Kombinatorika és gráfelmélet 2.

2. gyakorlat, 2020. szeptember 18.

Összehasonlítás gráfok, Dilworth tétel

Tudnivalók.
Legyen H egy halmaz, es $\preceq$ egy reláció H elemein. A $\preceq$ reláció
reflexív, ha minden $a \in H$ esetén $a \preceq a$;
antiszimmetrikus, ha $a \preceq b, b \preceq a \longrightarrow a = b$;
tranzitív, ha $a \preceq b, b \preceq c \longrightarrow a \preceq c$.

Egy reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációt **részbenrendezésnek** hívunk, a $(H, \preceq)$ párt pedig részben rendezett halmaznak. Ha $a \preceq b$ és $a \neq b$, azt úgy jelöljük, hogy $a \prec b$.

Mostantól legyen $(H, \preceq)$ egy részben rendezett halmaz. Az $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset H$ részhalmazt **láncnak** hívjuk, ha $a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_k$, és **antiláncnak**, ha $a_1, a_2, \ldots, a_k$ közül semelyik kettő sem összehasonlítható.

Dilworth tétel. Legyen a a $(H, \preceq)$ részben rendezett halmazban található legnagyobb antilánc mérete. Ekkor H felbontható a darab lánc uniójára, kevesebbre viszont nem.

duális Dilworth tétel. Legyen l a $(H, \preceq)$ részben rendezett halmazban található legnagyobb lánc mérete. Ekkor H felbontható l darab antilánc uniójára, kevesebbre viszont nem.

A $(H, \preceq)$ részben rendezett halmazhoz tartozó $G(H)$ összehasonlítás gráf csúcsai H elemei, két elem akkor és csak akkor van összekötve éllel, ha összehasonlíthatóak.

Lemma. Az összehasonlítás gráfok perfektek.

1. G egy n csúcsú perfekt gráf. Bizonyítsuk be, hogy $\omega(\overline{G})\omega(G) \geq n$.

2. Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egy számsorozat. Ebből képezzük a G gráfot a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsokon a következő módon: minden $i > j$ számpárra a v_i és v_j csúcsok össze vannak kötve G-ben akkor és csak akkor, ha $a_i > a_j$.

   Bizonyítsuk be, hogy G minden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sorozat esetén perfekt!

3. (Erdős-Szekeres tétel) Legyen $A = a_1, a_2, \ldots, a_m$ egy csupa különböző számból álló számsorozat, $m = kl+1$, $k, l > 0$.

   a. Bizonyítsuk be, hogy A tartalmaz egy $l+1$ hosszú növekedő vagy egy $l+1$ hosszú csökkenő részsorozatot.

   b. Bizonyítsuk be, hogy az állítás $m = kl$ esetén már nem feltétlenül igaz.

4. a. Van egy csomó kartondobozunk, melyek a G gráf csúcsainak felelnek meg. Két csúcs akkor van összekötve, ha a megfelelő dobozok közül egyik sem rakható a másikba. Igazoljuk, hogy G perfekt.

   b. Mi a helyzet hajlékony dobozokkal?

5. Adott a síkon néhány körvonal, ezekhez rendeljük a következő G gráfot. G csúcsai feleljenek meg egy-egy megadott körvonalnak, és kettő akkor legyen összekötve, ha a két megfelelő körvonal egyike teljesen a másik belsejében halad. Bizonyítsuk be, hogy az így megadott G gráf perfekt.

6. Legyen a G gráf csúcshalmaza egy véges halmaz néhány tetszőleges részhalmaza. Két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő részhalmazok közül valamelyik tartalmazza a másikat. Bizonyítsuk be, hogy G perfekt.

7. Adott egy ABC háromszög, és benne n pont. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható $\sqrt[3]{n}$ pont úgy, hogy bármely kettő által meghatározott egyenes a háromszögnek ugyanazt a két oldalát metszi.

8. Adott n pont a síkon. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük $\sqrt{n}$ pont úgy, hogy bármely kettő által meghatározott egyenes az x-tengellyel *legalább* 30 fokos szöget zár be, vagy $\sqrt{n}$ pont úgy, hogy bármely kettő által meghatározott egyenes az x-tengellyel *legfeljebb* 30 fokos szöget zár be.

9. Legyen $(H, \prec)$ egy részbenrendezett halmaz. Egy x elem *maximális* (*minimális*), ha nem létezik olyan $y \in H$, amelyre $x \prec y$ $(y \prec x)$.

   a. Bizonyítsuk be, hogy H-ban a maximális (illetve a minimális) elemek halmaza egy antilánc.

   b. Tegyük fel, hogy a maximális és minimális elemek *együtt* egy antiláncot alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy H összes eleme is egy antiláncot alkot.

10. Legyen $(H, \prec)$ egy részbenrendezett halmaz, L egy maximális lánc, amelynek maximális eleme x, minimális eleme y. Legyen $A = \{z_1, \ldots, z_a\}$ egy maximális antilánc H-ban.

    Végül legyen
    $$H^+ = \{\ h \in H \mid \exists z \in A : z \preceq h\},$$
    és
    $$H^- = \{\ h \in H \mid \exists z \in A : h \preceq z\}.$$

    a. Bizonyítsuk be, hogy $H^+ \cap H^- = A$.

    b. Bizonyítsuk be, hogy $H^+ \cup H^- = H$.

    c. Bizonyítsuk be, hogy $x \in H^+$, $y \in H^-$.

11. Legyen $G(V, E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, $G_1(V, E_1)$ és $G_2(V, E_2)$ perfektek, $|V| = 65$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy teljes ötöst vagy egy üres ötöst. (Öt pontot, amelyek vagy mind össze vannak kötve, vagy semelyik kettő sincs.)

12. Adott 50 egyforma hosszú, különböző intervallum egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy (a) vagy van olyan pont amelyet legalább 8 intervallum tartalmaz, vagy pedig van 8 páronként diszjunkt intervallum. (b) Ugyanez, csak 7-tel és 9-cel.

13. Legyen $G(V, E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, $G_1(V, E_1)$ perfekt, $G_2(V, E_2)$ páros gráf, és $|V| = 163$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy teljes tizest, vagy egy üres tizest. (Tíz pontot, amelyek vagy mind össze vannak kötve, vagy semelyik kettő.)

Házi feladat

1. Mutassunk egy részben rendezett halmazt és benne egy maximális láncot és maximális antiláncot, amelyek diszjunktak.

2. Legyen $a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges számsorozat. G csúcsai $v_1, \ldots, v_n$, v_i és v_j $(i \neq j)$ össze van kötve akkor és csak akkor, ha $|a_i - a_j| \geq 100$. Bizonyítsuk be, hogy G perfekt.