színből, vagy \dots $R_t(n_{c-1}, n_c)$ -es klick a $(c-1)$ -edik színből. Ha az első $c-2$ szín valamelyikére, akkor azonnal készen vagyunk. Ha az utolsóra, akkor visszabontva a színeket, ebben lesz n_i -s klick a c_i színből ($i = c-1, c$).

7. Tegyük fel, hogy tudjuk, hogy a Van der Waerden tétel igaz 2 szín felhasználásával, mutassuk meg ebből, hogy igaz 3 színnel is, sőt több színnel is.

Megoldás: Legyen $N(k)$ a Van der Waerden tétel korlátja 2 színre. Most színezzük ki a számokat 3 színnel egészen $N(N(k))$ -ig. Vonjuk össze két színt. Lesz egy $N(k)$ hosszú egyszínű számtani sorozat. Ha a harmadik színből van, akkor kész. Ha az összevont színből, akkor újra használjuk a 2 színű változatot. És már meg is van a k hosszú egyszínű számtani sorozat.

Nyilván ugyanezt megtehetjük akkor is, ha több szín van, pl indukcióval.

8. Mutassuk meg, hogy minden k pozitív egészhez létezik olyan $N(k)$ küszöb, hogy ha $n > N(k)$ és az $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz részhalmazait k színnel színezzük, akkor léteznek az $[n]$ halmaznak olyan diszjunkt X_1 és X_2 részhalmazai, hogy X_1, X_2 és $X_1 \cup X_2$ színe megegyezik. Igaz-e az állítás, három diszjunkt részhalmazra?

Megoldás: Színezzük ki a részhalmazokat. Ebből egy gráf-élszínezést kapunk az $1, 2, \dots, N$ csúcsokon: az ij él (legyen az $\{i+1, i+2, \dots, j\}$ részhalmaz színe. Ha N elég nagy, akkor van egyszínű háromszög. Ez pont három megfelelő részhalmaz lesz.

Persze ugyanez megy három vagy több részhalmazra is.

9. Legyen $H(V, E)$ egy k -uniform hipergráf, amelynek kevesebb mint 2^{k-1} éle van. Bizonyítsuk be, hogy H csúcsai kiszínezhetők pirossal és késsel úgy, hogy semelyik él sem egyszínű.

Megoldás: Színezzük ki a csúcsokat véletlenül, függetlenül, egyenlő valószínűséggel a két színre. Annak a valószínűsége hogy egy él egyszínű lesz, $1/(2^{k-1})$, tehát annak a valószínűsége hogy LESZ rossz él, kisebb mint $|H|/(2^{k-1}) < 1$, tehát van jó színezés.

10. (Végtelen Ramsey tétel) Egy végtelen sok csúcsú teljes gráf éleit kiszíneztük két színnel. Bizonyítsuk be, hogy van egy végtelen sok csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle ugyanolyan színű.

Megoldás: Rendezzük a pontokat, és sorban nézzük őket. Amikor x -et nézzük, megnézzük, hogy utána végtelen sok piros vagy végtelen sok kék szomszédja van és csak azokat tartjuk meg. (Valamelyikből végtelen sok van. Ha mindkettőből, akkor is csak az egyik fajtát tartjuk meg.) Ezekből választjuk a következő pontot, stb. A végén vagy piros vagy kék típusú pontból végtelen sok van, ezek pont jók.

11. Mutassuk meg, hogy ha G n csúcsú, egyszerű gráf, akkor $\max(\alpha(G), \omega(G)) \geq 1 + \log_4 n$.

Megoldás: $R(k, k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq 2^{2k-2} = 4^{k-1}$, azaz ha $n = 4^{k-1}$, akkor $\max(\omega, \alpha) \geq k = \log_4 n + 1$.

12. A sík pontjait kiszínezte valaki pirosra, fehérre és zöldre. Igazoljuk, hogy mindenképpen keletkezett egyszínű, egymástól egységnyi távolságban levő pontpár!

