

## Kombinatorika és gráfelmélet 2.

5. gyakorlat, 2020. október 9.

### Listaszínezés

#### Tudnivalók:

$G$  minden  $v$  csúcsához tartozik egy  $L(v)$  színlista.  $G$   $L$ -színezhető, ha van olyan (jó) színezése, ahol minden  $v$  csúcs színe,  $c(v) \in L(v)$ .

$G$  listaszínezési száma  $ch(G)$  a legkisebb  $k$ , amelyre igaz, hogy ha minden  $v$ -re  $|L(v)| = k$ , akkor  $G$   $L$ -színezhető.

Minden  $G$ -re  $\chi(G) \leq ch(G)$ , és minden  $k$ -ra van olyan  $G$ , hogy  $\chi(G) = 2$  de  $ch(G) > k$ .

Minden  $G$ -re  $ch(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

Listaszínezési sejtés: Ha  $G$  élgráf, akkor  $\chi(G) = ch(G)$ .

Galvin tétel: Ha  $G$  páros gráf élgráfja, akkor  $\chi(G) = ch(G)$ .

Thomassen 94: Ha  $G$  síkgráf, akkor  $ch(G) \leq 5$ .

Voigt 93: Van olyan  $G$  síkgráf, amelyre  $ch(G) = 5$ .

1. Határozzuk meg  $ch(K_{2,4})$  értékét. ( $K_{2,4}$  a két színosztályában 2 és 4 pontot tartalmazó teljes páros gráfot jelöli.)

*Megoldás:* A válasz 3. Először adunk 2-es listákat, amiről nem lehet kiszínezni. Legyen a két fenti pont listája (1, 2) és (3, 4), az alsóké (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4). Bárhogy színezzük a felső pontokat, minden lehetséges színpárhoz van egy olyan listájú alsó csúcs, ami bedöglük.

3 hosszú listák: először kiszínezzük a felső két pontot, tetszőlegesen. Utána az alsókat. Minden alsónak csak a két felső szomszédja van, tehát max 2 tiltott szín, ezért 3 hosszú listákról ki lehet őket színezni.

2. Igaz-e, hogy ha  $\chi(G) = ch(G)$ , akkor  $\chi(\overline{G}) = ch(\overline{G})$ ?

*Megoldás:* Nem, pl ha  $G$  két diszjunkt háromszög:  $\chi = ch = 3$ , de a komplementere a  $K_{3,3}$ , aminek  $\chi = 2$ ,  $ch = 3$ .

3. Igaz-e, hogy ha a  $G$  gráf minden csúcsához adott egy legalább  $ch(G)$  méretű színlista, akkor  $G$  alkalmas csúcssorrend esetén mohón kiszínezhető úgy, hogy minden csúcsnak a listáján szereplő legkisebb olyan színt választjuk, ami nem azonos az eddigi megszínezett, az adott csúccsal szomszédos csúcsok valamelyikének színével?

*Megoldás:* Igen. Mondjuk legyenek a színek az 1, 2, ..., számok. Vegyük az adott listákhoz azt a színezést, ahol a (növekvő) szín-sorozat (mint számok) lexikografikusan a lehető legkisebb. (Vagyis a lehető legtöbb 1-es, azon belül a lehető legtöbb 2-es, stb. Ezután vegyük a csúcsokat a színük szerint növekvő sorrendben. Erre pont az adott színezést kell kapnunk.

4. Legyen  $K_{2,2,\dots,2}$  az a gráf, aminek komplementere  $n$  diszjunkt él. Határozzuk meg a  $ch(K_{2,2,\dots,2})$  listaszínezési számot.

*Megoldás:*  $n$ . Annyi biztos kell, mert van benne teljes  $n$ -es. Most vegyünk mindegyik csúcsához egy  $n$ -es listát. Ha van olyan pár, amiknek a listájának van közös színe, akkor színezzük ki őket erre a színre és ezt a színt húzzuk ki a többiek listájáról, indukció. Ha nincs: definiáljunk egy páros gráfot, alul csúcsok (hazasparok) felül színek, és könnyű ellenőrizni a Hall feltételt, van az alsókat lefedő párosítás. (Lásd csokis feladat, Kombi1.)

5. Mutassunk olyan gráfot, ami egyetlen gráfnak sem élgráfja.

*Megoldás:* Pl egy teljes ötös mínusz egy él. Tegyük fel, hogy élgráf. Van benne egy teljes négyes, ez négy egy csúcsú élnek felel meg. Az ötödik csúcsnak megfelelő él is ebbe a csúcsba kell hogy menjen, mert hárommal is össze van kötve. De akkor a negyedikkel is szomszédos, irtózatós ellentmondás!!!

6. Mutassuk meg, hogy ha  $G$  élgráf, akkor  $ch(G) \leq 2\chi(G) - 1$ .

*Megoldás:* Legyen  $G = L(H)$ . Tekintsünk  $G$ -ben egy csúcsot. Ez  $H$  egy élének felel meg, és ennek az élnek legfeljebb  $\Delta(H) - 2$  másik éllel lehet közös végpontja (mindkét végén max  $\Delta(H) - 1$ -gyel). Tehát  $\Delta(G) \leq 2\Delta(H) - 2$ . Ekkor viszont  $ch(G) \leq \Delta(G) + 1 \leq 2\Delta(H) - 1 \leq 2\chi(G) - 1$ .

