Kombinatorika és gráfelmélet 2.

2. gyakorlat, 2020. szeptember 18.

Összehasonlítás gráfok, Dilworth tétel

Tudnivalók.
Legyen H egy halmaz, es $\preceq$ egy reláció H elemein. A $\preceq$ reláció
reflexív, ha minden $a \in H$ esetén $a \preceq a$;
antiszimmetrikus, ha $a \preceq b, b \preceq a \longrightarrow a = b$;
tranzitív, ha $a \preceq b, b \preceq c \longrightarrow a \preceq c$.

Egy reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációt **részbenrendezésnek** hívunk, a $(H, \preceq)$ párt pedig részben rendezett halmaznak. Ha $a \preceq b$ és $a \neq b$, azt úgy jelöljük, hogy $a \prec b$.

Mostantól legyen $(H, \preceq)$ egy részben rendezett halmaz. Az $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset H$ részhalmazt **láncnak** hívjuk, ha $a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_k$, és **antiláncnak**, ha $a_1, a_2, \ldots, a_k$ közül semelyik kettő sem összehasonlítható.

Dilworth tétel. Legyen a a $(H, \preceq)$ részben rendezett halmazban található legnagyobb antilánc mérete. Ekkor H felbontható a darab lánc uniójára, kevesebbre viszont nem.

duális Dilworth tétel. Legyen l a $(H, \preceq)$ részben rendezett halmazban található legnagyobb lánc mérete. Ekkor H felbontható l darab antilánc uniójára, kevesebbre viszont nem.

A $(H, \preceq)$ részben rendezett halmazhoz tartozó $G(H)$ összehasonlítás gráf csúcsai H elemei, két elem akkor és csak akkor van összekötve éllel, ha összehasonlíthatóak.

Lemma. Az összehasonlítás gráfok perfektek.

1. G egy n csúcsú perfekt gráf. Bizonyítsuk be, hogy $\omega(\overline{G})\omega(G) \geq n$.

   Megoldás: Mivel G perfekt, $\omega(G) = \chi(G)$ $\omega(\overline{G})$ pedig éppen $\alpha(G)$, G függetlenségi száma (max független mérete). Viszont minden n csúcsú G gráfra igaz, hogy $\alpha(G)\chi(G) \geq n$, hiszen ha kiszínezzük χ színnel, akkor minden színosztályban legfeljebb α csúcs van.

2. Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egy számsorozat. Ebből képezzük a G gráfot a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsokon a következő módon: minden $i > j$ számpárra a v_i és v_j csúcsok össze vannak kötve G-ben akkor és csak akkor, ha $a_i > a_j$.

   Bizonyítsuk be, hogy G minden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sorozat esetén perfekt!

   Megoldás: Ez egy összehasonlítás gráf, tehát perfekt! A részbenrendezés: $v_i \succ v_j$ akkor és csak akkor, ha $i > j$ és $a_i > a_j$.

3. (Erdős-Szekeres tétel) Legyen $A = a_1, a_2, \ldots, a_m$ egy csupa különböző számból álló számsorozat, $m = kl+1$, $k, l > 0$.

   a. Bizonyítsuk be, hogy A tartalmaz egy $k+1$ hosszú növekedő vagy egy $l+1$ hosszú csökkenő részsorozatot.

   b. Bizonyítsuk be, hogy az állítás $m = kl$ esetén már nem feltétlenül igaz.

   Megoldás: a. Minden i-re legyen $nov(i)$ az a_i-ban végződő leghosszabb növekvő részsorozat hossza, és legyen $csokk(i)$ az a_i-ban végződő leghosszabb csökkenő részsorozat hossza. Megfigyelés: ha $i \neq j$, akkor $(nov(i), csokk(i)) \neq (nov(j), csokk(j))$. Mivel $kl+1$ szám van, lesz olyan i, amire $nov(i) > k$ vagy $csokk(i) > l$.

4. a. Van egy csomó kartondobozunk, melyek a G gráf csúcsainak felelnek meg. Két csúcs akkor van összekötve, ha a megfelelő dobozok közül egyik sem rakható a másikba. Igazoljuk, hogy G perfekt.

   b. Mi a helyzet hajlékony dobozokkal?