Megoldás: Moser gráf: készítünk egy 7 csúcsú egységtávolság-gráfot, melynek a kromatikus szama 4. Veszünk két szabályos háromszöget, talpuknál összeillesztve, és ezt az alakzatot egy másodfokú pontja körül elforgatjuk úgy, hogy a másik végük épp egységtávolságra legyen egymástól. Könnyen látszik, hogy 3 színnel ez nem színezhető.

13. Igazoljuk, hogy a ki lehet színezni a sík pontjait 9 színnel úgy, hogy ne legyen egyszínű, egymástól egységnyi távolságban levő pontpár! Igazoljuk az állítást 7 színnel is.

Megoldás: 9: Megfelelő méretű négyzetrács, 3×3 -as periodikusan színezve.

7: hatszögrács, egy periódus egy hatszog és a szomszédai.

14. Tegyük fel, hogy a sík pontjait kiszínezte valaki pirosra és zöldre úgy, hogy mindkét színt használta. Mutassuk meg, hogy mindenképpen keletkezett egymástól egységnyi távolságban levő pontpár, melynek egyik tagja piros, a másik zöld! Igaz-e, hogy a sík ilyen kiszínezésekor biztosan található olyan egységoldalú szabályos háromszög, aminek csúcsai egyszínűek?

Megoldás: Különböző színű pontok között vegyünk egy egységszakaszból álló töröttvonalat. Lesz két szomszédos, különböző színű pontja.

Nem igaz, a szabályos háromszög magasságával megegyező szélességű, félig nyílt sávokat színezzük felváltva.

15. Tegyük fel, hogy a sík pontjait kiszínezte valaki pirosra és zöldre úgy, hogy nincs két zöld pont egymástól egységtávolságra. Legyen T egy tetszőleges háromszög. Bizonyítsuk be, hogy van egy T -vel egybevágó háromszög, amelynek mind a három csúcsa piros.

Megoldás: Legyen a háromszög legrövidebb oldala x .

1. eset: nincs két zöld pont egymástól x távolságra.

Vegyünk egy zöld pontot (ha nincs zöld pont, készen vagyunk) a körülötte levő x sugarú kör piros. Tegyük rá két legközelebbi csúcsát a háromszögnek és forgassuk körbe. A harmadik csúcs egy körön mozog, ha van a körön piros pont, akkor megvan a piros háromszög, ha nincs, akkor van zöld x távolság, ellentmondás.

2. eset: van két zöld pont egymástól x távolságra. Vagyunk két ilyen zöld pontot és mindkettő körül egy egységkört. Ezek pirosak. Tegyük rá a háromszög két x -re levő csúcsát a két körre és menjünk velük körbe a körökön. A harmadik csúcs is egy egységkörön mozog, ha van a körön piros pont, akkor megvan a piros háromszög, ha nincs, akkor van zöld egységtávolság, ellentmondás.

16. Legyen a_n a természetes számok tetszőleges szigorúan növvő végtelen sorozata. Mutassuk meg, hogy található akármilyen hosszú részsorozat, amelyben bármely két elem relatív prím, vagy semelyik két elem sem relatív prím.

Megoldás: Legyenek egy gráf csúcsai a számok, egy él két szám relatív prím, piros, ha nem. Ramsey: van akármilyen hosszú egyszínű részgráf.

17. Bizonyítsuk be, hogy minden $t > 0$ -ra létezik olyan $M = M(t)$ szám, amelyre teljesül, hogy akárhogyan színezzük ki az $1, 2, \dots, M$ számokat t színnel, mindig lesznek olyan x, y, z egyszínű számok, amelyekre $x + y = z$ és $x \neq y$.

Megoldás: Ugyanúgy, mint a Shur tétel bizonyításánál, a különbség színével színezzük az élt, csak most teljes egyszínű négyest keresünk. Itt már ki tudunk jól választani három különbséget.