7. Igazoljuk, hogy ha a véges, egyszerű  $G$  gráf minden  $v$  csúcsára  $|L(v)| > d(v)$  teljesül, akkor  $G$   $L$ -listaszínezhető. ( $d(v)$  jelöli a  $v$  csúcs fokszámát.)

*Megoldás:* Mohó színezéssel.

8. Mutassuk meg, hogy tetszőleges  $T$  legalább két pontú fára  $ch(T) = 2$ .

*Megoldás:* Indukció a csúcsok számára. 2-re trivi, legyen  $n > 2$ ,  $T$   $n$  csúcsú fa és minden csúcson 2 hosszú listák.  $T$ -nek van egy levele (1 fokú csúcsa)  $v$ , szomszédja  $u$ . Ekkor  $T \setminus v$  egy  $T'$  fa, amit indukcióval ki tudunk színezni a listákról. Végül  $v$ -t is ki tudjuk színezni, mert van a listáján  $u$  színétől különböző szín.

Ja, és persze  $ch \geq 2$ , ezért  $ch = 2$ .

9. Bizonyítsuk be, hogy ha  $C$  páratlan hosszú kör, akkor  $ch(C) = 3$ .

*Megoldás:* Egyrészt  $ch(C) \geq \chi(C) = 3$ . Másrészt mohó színezéssel végigszágulunk a csúcsokon. ( $\Delta = 2$ )

10. Tetszőleges  $G$  gráfra legyen  $3G$  a következő gráf. Vesszük  $G$  három diszjunkt példányát, és az egymásnak megfelelő csúcsokat a különböző példányokban összekötjük.

Bizonyítsuk be, hogy ha  $G$  síkgráf, akkor a  $3G$  gráf listaszínezési száma legfeljebb 7. (Vagyis  $ch(3G) \leq 7$ .)

*Megoldás:* Tegyük fel, hogy adottak a 7 hosszú listák. Először az egyik példányt színezzük, 7 hosszú listákról simán megy, még 5 hosszúról is menne. Most a második példányban minden listáról kihúzzuk a kiszínezett megfelelő csúcs színét, még mindig legalább 6 hosszúak a listák, megint ki tudjuk színezni a listákról. Most pedig a harmadik példányban minden listáról kihúzzuk a kiszínezett megfelelő csúcsok színét, még mindig legalább 5 hosszúak a listák, megint ki tudjuk színezni a listákról.

11. Egy  $G$  gráfot sikerült lerajzolni úgy, hogy összesen egy él-metszés van. Bizonyítsuk be, hogy

a.  $ch(G) \leq 6$ ,

b.  $ch(G) \leq 5$ .

*Megoldás:*

a: Ebből a gráfból ha elveszünk egy metsző élt, akkor síkgráfot kapunk, tehát ennek a gráfnak max  $3n - 5$  éle van. Ezért van max 5-ödfokú csúcs, elveszünk, indukcióval kiszínezzük a maradékot, és a 6 hosszú listáról  $v$ -nek is lesz megfelelő szín.

b: Feltehetjük, hogy  $G$  háromszögelt, kivéve a keresztet, ami egy négyszögben van. Hagyjuk el a két keresztelő élt, legyen a négyszög a külső tartomány. Az 5-os listákról vegyünk egy-egy színt a két szomszédos csúcsnak, és 3 – 3 különbözőt a szembelevőknek. Thomassen tétele alapján ezekről a listákról ki lehet színezni.

12. Jelölje  $\chi''(G)$  a  $G$  gráf teljes kromatikus számát, azaz a minimális színszámot, ami szükséges érvényes teljes színezéshez úgy, hogy a csúcsokat és az éleket is színezzük, azzal a feltétellel, hogy érintkező elemek (összekötött csúcsok, közös csúccsal rendelkező élek, egy él és annak egy végpontja) nem lehetnek azonos színűek. Igazoljuk, hogy a listaszínezési sejtésből következne, hogy  $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 3$  minden  $G$  gráfra. (Listaszínezési sejtés: Ha  $G$  élgráf, akkor  $\chi(G) = ch(G)$ .)

*Megoldás:* Minden  $e$  élre legyen  $L(e) = \{1, 2, \dots, \Delta(G) + 3\}$ . Most színezzük is  $G$  csúcsait a szokásos módon  $\Delta(G) + 1$  színnel. Minden  $e$  él listájából húzzuk ki a két végpontjának a színét. Most minden élen van egy legalább  $\Delta(G) + 1$  hosszú lista, ezekről a listákról kell színezni úgy, hogy a szomszédos élek különböző színűek legyenek. A Vizing tétel alapján  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ , a listaszínezési sejtés alapján pedig  $ch(L(G) = \chi'(G)$ , tehát a  $\Delta(G) + 1$  hosszú listákról ki tudjuk színezni az éleket.

