Kombinatorika és gráfelmélet 2.

3+4. gyakorlat, 2020. szeptember 25.

Dualitás, Whitney

Tudnivalók: G síkbarajzolt gráf duálisa, G^*: Minden tartományba egy csúcsot, bármely két, szomszédos tartománynak megfelelő csúcsot összekötünk minden közös határt képező élen keresztül.

H a G *absztrakt duálisa*: van az élek között bijekció, ami körből vágást, vágásból kört csinál.

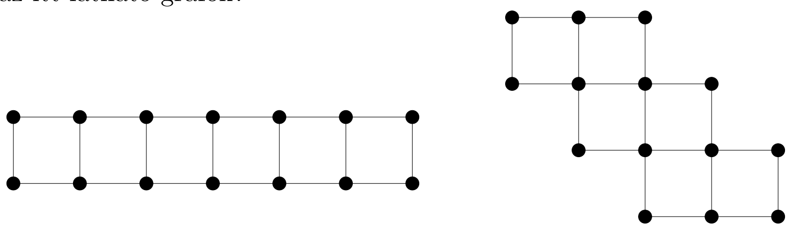
H és G *gyengén izomorfak*: van az élek között bijekció, ami körből kört, vágásból vágást csinál.

Whitney 1: G-nek van absztrakt duálisa akkor és csak akkor, ha G síkgráf.

Whitney 2: Legyen G síkgráf, G és H gyengén izomorfak. Ekkor
1. H is síkgráf, 2. G^* és H^* gyengén izomorfak, 3. G és G^{**} is gyengén izomorfak.

Whitney 3: Tegyük fel, hogy G és H gyengén izomorfak. Ekkor meg lehet kapni G-ből H-t a következő háromféle operáció ismételt alkalmazásával: (a) Ha a gráfnak van elvágó pontja, akkor a pontnál kettévágjuk a gráfot (az elvágó pont mindkét részben benne lesz). (b) Két diszjunkt gráfot összeragasztunk egy-egy csúcsuknál. Vagyis azonosítjuk a két csúcsot. (c) Ha a gráfnak van két pontja, amik együtt elvágók, akkor itt kettévágjuk a gráfot és megint összeragasztjuk őket, a két pontot megcserélve az egyik komponensben.

1. Gyengén izomorfak-e az itt látható gráfok?



   Megoldás: Igen, a duálisaik izomorfak. Másképp: a Whitney tételben szereplő 3 operációval könnyedén eljuthatunk az egyikből a másikba.

2. Bizonyítsuk be, két fa pontosan akkor gyengén izomorf, ha ugyanannyi pontjuk van.

   Megoldás: Ha a két fa gyengén izomorf, akkor ugyanannyi élük van, tehát ugyanannyi pontjuk is. Viszont ha ugyanannyi pontjuk van, akkor minden, élek közti bijekció megfelelő, mert minden él vágás és nincs kör.

3. Mutassuk meg, hogy tetszőleges egyszerű, síkgráf élhalmaza előáll, mint 2 páros gráf élhalmazának uniója.

   Megoldás: A Négyszínetétel alapján színezzük ki az 1, 2, 3, 4. színekkel. Az egyik páros gráfba tartozzanak az 12, 23, 34 típusú élek, a másikba a 24, 41, 13 típusú élek. Más él nincs.

4. A G és a G^* véges egyszerű gráfok egymás duálisai. Bizonyítsuk be, hogy $\min\{\delta(G), \delta(G^*)\} = 3$. δ a legkisebb fokszám.

   Megoldás: Ha van háromszög tartomány G-ben, akkor G^*-ben van 3-fokú pont. Ha nincs, akkor viszont legfeljebb $2n-4$ éle van. De ekkor nem lehet minden fokszáma legalább 4, mert akkor legalább $2n$ éle lenne.

5. Legyen G olyan $n \geq 3$ csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, melyben az élek száma $3n-6$. Mennyi G duálisának maximális fokszáma?

   Megoldás: Ebben az esetben G egy háromszögelés, minden tartomány háromszög, tehát G^* minden csúcsának 3 a foka.

6. Jelölje $F_n = K_{n,n} - nK_2$ azt a páros gráfot, melyet úgy kapunk a $K_{n,n}$ teljes páros gráfból, hogy elhagyjuk belőle egy teljes párosítás éleit. Milyen n-ek esetén lesz F_n síkbarajzolható?

   Megoldás: $n \leq 4$-re könnyű síkbarajzolni. $n \geq 5$-re meg van benne topologikus $K_{3,3}$.

7. Tegyük fel, hogy G síkbarajzolt gráf, G minden lapja háromszög és G^* minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van G-nek?

   Megoldás: A feltételek miatt G-ben minden fokszám 4, tehát $e = 2n$. Ugyanakkor $3t = 2e$. Ezeket beírva az Euler formulába: $n - 2n + 4n/3 = 2$, $n = 6$, $e = 12$. Ez az oktaéder gráf.

8. Legfeljebb mennyi a perfekt síkgráfok kromatikus száma?

   4-et könnyű elérni, K_4. Több meg nem lehet a Négyszíntétel miatt.

9. Bizonyítsuk be, hogy minden (legalább három csúcsú) síkgráfnak van legalább három olyan csúcsa, amelyeknek a foka kevesebb mint hat.

   Megoldás: Feltehetjük, hogy a gráf összefüggő, különben komponensenként érvelünk. $\sum_1^n d_i \leq 6n - 12$, de egy d_i-n csak 5-öt veszthetünk a 6-hoz képest, és összesen legalább 12 a veszteség. Tehát legalább 3 csúcs foka kisebb, mint 6.