18. Bizonyítsuk be, hogy minden $t, k > 0$ -ra létezik olyan $M = M(t, k)$ szám, amelyre teljesül, hogy akárhogyan színezzük ki az $1, 2, \dots, M$ számokat t színnel, mindig lesz egy k tagú mértani sorozat, amelynek a tagjai egyszínűek.

Megoldás: Nézzük csak a 2 hatványokat. Csináljunk egy új színezést, i színe legyen 2^i eredeti színe. Ebben egy számtani sorozat megfelel az eredetiben egy mártani sorozatnak.

19. Kiszínezhető-e az egész számok két színnel úgy, hogy ne létezen egyszínű végtelen számtani sorozat? Hát mértani?

Megoldás: Igen, mindkettő. A négyzetszámok között felváltva színezve nem lesz végtelen számtani. A faktoriálisok között felváltva színezve meg nem lesz végtelen mértani.

20. Mutassunk olyan $(k - 1)^2$ pontú gráfot, amelyben nincs sem teljes k -as sem üres k -as!

Megoldás: $k - 1$ darab K_{k-1} .

21. P egy olyan síkbeli ponthalmaz, amelyben bármely két pont közötti távolság elgész és nincs az összes pont egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy P véges sok pontból áll.

Megoldás: Vegyünk 3 nem egy egyenesen levő pontot, x, y, z . Az összes többi pont az x, y fókuszú hiperbolákon van. (Ezek a hiperbolák az olyan p pontok mértani helyei, amelyekre a $px - py$ távolság különbség $= K$ egész.) De közben az x, z fókuszún is. Viszont ezeknek csak véges sok metszéspontja van.

22. Bizonyítsuk be, hogy minden n -hez létezik olyan $K(n)$, hogy tetszőleges $K(n)$ különböző pont a síkon legalább n különböző távolságot határoz meg.

Megoldás: Tekintsünk $R(4, 4, \dots, 4)$ $((n - 1)$ -szer) pontot. Tegyük fel, hogy csak $n - 1$ távolságot határoznak meg. Színezzük ki az éleket a távolságok szerint, $n - 1$ színnel. $R(4, 4, \dots, 4)$ definíciója szerint valamelyik színben lesz teljes négyes. Csakhogy ez lehetetlen, négy pont között nem lehet az összes távolság egyforma.

23. Mutassuk meg, hogy minden k pozitív egészhez létezik olyan $N(k)$ küszöb, hogy ha kiszínezzük a $1, 2, 3, \dots, N(k)$ számokat k színnel, akkor található három egyszínű szám, x, y, z , amelyekre $x + y = 2z$.

Megoldás: A Van der Waerden tétel szerint ha $N(k)$ elég nagy, akkor ha kiszínezzük a $1, 2, 3, \dots, N(k)$ számokat k színnel, akkor található három egyszínű szám, x, y, z , amelyek számtani sorozatot alkotnak. Ekkor viszont $x + y = 2z$. (Ha z a középső.)

Házi feladat

1. Döntsük el, hogy igaz-e a következő állítás. Minden $n \geq 1$ -hez van olyan N , hogy akárhogyan színezzük ki az N elemű halmaz összes részhalmazát két színnel, található olyan n elemű részhalmaz, amelynek az összes részhalmaza ugyanolyan színű.
2. Mutassuk meg, hogy minden k pozitív egészhez létezik olyan $N(k)$ küszöb, hogy ha $n > N(k)$ és az $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz részhalmazait k színnel színezzük, akkor léteznek az $[n]$ halmaznak olyan diszjunkt X_1 és X_2 részhalmazai, hogy X_1, X_2 és $X_1 \cup X_2$ színe megegyezik. Igaz-e az állítás, három diszjunkt részhalmazra?
3. Mutassuk meg, hogy minden k pozitív egészhez létezik olyan $N(k)$ küszöb, hogy ha kiszínezzük a $2, 3, \dots, N(k)$ számokat k színnel, akkor található három egyszínű szám, x, y, z , amelyekre $x + y = z + 1$.