13.  $G$  egy síkgráf, amelynek legalább 4 csúcsa van. Van 7-féle színünk,  $\{1, 2, \dots, 7\}$ , ezekkel ki akarjuk színezni a csúcsokat. De valaki megelőzött minket, és kiszínezett 4 csúcsot, amelyek egy teljes 4-est feszítenek, az 1, 2, 3, illetve 4 színekkel. Bizonyítsuk be, hogy be tudjuk fejezni a színezést, vagyis ki tudjuk színezni a többi csúcsot az  $\{1, 2, \dots, 7\}$  színekkel úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek.

*Megoldás:* 1. megoldás: Legyen  $v_1, v_2, v_3, v_4$  a négy kiszínezett csúcs,  $v_i$  színe  $i$ . Rajzoljuk le  $G$ -t a síkra. A  $v_1, v_2, v_3, v_4$  között futó élek a síkot 4 tartományra bontják, legyenek ezek  $T_1, T_2, T_3, T_4$ , úgy, hogy  $T_i$  határán

$v_1, v_2, v_3, v_4$  közül a  $v_i$ -től különböző három csúcs van. A  $G$  gráf különböző  $T_i$  tartományokban levő csúcsai nincsenek összekötve, így a különböző tartományokban levő csúcsokat színezzük egymástól függetlenül. Tekintsük a  $T_i$  tartományban levő csúcsokat. Ezek egy síkgráfot feszítenek  $G$ -ben, színezzük ki őket az  $i, 5, 6, 7$  színekkel. A négyszíntétel szerint ez megtehető. Ezt elvegezve  $i = 1, 2, 3, 4$ -re,  $G$  egy színezését kapjuk, amely kielégíti a feltételeket.

2. megoldás:

Legyen  $v_1, v_2, v_3, v_4$  a négy kiszínezett csúcs,  $v_i$  színe  $i$ . Egy pillanatra felejtsük el  $v_1, v_2, v_3, v_4$  színét. Színezzük ki  $G$ -t az  $a, b, c, d$  színekkel. A négyszíntétel szerint ez menni fog. Mivel  $v_1, v_2, v_3, v_4$  egy teljes 4-est feszítenek, különböző színűek, vagyis éppen az  $a, b, c, d$  színekkel vannak színezve. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy  $v_1$  színe  $a$ ,  $v_2$  színe  $b$ ,  $v_3$  színe  $c$ ,  $v_4$  színe  $d$ . Színezzük át az  $a$  színű pontokat 1 színűre, a  $b$  színű pontokat 2 színűre, a  $c$  színű pontokat 3 színűre, a  $d$  színű pontokat 4 színűre. Ez a színezés kielégíti a feltételeket, ráadásul az 5, 6, 7 színeket nem is használtuk!

14. A  $G$  gráfból bárhogy elhagyunk 4 élt, a kapott gráf síkgráf. Bizonyítsuk be, hogy  $G$  listaszínezési száma,  $ch(G) \leq 6$ .

*Megoldás:*

Tegyük fel, hogy  $G$ -ben minden pont foka legfeljebb 3. Ekkor könnyen látható, hogy  $ch(G) \leq 4$ , tetszőleges 4 hosszú színlistákról sorban ki tudjuk színezni a csúcsokat.

Tehát feltehetjük, hogy van olyan  $v$  csúcs, amelynek a foka,  $d(v) \geq 4$ . Hagyjunk el 4  $v$ -re illeszkedő élt, legyen  $G'$  a kapott gráf, amely a feltétel szerint síkgráf. Most hagyjuk el  $v$ -t  $G'$ -ből, az így kapott  $G''$  gráf is síkgráf. Tekintsünk tetszőleges 6 hosszú színlistákat  $G$  csúcsain. Meg kell mutatnunk, hogy ezekről a listákról kiszínezhető  $G$ . Színezzük ki először  $v$ -t egy tetszőleges  $c$  színnel a listájáról. Most húzzuk ki a  $c$  színt minden további csúcs listájáról. Tehát a  $G''$  gráfot kell kiszíneznünk és minden csúcsnak 5 vagy 6 hosszú a színlistája. Mivel  $G''$  síkgráf, Thomassen tétele szerint ez megtehető. Ez pedig, a  $c$  színű  $v$ -t visszatéve,  $G$  megfelelő színezését adja a 6 hosszú listákról.

15. A  $G$  síkgráf minden csúcsához tartozik egy 5 hosszú színlista, kivéve egy csúcsot, amelyhez 1 hosszú lista tartozik. Bizonyítsuk be, hogy  $G$  kiszínezhető az adott listákról.

*Megoldás:* Thomassen

### Házi feladat

1. Bizonyítsuk be, hogy  $ch(K_{n,n^n}) = n + 1$  minden pozitív egész  $n$ -re. ( $K_{n,n^n}$  a két színosztályában  $n$  és  $n^n$  pontot tartalmazó teljes páros gráfot jelöli.)

2. Bizonyítsuk be, hogy ha  $C$  páros hosszú kör, akkor  $ch(C) = 2$ .