10. A G összefüggő, síkbarajzolt gráfnak 200 éle van, duálisa egyszerű, páros gráf. Bizonyítsuk be, hogy G-nek legfeljebb 100 csúcsa van.

    Megoldás: G-ben minden csúcs foka legalább 4. Miért? 0 nem lehet, mert G összefüggő. 1 se, mert az G^*-ban hurokélet jelentene, de G^* egyszerű. 2 se, mert az G^*-ban párhuzamos éleket jelentene, de G^* egyszerű. 3 se, mert az G^*-ban 3 oldalú tartományt jelentene, de G^* páros.

    De ha minden fok legalább 4, akkor $200 = e \geq 2n$, tehát $n \leq 100$.

11. A G egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt gráfnak $n \geq 3$ csúcsa van, és nem tartalmaz 3, 4 és 5 hosszú kört. Bizonyítsuk be, hogy G duálisa, G^*, nem egyszerű gráf.

    Megoldás: A feltételek miatt G^*-ban nincs 3, 4, és 5 fokú csúcs. Hasonlóan előzőhoz, 0, 1 és 2 fokú csúcs sem lehet G^*-ban, mert G egyszerű és G^* összefüggő. Tehát minden fokszám legalább 6. Vagyis legalább $3n$ éle van, miközben síkgráf. Ez csak úgy lehetséges, hogy nem egyszerű gráf.

12. Tetszőleges összefüggőf síkbarajzolható G gráfhoz mutassunk olyan, önmagával duális G' síkbarajzolt gráfot, aminek G feszített részgráfja.

    Megoldás: Lerajzoljuk G-t, vesszük a duálisát, G^*-ot. Mindkettőnek van egy olyan csúcsa, ami a mási végtelen tartományának felel meg. Na ennél a két pontnál ragasszuk össze G-t és G^*-ot, ez jó lesz.

13. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek F_1, F_2, …, F_t a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Határozzuk meg a

    $$s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| - 1)$$

    mennyiség maximumát ha G tetszőleges 10 csúcsú síkbarajzolt gráf lehet.

    Megoldás: Ha behúzunk egy plusz élt G-be, az növeli a kifejezés értékét. (Lesz egy F taromány, amiből íkapjuk az F_1 és F_2 tartományokat. $|F_1| + |F_2| = |F| + 2$, tehát $|F| - 1 = |F_1| - 1 + |F_2| - 1 - 1$.) Tehát a kifejezés háromszögelésekre maximális, ekkor $s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| - 1) = 2 \cdot (2n - 4) = 4n - 8 = 32$.

    Másképp: Tudjuk, hogy $10 - e + t \geq 2$, tehát $t \geq e - 8$. Tehát $s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| - 1) = 2e - t \leq 2e - e + 8 = e + 8$. Ez akkor maximális, ha e maximális, vagyis $3 \cdot 10 - 6 = 24$, így a válasz 32.

14. Egy összefüggő G síkbarajzolt gráfnak 200 csúcsa és 300 éle van. Tudjuk, hogy a duálisa egyszerű. Bizonyítsuk be, hogy G–ben a maximális fokszám 3.

    Megoldás: Ahogy korábban már volt, abból, hogy G összefüggő, következik, hogy nincs 0 fokú pont. Abbol, hogy G^* egyszerű, az következik, hogy G-ben nincs 1 és 2 fokú pont. Tehát $d_i \geq 3$, vagyis $600 \geq \sum_1^{200} d_i = 2e = 600$. Ez viszont csak úgy lehet, ha minden d_i éppen 3.

15. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $e(G) - n(G) - 3t(G)$ mennyiség maximumát. (Ha G tetszőleges síkbarajzolt gráf lehet.)

   Megoldás: Euler: $n - e + t \geq 2$ tehát $e - n \leq t - 2$. Tehát $e - n - 3t \leq t - 2 - 3t = -2 - 2t \leq -2 - 2 = -4$ mivel $t \geq 1$. Ez a -4 el is érhető, például ha G egy fa.

16. Bizonyítsuk be, hogy egy síkbarajzolható gráf tartományai akkor és csak akkor színezhetők ki két színnel, ha minden pont foka páros.

   Megoldás: Ha ki lehet színezni a tartományokat, akkor egy csúcsból körbenézve váltakozni kellene a színeknek, tehát minden fok páros.

   Most tegyük fel, hogy minden fok páros. Azt is feltehetjük, hogy G összefüggő, különben komponensenként érvelünk. Ekkor G-nek van Euler köre. Ez egy c zárt görbe. A sík egy tetszőleges pontjának a színe legyen fehér, ha c páros sokszor kerüli meg, és fekete ha páratlan sokszor.

Házi feladat

1. Legyen G egy páros, síkbarajzolt gráf. Képezzük a G' gráfot a következő módon. Vegyünk fel egy-egy csúcsot G minden tartományában, és kössük össze a különböző szomszédos tartományoknak megfelelő csúcsokat. Ezenkívül kössünk össze minden tartománynak megfelelő csúcsot G azon csúcsaival, amelyek a megfelelő tartomány határán vannak. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G') \leq 6$.

Mutassunk olyan G páros, nem feltétlenül egyszerű, síkbarajzolt gráfot, amelyre a fenti módon képezett G' gráf kromatikus száma 5.

2. Tetszőleges n csúcsú G síkbarajzolt gráfra legyenek $d_1, d_2, \ldots, d_n$ a csúcsok fokszámai, $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek F_1, F_2, …, F_t a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Legyen

$$s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| + a) + \sum_{i=1}^{n} (d_i + a)\,.$$

Határozzuk meg a értékét úgy, hogy $s(G)$ értéke ugyanannyi legyen minden, legalább 3 csúcsú, egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt G gráfra.