   Megoldás: a. Ez egy összehasonlítási gráf komplementere. b. Attol függ, pontosan mennyire hajlékonyak, lehet csinálni 5 hosszú feszített kört.

5. Adott a síkon néhány körvonal, ezekhez rendeljük a következő G gráfot. G csúcsai feleljenek meg egy-egy megadott körvonalnak, és kettő akkor legyen összekötve, ha a két megfelelő körvonal egyike teljesen a másik belsejében halad. Bizonyítsuk be, hogy az így megadott G gráf perfekt.

   Megoldás: a. Ez egy összehasonlítási gráf (reláció: „benne van").

6. Legyen a G gráf csúcshalmaza egy véges halmaz néhány tetszőleges részhalmaza. Két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő részhalmazok közül valamelyik tartalmazza a másikat. Bizonyítsuk be, hogy G perfekt.

   Megoldás: a. Ez is egy összehasonlítási gráf (reláció: tartalmazás).

7. Adott egy ABC háromszög, és benne n pont. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható $\sqrt[3]{n}$ pont úgy, hogy bármely kettő által meghatározott egyenes a háromszögnek ugyanazt a két oldalát metszi.

   Megoldás: Két Dilworth tétel. 1. részbenrendezés: $x \succ y$ ha az $\overrightarrow{xy}$ félegyenes metszi AB-t. Ha van $\sqrt[3]{n}$ méretű antilánc, akkor a megfelelő pontok egyenesei a másik két oldalt metszik. Ha nincs, akkor van $\sqrt[3]{n}^2$ méretű lánc, ezekre újabb részbenrendezés, a BC oldallal.

8. Adott n pont a síkon. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük $\sqrt{n}$ pont úgy, hogy bármely kettő által meghatározott egyenes az x-tengellyel *legalább* 30 fokos szöget zár be, vagy $\sqrt{n}$ pont úgy, hogy bármely kettő által meghatározott egyenes az x-tengellyel *legfeljebb* 30 fokos szöget zár be.

   Megoldás: Dilworth tétel, hasonlóan, mint az előbb.

9. Legyen $(H, \prec)$ egy részbenrendezett halmaz. Egy x elem *maximális* (*minimális*), ha nem létezik olyan $y \in H$, amelyre $x \prec y$ $(y \prec x)$.

   a. Bizonyítsuk be, hogy H-ban a maximális (illetve a minimális) elemek halmaza egy antilánc.

   b. Tegyük fel, hogy a maximális és minimális elemek *együtt* egy antiláncot alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy H összes eleme is egy antiláncot alkot.

   Megoldás: a. Ha két max elem összehasonlítható lenne, akkor a kisebb nem lenne max. Minimálissal ugyanez. b. Tegyük fel, hogy $x \succ y$. Bővítsük ki xy-t egy maximális lánccá, ebben max elem a, min elem b. Ekkor $a \succ b$, a maximális elem, b minimális, ami ellentomond a feltételnek.

10. Legyen $(H, \prec)$ egy részbenrendezett halmaz, L egy maximális lánc, amelynek maximális eleme x, minimális eleme y. Legyen $A = \{z_1, \ldots, z_a\}$ egy maximális antilánc H-ban.

    Végül legyen
    $$H^+ = \{\ h \in H \mid \exists z \in A : z \preceq h\},$$
    és
    $$H^- = \{\ h \in H \mid \exists z \in A : h \preceq z\}.$$

    a. Bizonyítsuk be, hogy $H^+ \cap H^- = A$.

    b. Bizonyítsuk be, hogy $H^+ \cup H^- = H$.

    c. Bizonyítsuk be, hogy $x \in H^+$, $y \in H^-$.

    Megoldás: Ezt elmondtam az előadáson (video).

11. Legyen $G(V, E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, $G_1(V, E_1)$ és $G_2(V, E_2)$ perfektek, $|V| = 65$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy teljes ötöst vagy egy üres ötöst. (Öt pontot, amelyek vagy mind össze vannak kötve, vagy semelyik kettő sincs.)

    Megoldás: Mivel G_1 perfekt, $\chi(G_1) = \omega(G_1)$. Ha $\chi(G_1) \geq 5$, akkor tehát G_1 tartalmaz egy teljes 5 csúcsú részgráfot, ez G-ben is egy teljes ötös, így készen vagyunk. Feltehetjük tehát, hogy $\chi(G_1) \leq 4$. Tekintsük egy színezését legfeljebb 4 színnel. Minden színosztály egy független halmaz, együttvéve lefedik a 65 csúcsot, tehát valamelyik közülük legalább 17 csúcsú. Legyen G_2' G_2-nek ezen 17 csúcs által feszített részgráfja. G_2'

perfekt, ezért, hasonlóan az előző esethez, ha $\chi(G_2') \geq 5$, akkor G_2' tartalmaz egy teljes 5 csúcsú részgráfot, és készen vagyunk. Végül ha $\chi(G_2') \leq 4$, akkor tekintsük egy 4–színezését, valamelyik színosztálynak legalább 5 csúcsa van, ez pedig egy független ponthalmaz G_1-ben is, G_2-ben is, így G-ben is.

12. Adott 50 egyforma hosszú, különböző intervallum egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy (a) vagy van olyan pont amelyet legalább 8 intervallum tartalmaz, vagy pedig van 8 páronként diszjunkt intervallum. (b) Ugyanez, csak 7-tel és 9-cel.

    Megoldás: a: 1. megoldás: Legyenek az intervallumok $I_1, I_2, \ldots, I_{50}$, a bal végpontjuk szerint rendezve balról jobbra. Ha I_1, I_8, I_{15} és I_{50} páronként diszjunktak, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor valamelyik kettő metszi egymást, de akkor a rendezés miatt két szomszédos (amelyeknek az indexe héttel különbözik) is metszi egymást. Legyenek ezek I_i és I_{i+7}. Ekkor viszont ezek metszetét tartalmazza $I_{i+1}, \ldots, I_{i+6}$ is, és már meg is van a pont amelyet legalább 8 intervallum tartalmaz.

    2. megoldás: Legyen G az $I_1, I_2, \ldots, I_{50}$ intervallumok által feszített intervallum metszés gráf (intervallumgráf). Tudjuk, hogy G perfekt, tehát $\alpha(G)\omega(G) \geq 50$. Tehát vagy $\alpha(G) \geq 8$, ekkor van 8 páronként diszjunkt intervallum, vagy $\omega(G) \geq 8$, ekkor van 8 páronként metsző intervallum. Ezeknek viszont van közös pontjuk, tehát van olyan pont amelyet legalább 8 intervallum tartalmaz.

    b: ugyanígy megy.

13. Legyen $G(V, E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, $G_1(V, E_1)$ perfekt, $G_2(V, E_2)$ páros gráf, és $|V| = 163$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy teljes tizest, vagy egy üres tizest. (Tíz pontot, amelyek vagy mind össze vannak kötve, vagy semelyik kettő.)

    Megoldás:

    Mivel G_1 perfekt, $\chi(G_1) = \omega(G_1)$. Ha $\chi(G_1) \geq 10$, akkor tehát G_1 tartalmaz egy teljes 5 csúcsú részgráfot, ez G-ben is egy teljes ötös, így készen vagyunk. Feltehetjük tehát, hogy $\chi(G_1) \leq 9$. Tekintsük egy színezését legfeljebb 9 színnel. Minden színosztály egy független halmaz, együttvéve lefedik a 163 csúcsot, tehát valamelyik közülük legalább 19 csúcsú. Legyen G_2' G_2-nek ezen 19 csúcs által feszített részgráfja. G_2' páros, tehát valamelyik osztálya legalább 10 cscsú. Ezek a pontok függetlenek G-ben is.

Házi feladat

1. Mutassunk egy részben rendezett halmazt és benne egy maximális láncot és maximális antiláncot, amelyek diszjunktak.

2. Legyen $a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges számsorozat. G csúcsai $v_1, \ldots, v_n$, v_i és v_j $(i \neq j)$ össze van kötve akkor és csak akkor, ha $|a_i - a_j| \geq 100$. Bizonyítsuk be, hogy G perfekt.